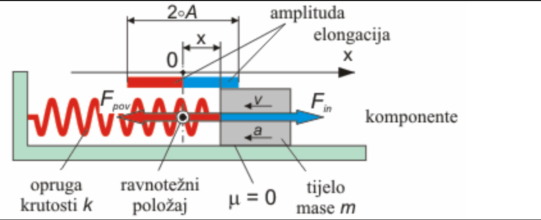
5.1 Titranje, oscilator i vrste oscilatora

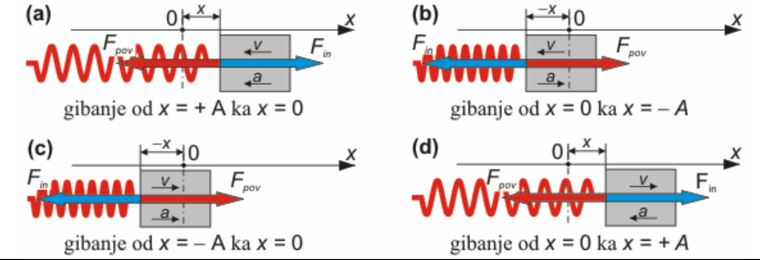
Titranje (oscilacije, vibracije) – periodičko gibanje tijela oko **ravnotežnog položaja** ($x = 0$), između graničnih položaja ($x = \pm A$).
Oscilator – sustav koji titra. (tijelo/opruga, njihala, žice muzičkih instrumenata, elastične membrane, atomi, molekule)
Na primjer, titranje počinje kada se tijelo odmakne od ravnotežnog položaja (od $x = 0$ do $x = A$) i pusti: (može li biti $x > A$?)

Povlačenje tijela iz ravnotežnog položaja (statika)



$F_{in} + F_{pov} = 0$ (dinamička ravnoteža – vektorski)

Težnja sustava uspostavljanju ravnotežnog stanja (dinamika)



Titraj – period gibanja između dva uzastopna prolaza iz istog smjera kroz ravnotežni položaj: $x = 0 \Rightarrow +A \Rightarrow 0 \Rightarrow -A \Rightarrow 0 \ldots$

Dinamička ravnoteža povratnih i inercijalnih sile može se opisati s komponentama, na primjer, pri gibanju $x = +A \Rightarrow x = 0$:

$\Sigma F_i = F_{pov} + F_{in} = 0$ (znakovi se određuju naknadno, na temelju trenutnog položaja tijela – suprotni smjerovi od x i a)

gdje je: $F_{pov} = -k \circ x$ – **povratna sila** (elastična sila), kojom opruga povlači uvijek (potiskuje) tijelo k ravnotežnom položaju,
$F_{in} = -m \circ a$ – **inercijalna sila**, kojom se tijelo uvijek protivi promjeni stanja gibanja.

Postavljanje **diferencijalne jednadžbe harmonijskog oscilatora** s elastičnom oprugom (krutosti k) i tijelom (masa m):

$$F_{pov} + F_{in} = -k \circ x - m \circ a = 0 \quad \text{(nisu određeni smjerovi } \boldsymbol{a} \text{ i } \boldsymbol{F}) \quad \Rightarrow \quad k \circ x + m \circ a = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{k}{m} \circ x + \frac{d^2x}{dt^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad a = -\frac{k}{m} \circ x$$

Prema tome, nakon puštanja, ubrzanje tijela (a) biti će veće što je veća krutost opruge (k), manja masa tijela (m), te što je tijelo tjelo prije puštanja povučeno dalje od ravnotežnog položaja (x).

OSCILATOR
- idealni
- s prigušenjem
- s prisilom
- s prisilom i prigušenjem

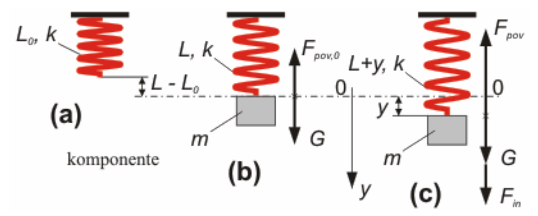
Idealni oscilator – bez trenja (idealizacija) ⇒ titranje bi trajalo beskonačno dugo ako bi faktor trenja (μ) bio jednak nuli.
Oscilator s prigušenjem – uslijed unutarnjih i/ili vanjskih utjecaja (trenje – amortizer) tijekom vremena se smanjuje amplituda.
Oscilator s prisilom – na oscilator djeluju vanjski periodički utjecaji (sila).

5.2 Harmonijski oscilator i svojstva oscilatora

Harmonijski oscilator – titranje se opisuje sa (rješenje diferencijalne jednadžbe harmonijskog oscilatora uz uvjete $x_0 = 0$, $x_0' = A$):

$$x = A \circ \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}} \circ t\right) \qquad x = A \circ \sin(\omega \circ t) \qquad \text{za } x_0 \neq 0 \qquad x = A \circ \sin(\omega \circ t + \varphi_0) \qquad [\text{ili } x = A \circ \cos(\omega \circ t + \varphi_0)]$$

Horizontalni i vertikalni idealni ($\mu_{kl,din} = 0$) harmonijski oscilator, s oprugom krutosti (k) i tijelom mase (m), opisuju se jednakim diferencijalnim jednadžbama (i imaju ista rješenja), s tim što se analiziraju komponente u horizontalnom (x) i vertikalnom (y) pravcu.



(b) $G + F_{pov,0} = 0$ (opća jednadžba, smjerovi nisu određeni)
$m \circ g - k \circ (L - L_0) = 0$ (statička ravnoteža)
(c) $G + F_{in} + F_{pov} = 0$ (opća jednadžba, s nepredviđenim smejrovima sila)
$m \circ g - m \circ a - k \circ (L - L_0 + y) = 0$ (dinamička ravnoteža)
$\cancel{m \circ g} - m \circ a - \cancel{k \circ (L - L_0)} - k \circ y = 0$
po skraćivanju, konačno se dobiva: $m \circ a + k \circ y = 0$

Elongacija, x, m – razmak tijela (točke) od ravnotežnog položaja. Tijekom titranja (vremena) stalno se mijenja.

Amplituda, A, m – maksimalni razmak tijela od ravnotežnog položaja. Jednaka je razmaku tijela od ravnotežnog položaja (elongaciji) u trenutku kada je tijelo pušteno da počne titrati. Dobiva se iz uvjeta:

$t = 0$ s, $\varphi_0 = \pi/2 \Rightarrow \sin(\omega \circ t + \varphi_0) = 1$
[ili $t = 0$ s, $\varphi_0 = 0 \Rightarrow \cos(\omega \circ t + \varphi_0) = 1$]

Kružna frekvencija, ω, rad∘s^{-1} – kutna brzina titranja: $\omega = \dfrac{2 \circ \pi}{T}$

Početna faza, φ_0, rad – konstanta je titranja i dobiva se iz uvjeta $t = 0$ s. **Faza,** $\varphi = (\omega \circ t + \varphi_0)$, rad – mijenja se tijekom vremena.

Period, T, s – vrijeme trajanja jednog titraja (vremenski interval između dva prolaza kroz istu točku iz istog smjera). Kod jednolike rotacije je period (vrijeme, t, u sekundama, potrebno za obilazak opsega kružnice, $2 \circ \pi$, u radijanima):

$$T = \frac{2 \circ \pi}{\omega} = 2 \circ \pi \circ \sqrt{\frac{m}{k}} \qquad [T] = \frac{\text{s}}{\text{titraj}} = \text{s}$$

Period će biti veći što je veća masa m tijela koje titra (tijelo je inertnije i teže mu je mijenjati stanje gibanja) i što je manja krutost opruge k pod čijim djelovanjem tijelo titra (opruga manje krutosti se lakše deformira).

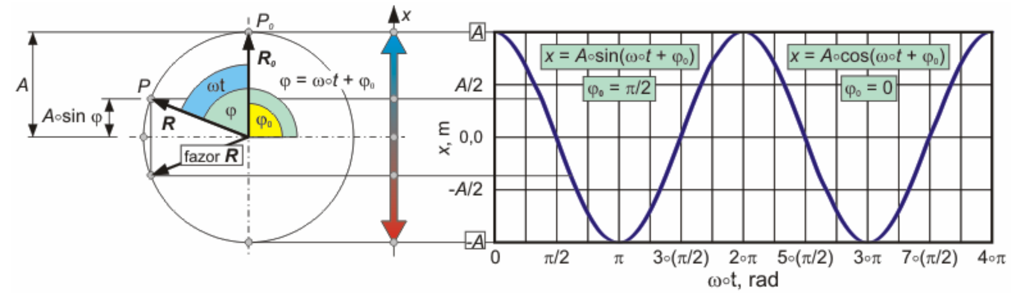
Frekvencija, ν, s^{-1} – broj titraja ($0 \Rightarrow +A \Rightarrow 0 \Rightarrow -A \Rightarrow 0$) u jedinici vremena:

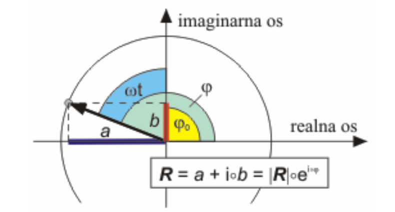
$$\nu = \frac{1}{T} = \frac{1}{2 \circ \pi} \circ \sqrt{\frac{k}{m}} = \frac{\omega}{2 \circ \pi} \qquad [\nu] = \frac{\text{titraj}}{\text{s}} = \frac{1}{\text{s}} = \text{s}^{-1} = \text{Hz (herc)}$$

Ako točka obiđe kružnicu 1000 puta u sekundi:
$T = 10^{-3}$ s, a $\nu = 10^{3}$ s^{-1} = 1 kHz.

5.3 Trigonometrijski i Eulerov eksponencijalni opis harmonijskog titranja

Titranje harmonijskog oscilatora se može opisati trigonometrijskim ili eksponencijalnim jednadžbama.





$$|\boldsymbol{R}| = \sqrt{a^2 + b^2} \qquad \tan\varphi = \frac{b}{a}$$

Kao rješenje opće diferencijalne jednadžbe gibanja harmonijskog oscilatora: $k \circ x + m \circ \frac{d^2x}{dt^2} = 0$ dobiva se (računalni program):

opće trigonometrijsko rješenje u realnoj ravnini:	opće eksponencijalno rješenje u kompleksnoj ravnini:
$x = A \circ \sin(\omega \circ t + \varphi_0)$ [ili $x = A \circ \cos(\omega \circ t + \varphi_0)$]	$x = A \circ e^{i \circ (\omega \circ t + \varphi_0)}$

Ako titranje počinje s početnom fazom $\varphi_0 < 0$ faza je $\varphi = \omega \circ t + \varphi_0$, dok je za $\varphi_0 > 0$ faza $\varphi = \omega \circ t - \varphi_0$ (nacrtati).

Na temelju Eulerove formule: $e^{i \circ \varphi} = \cos\varphi + i \circ \sin\varphi$ slijedi: $A \circ [\cos(\omega \circ t + \varphi_0) + i \circ \sin(\omega \circ t + \varphi_0)]$. Deriviranjem se dobiva:

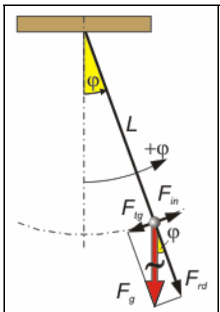
$v = \frac{dx}{dt} = A \circ \omega \circ \cos(\omega \circ t + \varphi_0)$	$v = \frac{dx}{dt} = i \circ \omega \circ A \circ e^{i \circ (\omega \circ t + \varphi_0)}$
$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} = -A \circ \omega^2 \circ \sin(\omega \circ t + \varphi_0) = -\omega^2 \circ x$	$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 \circ A \circ e^{i \circ (\omega \circ t + \varphi_0)} = -\omega^2 \circ x$

Usporedbom rezultata deriviranja s diferencijalnom jednadžbom gibanja harmonijskog oscilatora:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 \circ x \;\text{(rezultat derivacije)} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m} \circ x \;\text{(iz diferencijale jednadžbe)} \quad \text{dobiva se} \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Prema tome, idealni harmonijski oscilator s oprugom (k) i tijelom (m) može se opisati sa: $x = A \circ \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}} \circ t + \varphi_0\right)$

5.4 Matematsko i fizikalno njihalo



Matematsko njihalo – težina se razlaže na: (a) radijalnu komponentu koja zateže nit: $F_{rd} = m \circ g \circ \cos\varphi$ i (b) tangencijalnu komponentu (povratna sila) koja uzrokuje gibanje: $F_{tg} = -m \circ g \circ \sin\varphi$.

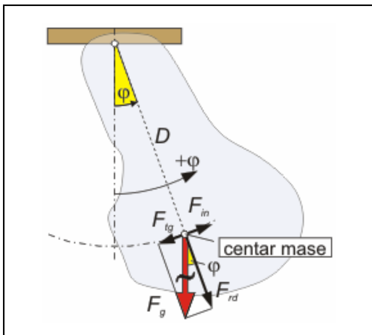
Na temelju dinamičke ravnoteže: $F_{pov} + F_{in} = 0 \;\Rightarrow\; -m \circ g \circ \sin\varphi - m \circ a_{tg} = 0$.

$$a_{tg} = L \circ \alpha \;,\; \alpha = \frac{d^2\varphi}{dt^2} \;,\; \sin\varphi \approx \varphi \text{ (za: } \varphi \approx 0) \;\Rightarrow\; m \circ g \circ \varphi + m \circ L \circ \frac{d^2\varphi}{dt^2} = 0 \;\Rightarrow\; \frac{d^2\varphi}{dt^2} = -\frac{g}{L} \circ \varphi \,.$$

$$\varphi = \beta \circ \sin(\omega \circ t + \varphi_0) \;\Rightarrow\; \frac{d\varphi}{dt} = \beta \circ \omega \circ \cos(\omega \circ t + \varphi_0) \;\Rightarrow\; \frac{d^2\varphi}{dt^2} = -\omega^2 \circ \varphi \;\Rightarrow\; \omega = \sqrt{\frac{g}{L}} \quad T = 2 \circ \pi \circ \sqrt{\frac{L}{g}}$$

Kako je povratna sila $F_{pov} = F_{tg} = f(\sin\varphi)$ (sinusna je funkcija) titranje matematičkog klatna nije harmonijsko (kod oscilatora opruga/tijelo: $F_{pov} = -k \circ x$ – linearna je funkcija), a približno je opisano kao harmonijsko za $\varphi \approx 0$. Greške su (MS Excel):

φ / °	0,00	1,00	5,00	10,00	15,00	20,00	25,00	30,00
φ / rad	0,0000	0,017453	0,08727	0,1745	0,2618	0,3491	0,4363	0,5236
sin φ	0,0000	0,017452	0,08716	0,1736	0,2588	0,3420	0,4226	0,5000
{[(φ – sin φ)/sin φ]∘100} / %	0,00	0,01	0,13	0,51	1,15	2,06	3,25	4,72



Fizikalno njihalo je – umjesto sila analiziraju se momenti.

Na temelju dinamičke ravnoteže: $M_{pov} + M_{in} = 0 \;\Rightarrow\; -(m \circ g \circ \sin\varphi) \circ D - I \circ \alpha = 0$.

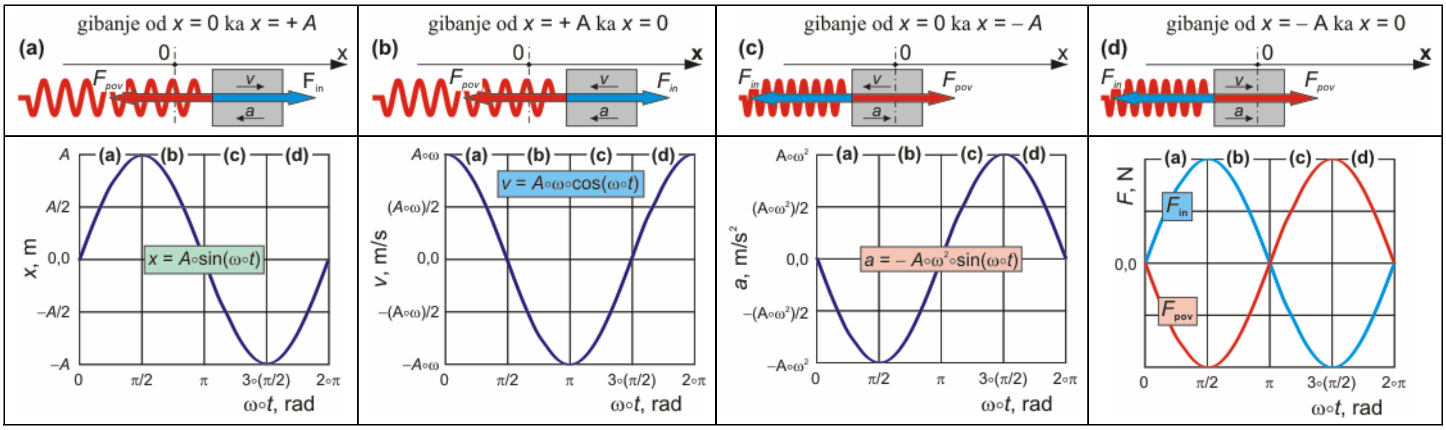
Za: $\sin\varphi \approx \varphi$ (za: $\varphi \approx 0$) $\Rightarrow\; m \circ g \circ D \circ \varphi + I \circ \frac{d^2\varphi}{dt^2} = 0 \;\Rightarrow\; \frac{d^2\varphi}{dt^2} = -\frac{m \circ g \circ D}{I} \circ \varphi$.

$$\varphi = \beta \circ \sin(\omega \circ t + \varphi_0) \;\Rightarrow\; \frac{d\varphi}{dt} = \beta \circ \omega \circ \cos(\omega \circ t + \varphi_0) \;\Rightarrow\; \frac{d^2\varphi}{dt^2} = -\omega^2 \circ \varphi$$

$$\omega = \sqrt{\frac{m \circ g \circ D}{I}} \qquad T = 2 \circ \pi \circ \sqrt{\frac{I}{m \circ g \circ D}}$$

Na temelju izvedene jednadžbe za period (T) fizikalnog njihala (realno njihalo) mogu se eksperimentalno određivati momenti inercije (I) tijela složenih geometrija. Kako bi se smanjile greške amplitude trebaju biti što je moguće manje (točnost mjerenja T).

5.5 Gibanje, sile i energije harmonijskog oscilatora



Ukupna energija (jednaka je uloženom radu na odmicanje tijela od ravnotežnog položaja):

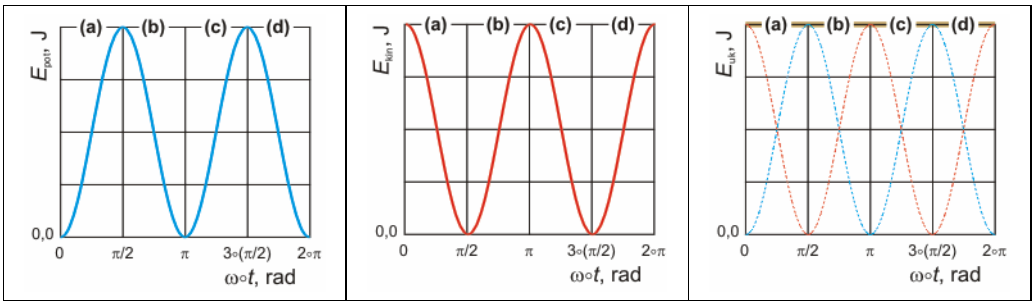
$$E_{uk} = W = \int_0^A F_{vl} \circ dx = \int_0^A k \circ x \circ dx = \left| \frac{k \circ x^2}{2} \right|_0^A = \frac{k \circ A^2}{2}$$

Potencijalna energija:

$$E_{pot} = \frac{k \circ x^2}{2}$$

Kinetička energija:

$$E_{kin} = \frac{m \circ v^2}{2}$$



$$E_{pot} = \frac{k \circ A^2 \circ \sin^2(\omega \circ t)}{2}$$

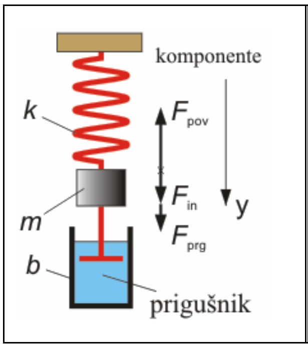
$$E_{kin} = \frac{m \circ \omega^2 \circ A^2 \circ \cos^2(\omega \circ t)}{2}$$

$$E_{uk} = E_{pot} + E_{kin}$$

$$\omega^2 = \frac{k}{m}$$

$$E_{uk} = \frac{k \circ A^2 \circ \sin^2(\omega \circ t)}{2} + \frac{k \circ A^2 \circ \cos^2(\omega \circ t)}{2} = \frac{k \circ A^2}{2} \circ \left[\sin^2(\omega \circ t) + \cos^2(\omega \circ t)\right] = \frac{k \circ A^2}{2}$$

5.6 Prigušeno titranje



Kako je: (komponente)

$$F_{in} + F_{prg} + F_{pov} = 0$$

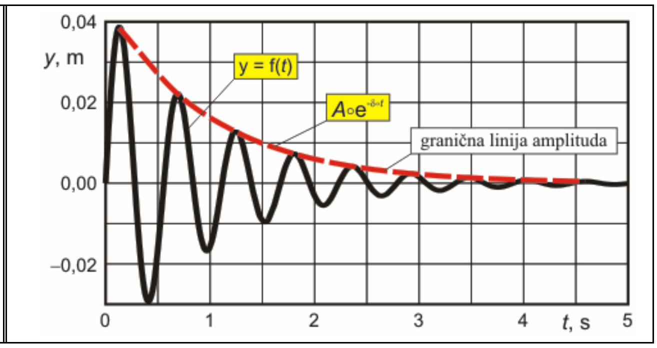
ako je prigušna sila:

$$F_{prg} = -\,b \circ v \quad \text{(sporo gibanje)}$$

slijedi diferencijalna jednadžba prigušenog titranja:

$$-\,m \circ a - b \circ v - k \circ y = 0$$

$$m \circ \frac{d^2 y}{dt^2} + b \circ \frac{dy}{dt} + k \circ y = 0$$



Rješenje diferencijalne jednadžbe prigušenog titranja (oscilatora s oprugom i tijelom) je:

$y = A \circ e^{-\delta \circ t} \circ \sin(\omega_{pgr} \circ t + \varphi_0)$ (provjeriti)	gdje je: δ – prigušni koeficijent, ω_{pgr} – kutna brzina oscilatora sa slabim prigušenjem (u protivnom: $F_{prg} \neq -\,b \circ v$).	$\delta = \frac{b}{2 \circ m}$ $\omega_{prg} = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{b^2}{4 \circ m^2}}$

Kutna brzina je kod prigušenog oscilatora (ω_{prg}) manja nego kod idealnog oscilatora (ω).

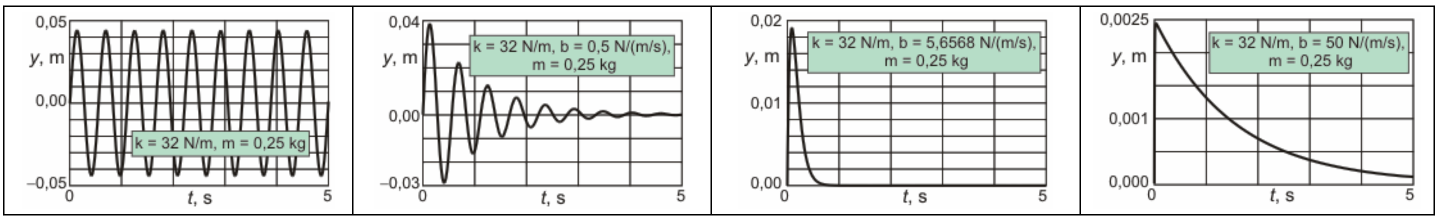
Kako je eksponent granične linije amplituda s negativnim predznakom, $A \circ e^{-\delta \circ t}$, slijedi da amplitude tijekom vremena brže opadaju:

(a) što je veći faktor prigušenja b, (veće unutarnje trenje fluida kojim je napunjen prigušnik)

(b) što je manja masa m tijela koje titra.

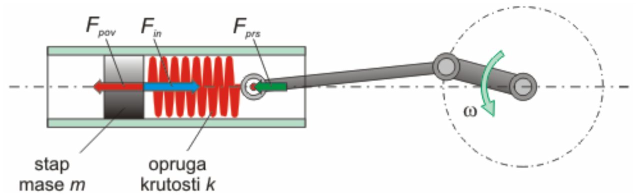
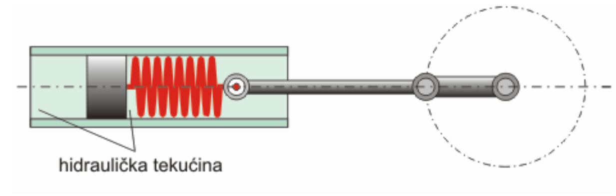
Kritično prigušenje – za $b = 2 \circ \sqrt{k \circ m}$ slijedi $\omega_{prg} = 0$, te je $y = A \circ e^{-\delta \circ t} \circ \varphi_0$ – tijelo ne titra nego se vraća u ravnotežni položaj.

Nadkritično prigušenje – za $b > 2 \circ \sqrt{k \circ m}$ (drugi je oblik rješenja diferencijalne jednadžbe gibanja oscilatora) tijelo ne titra i još se sporije vraća u ravnotežni položaj nego kod slučaja prigušenog oscilatora s kritičnim prigušenjem .



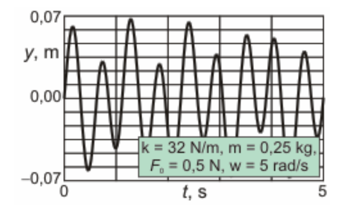
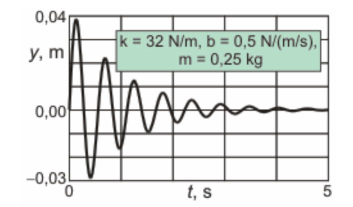
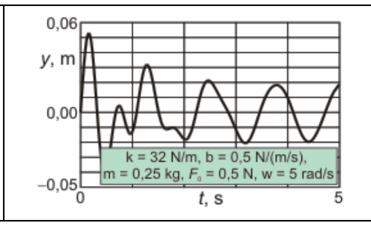
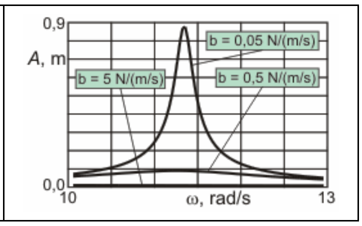
5.7 Prisilno i prigušeno prisilno titranje

Prisilno titranje je posljedica djelovanja periodičke prisilne sile [$F_{prs,t} = F_{prs,(t+T)}$]:

Prisilno titranje stapa	**Prisilno titranje** stapa **s prigušenjem**
	

Ako je sila koja izaziva prisilno titranje: $F_{prs} = F_0 \circ \cos(\omega \circ t)$, diferencijalne su jednadžbe gibanja oscilatora (stapa):

$F_{in} + F_{pov} - F_{prs} = 0$ (bez prigušenja)	$F_{in} + F_{prg} + F_{pov} - F_{prs} = 0$ (s prigušenjem)
$m \circ \dfrac{d^2y}{dt^2} + k \circ y - F_0 \circ \cos(\omega \circ t) = 0$	$m \circ \dfrac{d^2y}{dt^2} + b \circ \dfrac{dy}{dt} + k \circ y - F_0 \circ \cos(\omega \circ t) = 0$

Nakon dovoljno dugo vremena, dovođena energija se izjednačava s odvođenom i uspostavlja se stacionarno stanje koje se može opisati s jednadžbom (rješenje diferencijalne jednadžbe gibanja oscilatora).

$$y = A \circ \sin(\omega \circ t + \varphi_0)$$

Oscilator titra po uspostavljanju stacionarnog stanja s kutnom frekvencijom periodičke prisilne sile (ω) i konstantnom amplitudom:

$$A = \frac{F_0/m}{\sqrt{\left(\omega^2 - \omega_0^2\right)^2 + \left(\dfrac{b \circ \omega}{m}\right)^2}} \qquad \text{gdje je: } \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \text{ , pri } b = 0$$

5.8 Valovi i vrste valova

Valovi – gibanje poremećaja (od jedne do druge susjedne točke) kroz medij (kamen koji padne na površinu vode). Gibanje poremećaja praćeno je prijenosom energije kroz medij bez prijenosa tvari.

Brzina prostiranja valova – brzina kojom se giba poremećaj kroz prostor.

TIPOVI VALOVA

mehanički | elektromagnetski | supstancijalni

Mehanički valovi (vodeni valovi, zvučni valovi i seizmički valovi) – prostiru se samo u tvarima (voda, zrak, stijene) skladno Newtonovim zakonima.

Elektromagnetski valovi (vidljivi i ultravioletni valovi, radio i televizijski valovi, mikrovalovi, x-zrake i radarski valovi) – prostiru se u vakuumu brzinom svjetlosti.

Supstancijalni valovi – elementarne čestice (elektroni, protoni, neutroni) koje formiraju atome, čak atomi i molekule, kreću se kao valovi.

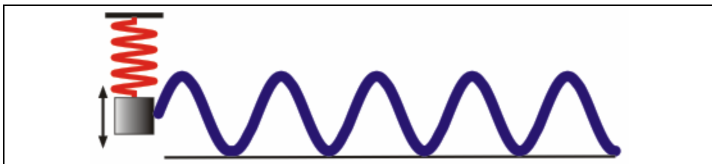
MEHANIČKI VALOVI

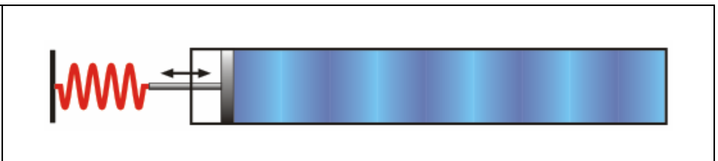
transverzalni | longitudinalni

Transverzalni valovi – titranje medija je okomito na pravac prostiranja valova. (žica gitare)

Longitudinalni valovi – medij titra u pravcu prostiranja valova. (fluidi prenose samo longitudinalne valove – zvučni valovi)

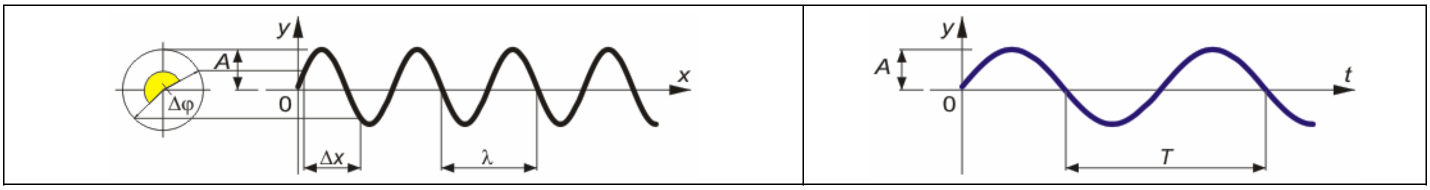
Periodični valovi





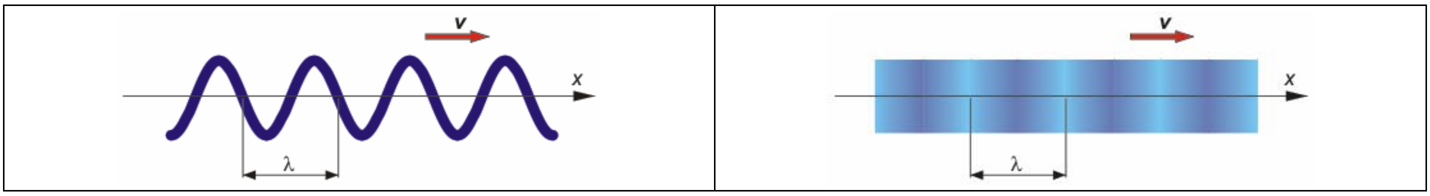
5.9 Svojstva mehaničkih valova

Amplituda, A, m – maksimalni razmak od ravnotežnog položaja.
Valna duljina, λ, m – razmak dvije susjedne točke u istoj fazi titranja. (koordinatni sustav $0,x,y$)
Period, T, s – vrijeme trajanja titraja.
Frekvencija, ν, s^{-1} ($= 1/T$) – broj titraja u sekundi. (koordinatni sustav $0,t,y$ – transverzalni valovi, ili $0,t,x$ – longitudinalni valovi)
Fazna razlika, $\Delta\varphi$, rad – razlika faza titraja u dvije točke: $\Delta\varphi : 2\circ\pi = x : \lambda$

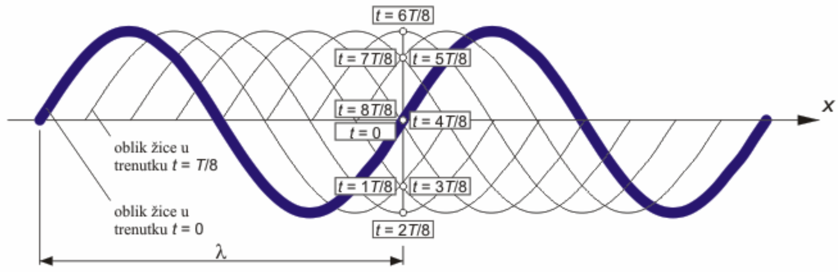


Brzina prostiranja vala (transverzalnih i longitudinalnih) – kojom se titranje (energija) prenosi kroz medij:

$$v = \frac{\lambda}{T} = \lambda \circ \nu$$

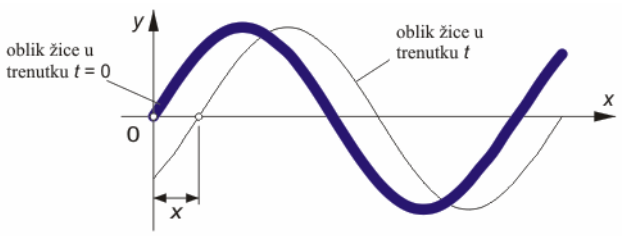


Vrijeme za koje valno gibanje prevali jednu valnu duljinu jednako je periodi:



5.10 Valna funkcija sinusnih valova

Valna funkcija – funkcija $y_{(x,t)}$ kojom se opisuje val.



U trenutku $t = 0$, sinusni val se može opisati sinusnom funkcijom:

$$y_{(x=0,t)} = A\circ\sin\,\omega\circ t = A\circ\sin\,2\circ\pi\circ f\circ t$$

Nakon isteka vremena t, val je prevalio put x , gibajući se brzinom v u smjeru +x. Imajući u vidu $t = x/v$ i smjer gibanja, val se može opisati sa: (gibanje točke x u trenutku t isto je kao i gibanje točke $x = 0$ u ranijem trenutku $t - x/v$)

$$y_{(x,t)} = A\circ\sin\,\omega\circ\left(t - \frac{x}{v}\right) = A\circ\sin\,2\circ\pi\circ f\circ\left(t - \frac{x}{v}\right) = A\circ\sin\left(\omega\circ t - \frac{2\circ\pi\circ\nu}{v}\circ x\right)$$

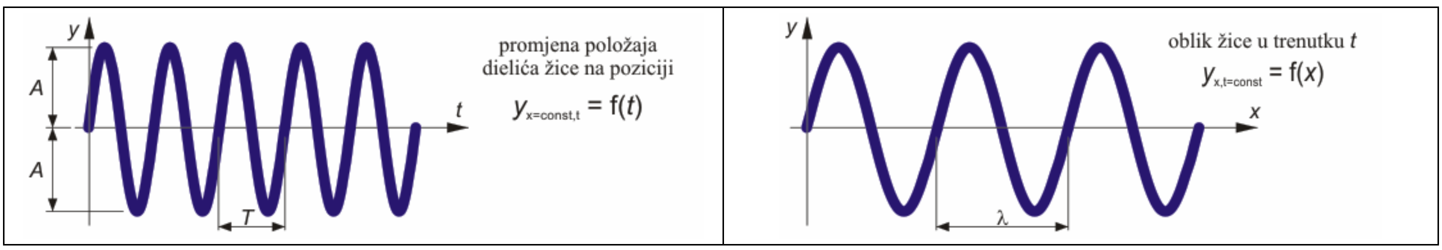
Ako se u gornju jednadžbu uvede **valni broj** k:

$$\nu = \frac{1}{T} = \frac{v}{\lambda} \qquad k = \frac{2\circ\pi}{\lambda} = \frac{2\circ\pi\circ\nu}{v}$$

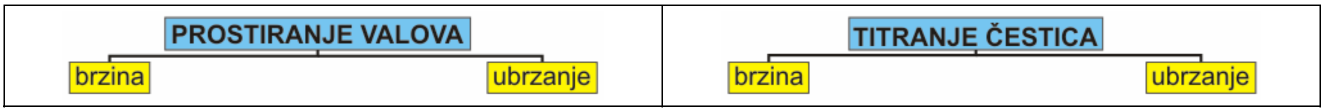
dobiva se:

$$y_{(x,t)} = A\circ\sin\,(\omega\circ t - k\circ x) \qquad \text{(sinusni val koji giba u smjeru } +x\text{)}$$

U ovoj je jednadžbi kutna frekvencija izražena u jedinicama rad/s, a valni će broj biti izražen u jedinicama rad/m.
Bitno je uočiti razliku između dva dijagrama:



5.11 Brzine i ubrzanja titranja čestica sinusnih valova



Brzina titranja čestica – po usvajanju x = const (odabire se jedna od čestica – djelić žice) parcijalnim deriviranjem valne funkcije:

$$y_{x=\text{const},t} = A\circ\sin\,(\omega\circ t - k\circ x)$$

po vremenu se dobiva:

$$v_{x=\text{const},t} = \frac{\partial y_{x=\text{const},t}}{\partial t} = \omega\circ A\circ\cos\,(\omega\circ t - k\circ x)$$ (isto kao i obično deriviranje po vremenu, uz napomenu x = const)

Brzina titranja čestice se stalno mijenja, a njena maksimalna vrijednost $\omega\circ A$ (pri $\omega\circ t = k\circ x$ je $\cos\,(\omega\circ t - k\circ x) = \cos 0 = 1$) može biti veća, manja ili jednaka brzini prostiranja valova $v = \lambda\circ f$. Pored toga, iz usporedbe s brzinom harmonijskog titranja slijedi $k\circ x = \varphi_0$.

Ubrzanje titranja čestica – parcijalnim deriviranjem brzine titranja čestica po vremenu se dobiva pri x = const:

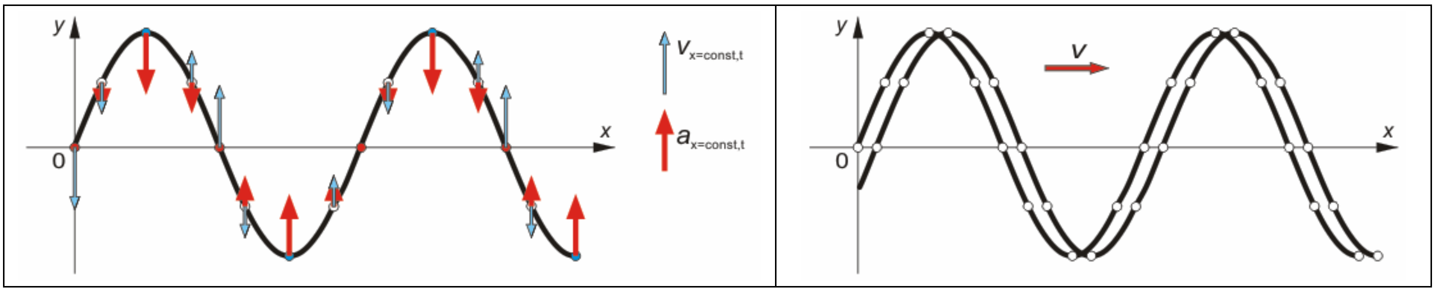
$$a_{x=\text{const},t} = \frac{\partial v_{x=\text{const},t}}{\partial t} = \frac{\partial^2 y_{x=\text{const},t}}{\partial t^2} = -\,\omega^2\circ A\circ\sin\,(\omega\circ t - k\circ x) = -\,\omega^2\circ y_{x=\text{const},t}$$

Prvim parcijalnim deriviranjem valne funkcije pri t = const se dobiva trenutni nagib žice u nekoj točki: (ne brzina prostiranja valova)

$$\frac{\partial y_{x=\text{const},t}}{\partial x} = -\,k\circ A\circ\cos\,(\omega\circ t - k\circ x) = -\,k\circ y_{x=\text{const},t}$$

dok se drugim parcijalnim deriviranjem valne funkcije pri t = const dobiva trenutna zakrivljenost žice u nekoj točki:

$$\frac{\partial^2 y_{x=\text{const},t}}{\partial x^2} = -\,k\circ A\circ\sin\,(\omega\circ t - k\circ x) = -\,k\circ y_{x=\text{const},t}$$



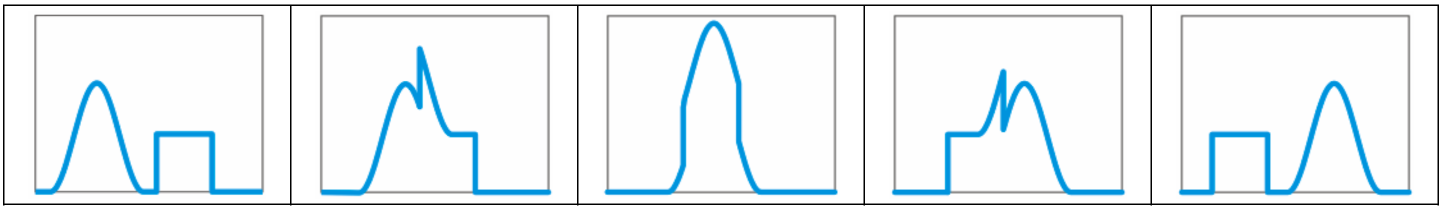
5.12 Interferencija, superpozicija valova i valni udari

Interferencija (uzajamno djelovanje) – rezultat istodobnog zajedničkog djelovanja dva ili više valnih gibanja u istom dijelu prostora.

Načelo superpozicije (zbrajanja) – rezultantna valna funkcija jednaka je algebarskom zbroju valnih funkcija komponentnih valova. Posljedica je superpozicije da jedan val može proći kroz drugi bez razaranja, čak bez promjena.

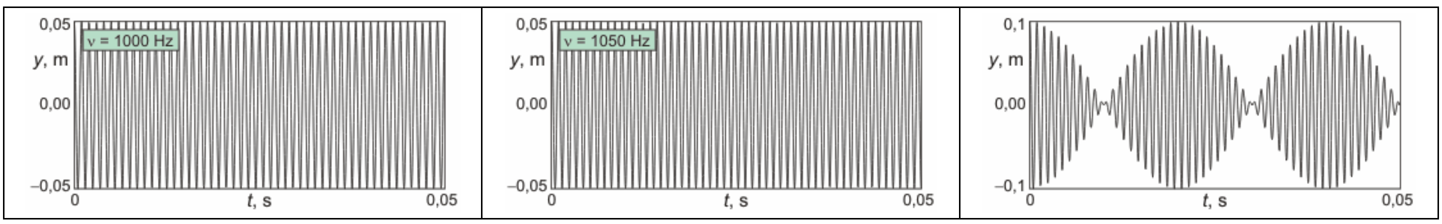
Valovi za koje vrijedi načelo superpozicije nazivaju se **linearnim valovima** i malih su amplituda, dok se valovi za koje ne vrijedi načelo superpozicije nazivaju **nelinearnim valovima** i velikih su amplituda.

Interferenciju kod koje se superponiraju valovi s istoznačnim pomacima nazivamo **konstruktivnom interferencijom**. Pomaci tijekom superponiranja valova su kod konstruktivne interferencije veći od pomaka komponentnih valova.

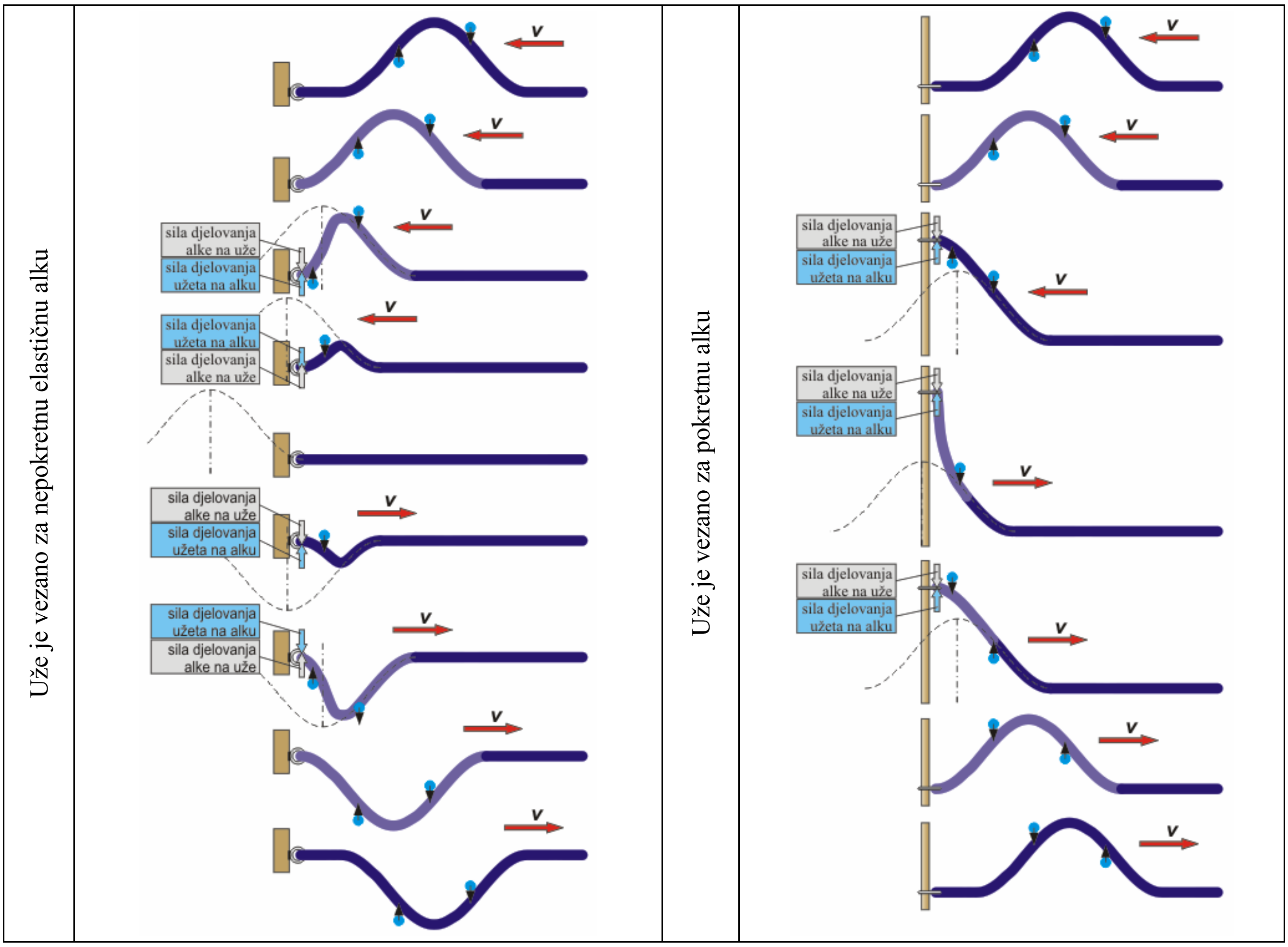


Interferenciju kod koje se superponiraju valovi s raznoznačnim pomacima nazivamo **destruktivnom interferencijom**. Pomaci tijekom superponiranja valova su kod destruktivne interferencije manji od pomaka komponentnih valova.

Pri interferenciji dva valna gibanja s malom razlikom frekvencija dolazi do pojave valnih udara: $\nu_{udara} = \nu_2 - \nu_1$.



5.13 Odbijanje transverzalnih valova

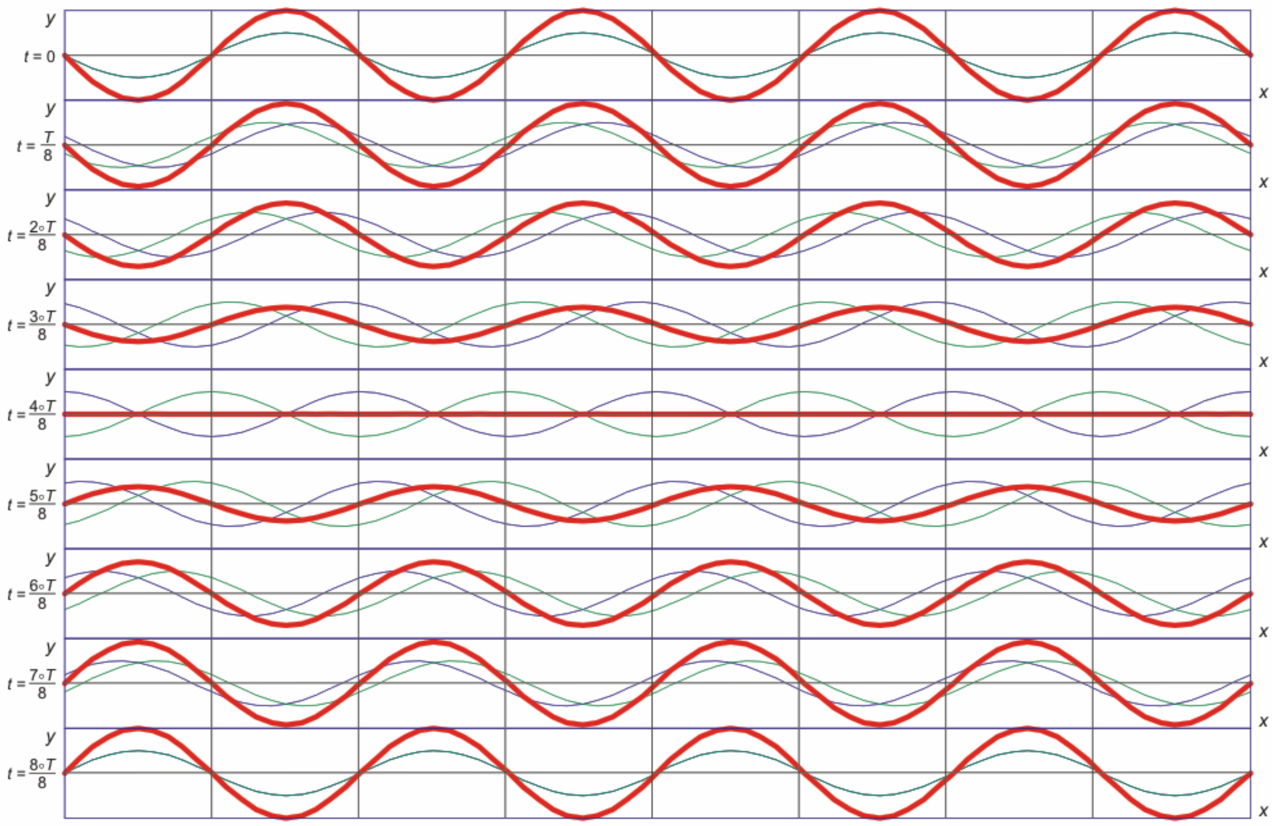


5.14 Stojni valovi

Stojni val – formira se interferencijom dvaju valova jednakih amplituda, valnih duljina, perioda (frekvencija) i faza koji se prostiru u suprotnim smjerovima.

Čvorovi stojnog vala – točke koje miruju.

Trbusi stojnog vala – točke koje titraju najvećim amplitudama.



5.15 Zvučni valovi i buka

Zvuk – longitudinalno gibanje tvari (zvuk se ne prenosi kroz vakuum) koje zamjećujemo osjetilom sluha (membrana mikrofona). Izvor zvuka je tijelo koje titra (membrana zvučnika), a zvuk se širi izmjeničnim povećavanjem i smanjivanjem tlaka (gustoće).

Čujni zvuk (ljudsko uho) – osjetom sluha se zamjećuju zvučni valovi frekvencija 16 Hz ÷ 20 kHz (100 Hz ÷ 7 kHz), a glasom se izazivaju zvučni valovi frekvencija 85 Hz ÷ 1 kHz (osnovni harmonik glasa).

Zvuk frekvencija manjih od 16 Hz naziva se **infrazvukom**, zvuk frekvencija većih od 20 kHz **ultrazvukom**, a zvuk frekvencija većih od 10 GHz **hiperzvukom**.

Brzina zvuka ovisi o elastičnosti (pokazatelj jakosti uzajamnih djelovanja čestica) i inertnosti čestica sredine kroz koju se zvuk giba:

$$v = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$$

gdje je: E – modul elastičnosti, N/m^2 ,
ρ – gustoća, kg/m^3.

sredina	v, m/s	sredina	v, m/s	sredina	v, m/s
zrak (0 °C)	331	čista voda (25 °C)	1498	željezo	≈ 5000
zrak (25 °C)	343	morska voda (25 °C)	1531	granit	≈ 6000

Zvučni tlak je tlak (Δp) uzrokovan zvukom. Promjene zvučnog tlaka kod zvuka dobivenog harmonijskim titranjem:

$$\Delta p = \Delta p_{max} \circ \sin (k \circ x - \omega \circ t)$$

gdje je: $k = \omega / v$ – kutni valni broj, rad/m ,
ω – kutna frekvencija, rad/s.

Intenzitet zvučnih valova (harmonijski):

$$I = \frac{\text{snaga}}{\text{površina}} = \frac{\text{energija}/\text{vrijeme}}{\text{površina}} = \frac{1}{2} \circ \rho \circ (\omega \circ A)^2 \circ v$$

Razina zvučnog tlaka: (prag čujnosti $\Delta p = \Delta p_0 = 20\ \mu$Pa):

$$L_p \equiv 10 \circ \log \frac{\Delta I}{\Delta I_0} = 20 \circ \log \frac{\Delta p}{\Delta p_0} \quad \text{dB (decibel)}$$

Buka – pojava neželjenog/neprijatnog zvuka. Tri su osnovne karakteristike buke:
1. jakost – razina zvučnog tlaka u dB,
2. spektrogram frekvencija – dijagram $L_P = f(\nu)$,
3. trajanje – diskontinuirana buka: t_b – trajanje buke i t_z – trajanje zatišja.

5.16 Fourierova analiza i spektrogrami frekvencija

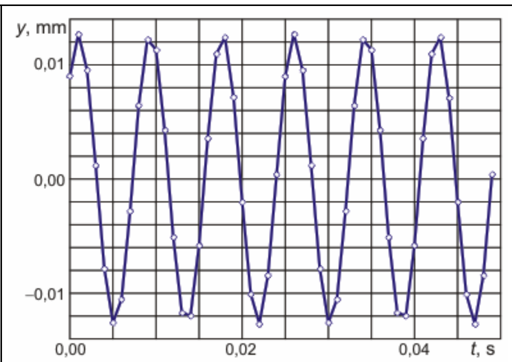
Fourierova analiza (*sinteza*) je temeljena na Fourierovom teoremu – neharmonijsko titranje može se opisati beskonačnom serijom harmonika:

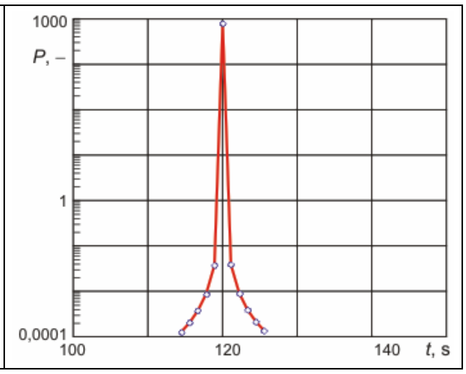
$$y_t = \Sigma(A_n \circ \sin 2\circ\pi\circ\nu_n\circ t + B_n \circ \cos 2\circ\pi\circ\nu_n\circ t) = A_0 + A_1 \circ \sin 2\circ\pi\circ\nu_1\circ t + B_1 \circ \cos 2\circ\pi\circ\nu_1\circ t + A_2 \circ \sin 2\circ\pi\circ\nu_2\circ t + B_2 \circ \cos 2\circ\pi\circ\nu_2\circ t + \dots$$

Za analizu neharmonijskih titranja se u tehnici koristi **brza Fourierova analiza** (FFT) uz podršku računala.

Brzom Fourierovom analizom se lako dobiva sažet opis različitih titranja u obliku **spektrograma frekvencija** – dijagrama s pregledom dominantnih frekvencija titranja i njihovih relativnih jakosti. Primjer je analize – ako se gibanje jednog oscilatora može opisati sa jednadžbom: $y_t = 0{,}9 \circ \sin 754 \circ t + 0{,}1 \circ \cos 754 \circ t$, te formira baza podataka vrijednosti amplituda tijekom $t = 1$ s , s korakom $\Delta t = 0{,}001$ s i na temelju baze podataka provede brza Fourierova analiza, dobiva se spektrogram frekvencija:

ν, Hz	A_i	B_i	P
120,00	0,9079	0,8920	809,9646
121,00	-0,0026	-0,0025	0,0066
119,00	0,0026	0,0025	0,0064
122,00	-0,0013	-0,0013	0,0016
118,00	0,0013	0,0013	0,0016
123,00	-0,0009	-0,0008	0,0007
117,00	0,0008	0,0008	0,0007
124,00	-0,0006	-0,0006	0,0004
116,00	0,0006	0,0006	0,0004
125,00	-0,0005	-0,0005	0,0003





Primjer je sinteze (niz pravokutnih impulsa može se aproksimirati zbrajanjem članova Fourierovog reda):