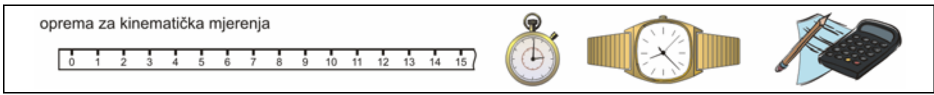
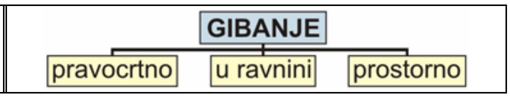
2.1 Položaj, gibanje i jednadžba gibanja tijela

Kinematika je dio mehanike koji proučava i opisuje gibanja tijela, ne obazirući se na uzroke gibanja (dinamika).

Gibanje tijela – promjena položaja tijela u prostoru tijekom vremena (oblika pojavljivanja gibanja materije). Opis može biti:
- ➪ tablični (aritmetika) ⇒ u pravilu su prikazani rezultati mjerenja s «točnim» vrijednostima u mjernim točkama,
- ➪ grafički (geometrija) ⇒ dijagram s krivuljom daje jasnu vizualnu predodžbu o prirodi gibanja i
- ➪ veličinska jednadžba (algebra) ⇒ izvedena formula koja je najpodesnija za rad uz korištenje kompjutora.

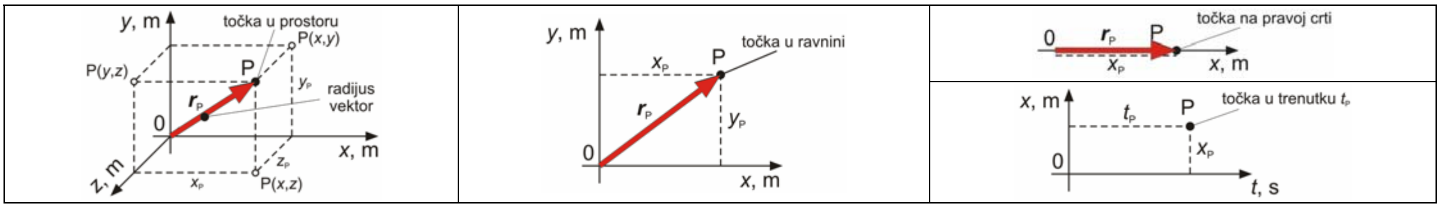
Gibanja su u praksi najčešće nepravilna i ne mogu se vjerno opisati jednostavnim veličinskim jednadžbama (vozilo SB ÷ Zg).





Materijalna točka, skraćeno **točka**, tijelo je zanemarivih dimenzija, mase m (masa je izvan okvira kinematičke, u okvirima statičke i dinamičke analize). Kada su dimenzije gibanja zanemarive u usporedbi s geometrijom položaja/gibanja, opis položaja/gibanja točke je dovoljan i za opis položaja/gibanja tijela (vlak SB ÷ Zg). Dalje se bez posebne napomene kako se giba podrazumijeva gibanje točke.

Položaji i gibanja u prostoru se najčešće analiziraju u referentnom pravokutnom koordinatnom sustavu, definiranom s ishodištem 0 i koordinatnim osima x,y,z. Kod gibanja u ravnini se koristi koordinatni sustav 0,x,y, a kod pravocrtnog gibanja 0,x (vrijeme t ?).



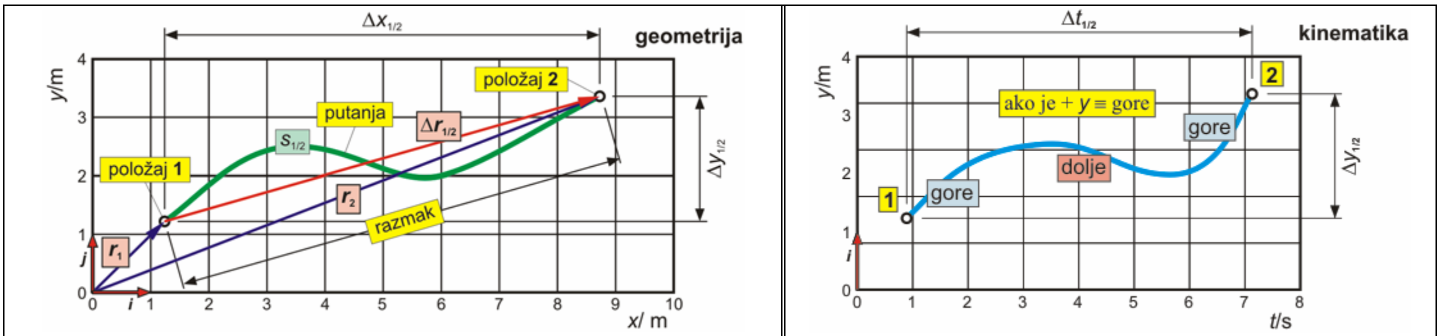
Dijagrami u koordinatnim sustavima 0,x,y,z; 0,x,y; 0,x su geometrijskog karaktera (autokarta SB ÷ Zg), dok su dijagrami u koordinatnim sustavima 0,x,t; 0,y,t i 0,z,t kinematičkog karaktera (0,x,y,z,t ?).

Položaj točke (P) – određen je vektorom položaja $\boldsymbol{r}_P$ (radijus vektorom), koji spaja ishodište i točku P, ili s odgovarajućim brojem komponentnih vektora. **Jednadžba gibanja** – matematički opis gibanja (promjene položaja u prostoru ⇒ brzine i ubrzanja), u vektorskom obliku: $\boldsymbol{r} = \mathrm{f}(t)$ (što se može opisati tim oblikom, bez razlaganja na ravnine ?) ili s odgovarajućim brojem skalarnih jednadžbi.

	u prostoru	u ravnini	na pravoj crti
položaj točke	x, y, z	x, y	x
jednadžba gibanja	$x = \mathrm{f}_1(t)$, $y = \mathrm{f}_2(t)$, $z = \mathrm{f}_3(t)$	$x = \mathrm{f}_1(t)$, $y = \mathrm{f}_2(t)$	$x = \mathrm{f}_1(t)$

2.2 Putanja, razmak i put

Putanja ili staza (slika ili crtež) – niz svih položaja kroz koje prođe točka (tijelo) između dva položaja. (putanja SB ÷ Os)



$\mathrm{f}(x,y) = 0$ ili $y = \mathrm{f}(x)$

$y = \mathrm{f}(t) \;\Rightarrow\; \mathrm{f}(x,y) = 0 \;\Rightarrow\; x = \mathrm{f}(t)$

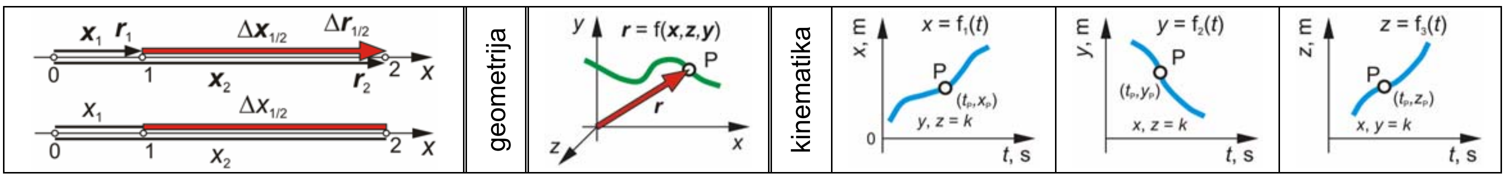
Razmak ($\Delta\boldsymbol{r}_{1/2}$ ili $\Delta x_{1/2}$, $\Delta y_{1/2}$, $\Delta z_{1/2}$) – vektorska veličina kojom se opisuje najkraća moguća putanja (prava crta) između dva položaja (1 i 2). Simbolom $\Delta\boldsymbol{r}_{1/2}$ se označava razlika konačnog (položaj 2) i početnog (položaj 1) vektora položaja: $\Delta\boldsymbol{r}_{1/2} = \boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1$ (vektori).

Put ($s_{1/2}$, m) – skalarna duljina putanje. Ne smije se miješati s razmakom koji je između dva položaja jedinstvene vrijednosti, dok to put nije (put i razmak SB ÷ Os) Ako putanja nije pravocrtna ili kružna, u pravilu se put s teško izračunava i mora se izmjeriti. (kilometar-sat)

Prijeđeni razmak između dva položaja naziva se **pomakom** (razmak/pomak SB ÷ Os).

Opis gibanja (matematika i/ili statistika) je vjerniji što je vremenski interval ($\Delta t_{1/2}$) određivanja (mjerenja) kraći.

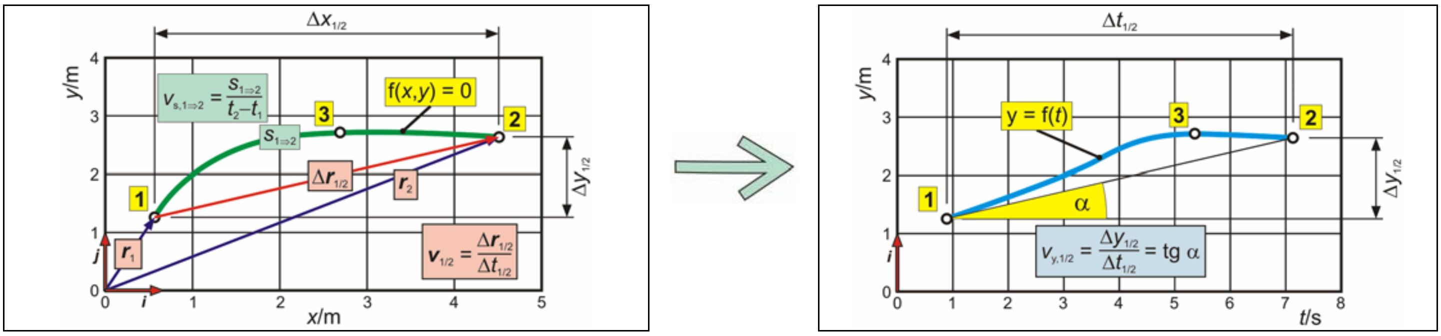
Kod pravocrtnog gibanja su za opis gibanja dovoljne komponente na pravcu gibanja – skalarne veličine (osi: x ili y ili z).



Opis krivocrtnoga gibanja u ravnini je bitno složeniji od opisa pravocrtnoga zbog uključivanja drugoga stupnja slobode gibanja – prelazi se na opis s vektorskim veličinama (izračunavanja sa skalarnim veličinama – po dvije komponente). Opis krivocrtnoga gibanja u prostoru nije bitno složeniji od opisa krivocrtnoga gibanja u ravnini (problem je grafički prikaz putanje u tri dimenzije) – uključuje se treći stupanj slobode gibanja u opis s vektorskim veličinama (izračunavanja sa skalarnim veličinama – po tri komponente).

2.3 Brzina

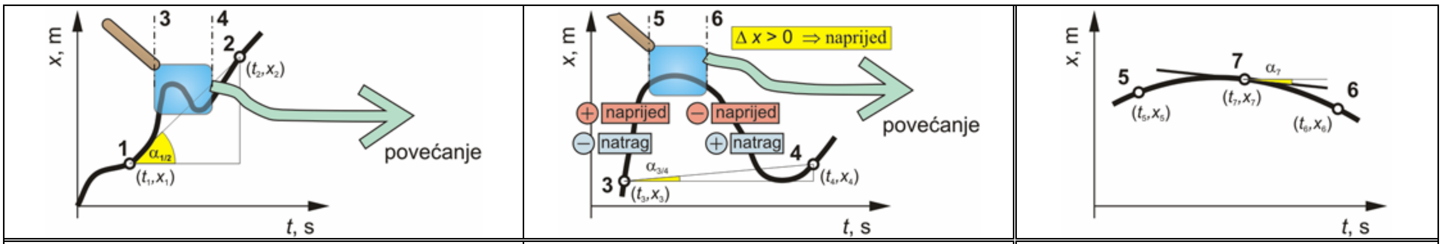
Skalarna **putna brzina**, v_s (speed) – put u jediničnome vremenu:	$v_s \equiv \frac{s}{t} \;\Rightarrow\; [v_s] = \frac{[s]}{[t]} = \mathrm{m} \circ \mathrm{s}^{-1}$	Vektorska **brzina pomaka**, $\boldsymbol{v}$ (velocity) – pomak u jediničnome vremenu:	$\boldsymbol{v} \equiv \frac{\Delta \boldsymbol{r}}{\Delta t}$



Putna brzina $v_{s,1\Rightarrow 2} = \frac{s_{1\Rightarrow 2}}{t_2 - t_1}$	**Brzina pomaka**: srednja, trenutačna	$\boldsymbol{v}_{1/2} = \Delta \boldsymbol{r}_{1/2} / \Delta t_{1/2}$ $\boldsymbol{v}_3 = \mathrm{d}\boldsymbol{r}_3 / \mathrm{d}t_3$

v_s	m/s	km/h
pješak	1,0	3,6
zvuk	340	1200
svjetlost	299792458 (točno)	$\approx 1 \circ 10^9$

Samo je za pravocrtno gibanje: $v_{s,1\Rightarrow 2} = |\boldsymbol{v}_{1/2}|$.

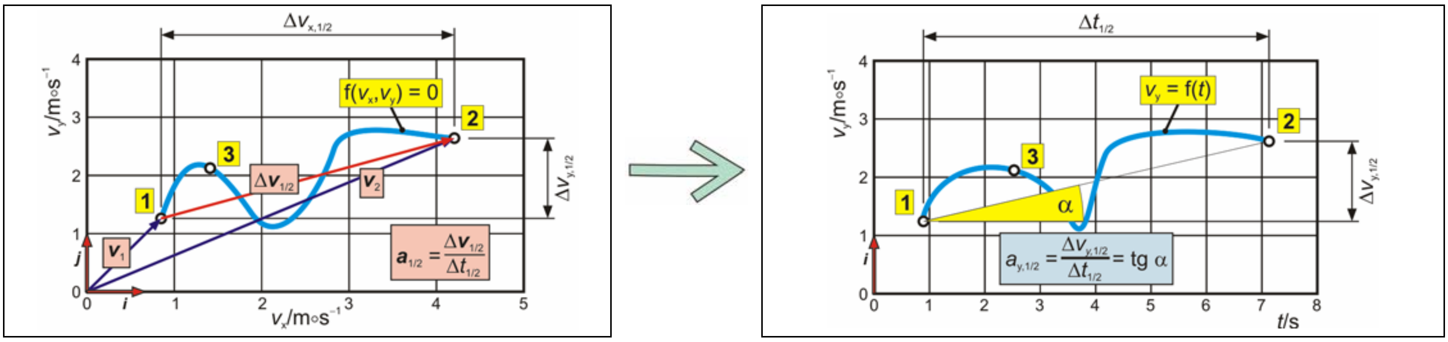


$$v_{x,1/2} = \frac{\Delta x_{1/2}}{\Delta t_{1/2}} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = \tan \alpha_{1/2} \qquad v_{x,3/4} = \frac{\Delta x_{3/4}}{\Delta t_{3/4}} = \frac{x_4 - x_3}{t_4 - t_3} = \tan \alpha_{3/4} \qquad v_{x,7} = \frac{\mathrm{d}x_7}{\mathrm{d}t_7} = \tan \alpha_7$$

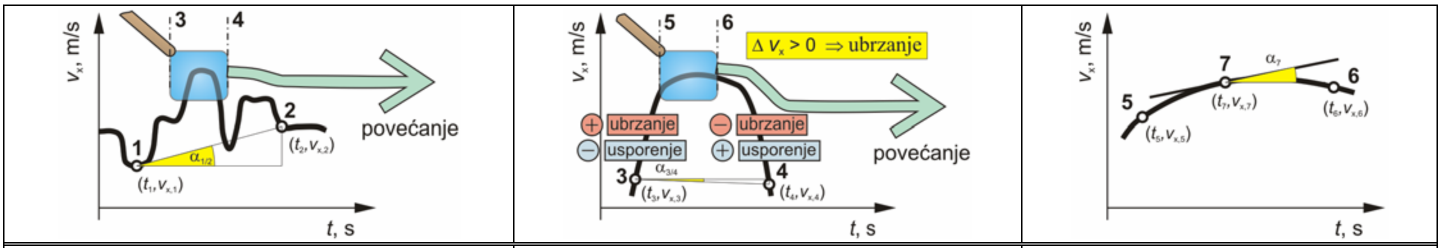
2.4 Ubrzanje (akceleracija)

Ubrzanje ($\boldsymbol{a}$) – vektorska veličina kojom se opisuje promjena brzine u jediničnom vremenu (ubrzanje/usporenje – akceleracija/deceleracija).

UBRZANJE: srednje, trenutačno	**Srednje ubrzanje**: $\boldsymbol{a}_{1/2} \equiv \frac{\Delta \boldsymbol{v}_{1/2}}{\Delta t_{1/2}} = \frac{\boldsymbol{v}_2 - \boldsymbol{v}_1}{t_2 - t_1}$ (između točaka **1** i **2**)
$[\lvert\boldsymbol{a}\rvert] = \frac{[\lvert\boldsymbol{v}\rvert]}{[t]} = \frac{\mathrm{m}\circ\mathrm{s}^{-1}}{\mathrm{s}} = \mathrm{m}\circ\mathrm{s}^{-2}$	**Trenutačno ubrzanje**: $\boldsymbol{a}_3 \equiv \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \boldsymbol{v}}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}$ (u točki **3**)



Sa smanjivanjem vremenskog intervala raste kvaliteta opisa gibanja, ali raste i broj podataka (beskonačno mali – beskonačno velik).

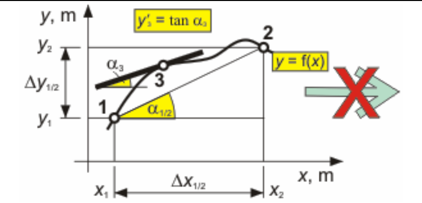
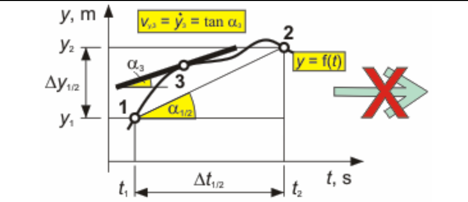
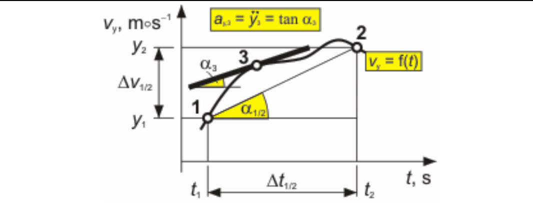


$$a_{x,1/2} = \frac{\Delta v_{x,1/2}}{\Delta t_{1/2}} = \frac{v_{x,2} - v_{x,1}}{t_2 - t_1} = \tan \alpha_{1/2} \qquad a_{x,3/4} = \frac{\Delta v_{x,3/4}}{\Delta t_{3/4}} = \frac{v_{x,4} - v_{x,3}}{t_4 - t_3} = \tan \alpha_{3/4} \qquad a_{x,7} = \frac{\mathrm{d}v_{x,7}}{\mathrm{d}t_7} = \tan \alpha_7$$

2.5 Diferencijalni račun

Diferencijalni račun – dio infinitezimalnoga računa (s beskonačno malim vrijednostima veličina) koji se u fizici koristi za opisivanje stanja i promjena fizičkih veličina. (poznata ovisnost $x = f_1(t)$ i $y = f_2(t)$ + diferenciranje $\Rightarrow v_x = f_3(t)$ i $v_y = f_4(t)$)

Derivacija skalarne veličine (npr. funkcija $y = f(x)$):

Geometrija (derivacija po duljini)	**Kinematika** (derivacije po vremenu)	
		
$y' = f'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{dy}{dx}$	$v_y = f'(t) = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta t} = \dfrac{dy}{dt} = y'(t) = \dot{y}$	$a_y = f''(t) = \dfrac{dv_y}{dt} = \dfrac{d}{dt}\dfrac{dy}{dt} = \dfrac{d^2y}{dt^2} = y''(t) = \ddot{y}$

Derivacije često sretanih elementarnih funkcija i osnovna pravila deriviranja:

$y =$	C (konstanta)	x^n	$\sin x$	$\cos x$	a^x	e^x	$\ln x$
$y' =$	0	$n \circ x^{n-1}$	$\cos x$	$-\sin x$	$a^x \circ \ln a$	e^x	$1/x$

1.	$y = u \pm v$	$\Rightarrow$	$y' = u' \pm v'$	2.	$y = u \circ v$	$\Rightarrow$	$y' = u' \circ v + v \circ u'$
3.	$y = \dfrac{u}{v}$	$\Rightarrow$	$y' = \dfrac{v \circ u' - u \circ v'}{v^2}$	4.	$y = f[v(x)]$	$\Rightarrow$	$y' = \dfrac{dy}{dv} \circ \dfrac{dv}{dx}$

Primjer P-2.1: $y = \tan x$	$y = \tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x} \quad \Rightarrow \quad y' = \dfrac{\cos x \circ \cos x + \sin x \circ \sin x}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$

Derivacija vektorske veličine: (npr. funkcija $\boldsymbol{a} = f(\boldsymbol{v}, t)$)

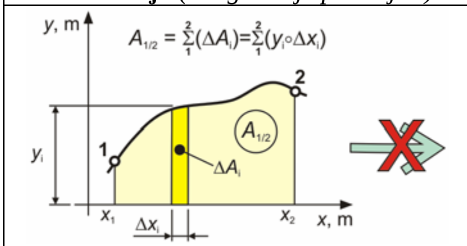
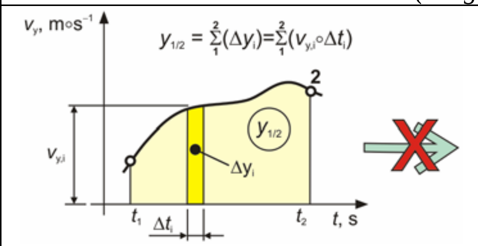
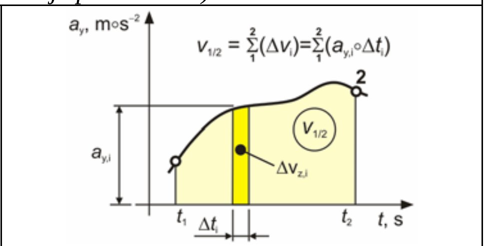
$$\boldsymbol{v} = v_x \circ \boldsymbol{i} + v_y \circ \boldsymbol{j} + v_z \circ \boldsymbol{k} \qquad \frac{d\boldsymbol{i}}{dt} = \frac{d\boldsymbol{j}}{dt} = \frac{d\boldsymbol{k}}{dt} = 0 \qquad \text{(derivacija konstanti)}$$

$$\boldsymbol{a} = \frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \frac{dv_x}{dt} \circ i + \frac{dv_y}{dt} \circ j + \frac{dv_x}{dt} \circ k = \frac{d^2x}{dt^2} \circ i + \frac{d^2y}{dt^2} \circ j + \frac{d^2z}{dt^2} \circ k = \ddot{x} \circ \boldsymbol{i} + \ddot{y} \circ \boldsymbol{j} + \ddot{z} \circ \boldsymbol{k}$$

2.6 Integralni račun

Integralni račun – dio infinitezimalnog računa koji se u fizici često koristi za opisivanje stanja i promjena fizičkih veličina. (poznata ovisnost $v_x = f_1(t)$ i $v_y = f_2(t)$ + integraljenje $\Rightarrow x = f_3(t)$ i $y = f_4(t)$). **Integriranje** – matematička operacija suprotna deriviranju.

$f(x) = \int f'(x) \circ dx$	INTEGRALI: neodređeni / određeni	$\int_a^b f(x) \circ dx = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \sum_a^b [f(x_i) \circ \Delta x]$

Geometrija *(integriranje po duljini)*	**Kinematika** *(integriranje po vremenu)*	
		
$\int_1^2 y \circ dx = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \left[\sum_1^2 (y_i \circ \Delta x_i)\right] = A_{1/2}$	$\int_1^2 v \circ dt = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \left[\sum_1^2 (v_i \circ \Delta t_i)\right] = y_{1/2}$	$\int_1^2 a \circ dt = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \left[\sum_1^2 (a_i \circ \Delta t_i)\right] = v_{1/2}$

Neodređeni integrali: $f_1(x) = \dfrac{dy}{dx} \qquad dy = f_1(x) \circ dx \qquad \int dy = y = \int f_1(x) \circ dx = f_2(x) + C \qquad y = f_2(x) + C$

$$f_1(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{d[f_2(x) + C]}{dx} = \frac{df_2(x)}{dx} + \frac{dC}{dx} = \frac{df_2(x)}{dx} \qquad \frac{dC}{dx} = 0$$

Određeni integrali: $\int_a^b f_1(x) \circ dx = |f_2(x)|_a^b = f_2(b) + C - (f_2(a) + C) = f_2(b) - f_2(a)$ (ne sadrži konstantu C)

Integrali često korištenih elementarnih funkcija:

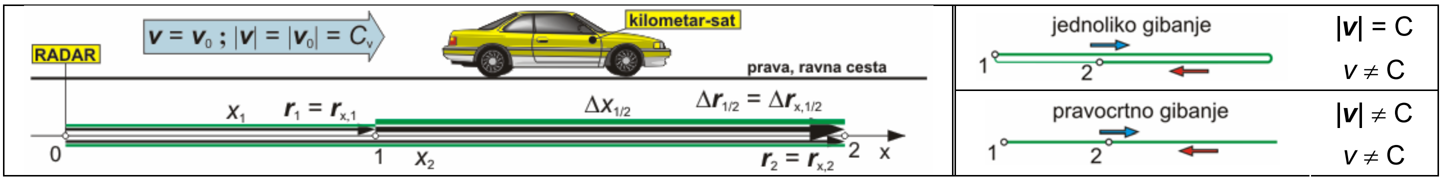
$f_1(x) =$	1	x^n	$\sin x$	$\cos x$	a^x, za $0 < a \neq 1$	$1/x$	e^x
$\int f_1(x) =$	x	$x^{n+1}/(n+1)$	$-\cos x$	$\sin x$	$a^x/\ln a$	$\ln x$	e^x

Primjer P-2.2: $y' = 12 \circ x^2$	$y = 4 \circ x^3 + C$ (C se određuju iz uvjeta definiranih u konkretnim problemima)

Osnovna pravila integriranja: $\int k \circ f_1(x) \circ dx = k \circ \int f_1(x) \circ dx \qquad \int [u(x) + v(x)] \circ dx = \int u(x) \circ dx + \int v(x) \circ dx$

2.7 Jednoliko pravocrtno gibanje

Jednoliko pravocrtno gibanje – putanja je pravocrtna (pravocrtno gibanje), a brzina gibanja konstantna (jednoliko gibanje), pa se u jednakim vremenskim intervalima duž pravca prelaze jednaki putovi.



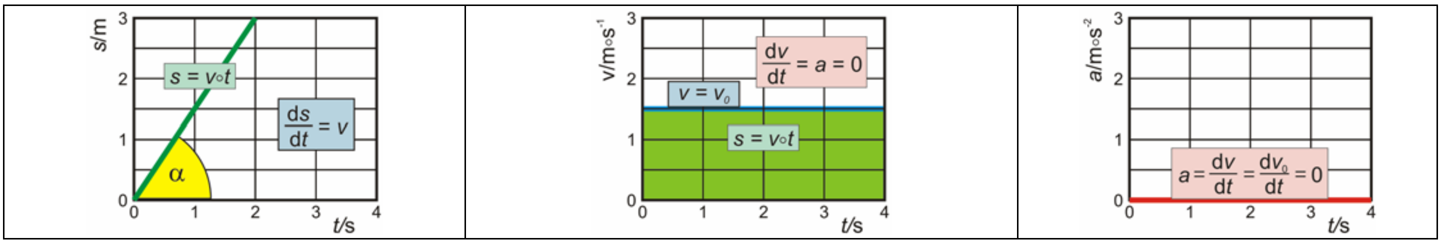
Jednoliko pravocrtno gibanje rijetko se susreće u prirodi i tehnici. Gibanje se opisuje skalarnim veličinama (komponente) – pravci svih relevantnih vektora (položaji, razmaci, brzine, ubrzanja) se poklapaju s pravcem putanje: $x_1 = r_{x,1} = |\Delta \boldsymbol{r}_{x,1}|\circ\cos\alpha$; $\Delta x_{1/2} = r_{x,1/2} = |\Delta \boldsymbol{r}_{x,1/2}|\circ\cos\alpha$; $v_1 = v_{x,1} = |\boldsymbol{v}_{x,1}|\circ\cos\alpha$; $\Delta v_{1/2} = \Delta v_{x,1/2} = |\Delta \boldsymbol{v}_{x,1/2}|\circ\cos\alpha = 0$; $a_1 = a_{x,1} = |\boldsymbol{a}_{x,1}|\circ\cos\alpha = 0$.

Svojstva su jednolikoga pravocrtnog gibanja: (kada nisu moguće zabune koriste se jednostavne oznake. s, v, a)

(a) prijeđeni put jednak je intenzitetu pomaka: $s = s_{1\Rightarrow2} = |\Delta \boldsymbol{x}_{1/2}| \neq C_s$ (mijenja se tijekom vremena), $s > 0$ (uvijek),

(b) putna brzina je jednaka intenzitetu brzine pomaka (trenutne/srednje): $v = v_{s,1} = v_{s,1\Rightarrow2} = |\boldsymbol{v}_1| = |\boldsymbol{v}_{1/2}| = \Delta s/\Delta t = ds/dt = C_v$,

(c) trenutačno i srednje ubrzanje su jednaki nuli: $a = a_1 = a_{1/2} = |\boldsymbol{a}_1| = |\boldsymbol{a}_{1/2}| = \Delta v/\Delta t = dv/dt = C_a = 0$.



$$s = \int ds = \int v\circ dt = v\circ\int dt = v\circ t + C_s = v\circ t + s_0$$ (pri $t = 0$: $v\circ t = 0 \Rightarrow C_s = s_{t=0} = s_0$) (ploština na dijagramu $v = f(t)$)

$$v = \int dv = \int a\circ dt = a\circ\int dt = a\circ t + C_v = v_0$$ (pri $t = 0$: $a\circ t = 0$: $C_v = v_{t=0} = v_0$) (ploština na dijagramu $a = f(t)$ $a = 0$)

$$a = dv/dt = dC_v/dt = 0$$

2.8 Pravocrtno gibanje – primjeri

Primjer P-2.3: Za koje bi vrijeme tane brzine 800 m/s prešlo put od Zemlje do Mjeseca?

$v = 800$ m/s $\underline{s = 3{,}824\circ10^5 \text{ km}}$ $t = ?$	put = razmak, $v = C_v$ ⇒ jednoliko pravocrtno gibanje $s = v\circ t + s_0$, $s_0 = 0$ ⇒ $s = v\circ t$ Iz literature, razmak Zemlje i Mjeseca je $3{,}824\circ10^5$ km

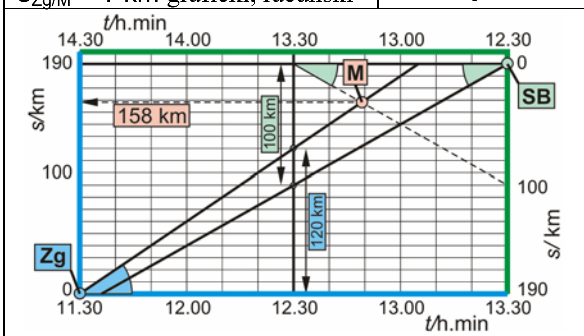
$$t = \frac{s}{v} = \frac{3{,}824\circ10^5\circ\text{km}}{800\circ\text{m}\circ\text{s}^{-1}} = \frac{3{,}824\circ10^5\circ1000\circ\text{m}}{800\circ\text{m}}\circ\text{s} = \frac{3{,}824\circ10^6}{8}\circ\text{s} = 0{,}478\circ10^6\circ\text{s} = 0{,}478\circ10^6\circ\frac{\text{h}}{3600}$$

$$t = \frac{0{,}478}{3{,}6}\circ10^3\circ\text{h} = 0{,}1328\circ10^3\circ\text{h} = 0{,}1328\circ10^3\circ\frac{\text{d}}{24} = \frac{132{,}8}{24}\circ\text{d} = 5{,}53\circ\text{d} = 5\circ\text{d} + 0{,}53\circ24\circ\text{h} = 5\text{ d} + 12{,}7\circ\text{h}$$

$t = 5$ d 12 h + 0,7◦60◦min = 5 d 12 h 42◦min = <u>5 dana 12 sati 40 minuta</u> (diskusija rezultata – konstantna brzina)

Primjer P-2.4: Ekspresni vlak (v = 120 km/h) Zagreb – Slavonski Brod (Zg ÷ SB = 190 km) polazi iz Zagreba u 11 h i 30 min. Brzi vlak (v = 100 km/h) iz SB-a za Zg polazi u 12 h i 30 min. Odrediti mjesto susreta vlakova grafički i računski.

$v_{s,e} = 120$ km/h $v_{s,b} = 100$ km/h $s_{Zg/SB} = 190$ km $t_{Zg} = 11.30$ h.m $\underline{t_{SB} = 12.30 \text{ h.m}}$ $s_{Zg/M}$ = ? km grafički, računski	put = razmak, $v = C_v$ ⇒ jednoliko pravocrtno gibanje; $v_{s,1\Rightarrow2} = s_{1\Rightarrow2}/(t_2 - t_1)$ $s_{Zg/SB} = s_{Zg/M} + s_{SB/M}$ $t_{Zg/M} = t_M - t_{Zg}$ $t_{SB/M} = t_M - t_{SB}$ $t_M = t_{Zg/M} + t_{Zg} = t_{SB/M} + t_{SB}$ $t_{Zg/M} = t_{SB/M} + t_{SB} - t_{Zg}$ $t_{SB} - t_{Zg} = 12.30 - 11.30 = 1$ h $v_{s,e}/v_{s,b} = 120/100 = 1{,}2$



Oprez, preklopljena su dva dijagrama: Zg i SB

$$\frac{s_{Zg/M}}{v_{s,e}} = \frac{s_{SB/M}}{v_{s,b}} + t_{SB} - t_{Zg} \Rightarrow s_{Zg/M} = \frac{v_{s,e}}{v_{s,b}}\circ s_{SB/M} + v_{s,e}\circ(t_{SB} - t_{Zg})$$

$$s_{Zg/M} = 1{,}2\circ s_{SB/M} + 120\circ1 = 1{,}2\circ(s_{Zg/SB} - s_{Zg/M}) + 120$$

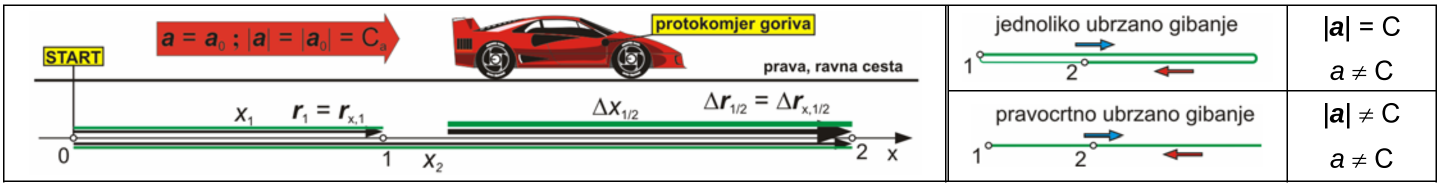
$$s_{Zg/M} = 1{,}2\circ s_{Zg/SB} - 1{,}2\circ s_{Zg/M} + 120$$

$$s_{Zg/M} + 1{,}2\circ s_{Zg/M} = 1{,}2\circ190 + 120 = 348 \Rightarrow 2{,}2\circ s_{Zg/M} = 348$$

$s_{Zg/M} = \dfrac{348}{2{,}2} = 158{,}18$ km = <u>158 km</u> (diskusija– korištenje oznaka)

2.9 Jednoliko ubrzano pravocrtno gibanje

Jednoliko ubrzano pravocrtno gibanje – putanja je pravocrtna, a ubrzanje gibanja konstantno (jednoliko ubrzano gibanje).



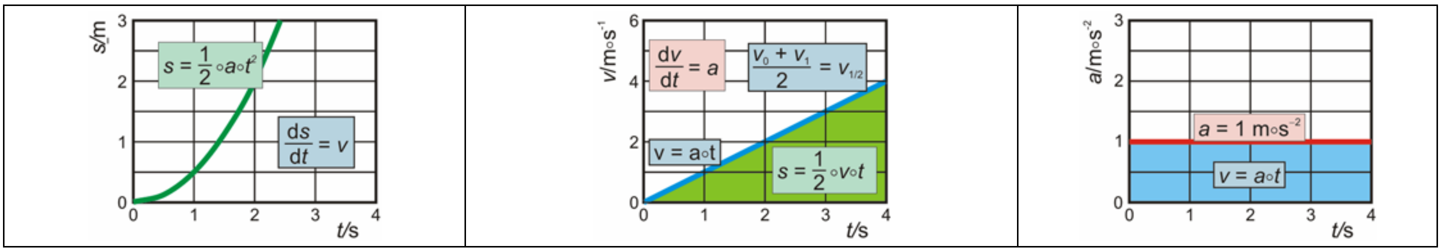
Gibanje je pravocrtno i opisuje se skalarnim komponentama (oprezno s predznacima!). Često se sreće u prirodi i tehnici.

Svojstva su jednolikog ubrzanog pravocrtnog gibanja:

(a) prijeđeni put jednak je intenzitetu pomaka: $s = s_{1\Rightarrow 2} = |\Delta \mathbf{r}_{1/2}| \neq C_s$ (mijenja se tijekom vremena), $s > 0$ (uvijek),

(b) putna brzina je jednaka intenzitetu brzine pomaka (trenutne/srednje): $v = v_{s,1} = v_{s,1\Rightarrow 2} = |\mathbf{v}_1| = |\mathbf{v}_{1/2}| = \Delta s/\Delta t = ds/dt \neq C_v$,

(c) trenutačno i srednje ubrzanje: $a = a_1 = a_{1/2} = |\mathbf{a}_1| = |\mathbf{a}_{1/2}| = \Delta v/\Delta t = dv/dt = C_a \neq 0$.



$$v = \int dv = \int a\circ dt = a\circ\int dt = a\circ t + C_v = a\circ t + v_0 \quad \text{(pri } t = 0\text{: } a\circ t = 0 \ \Rightarrow\ C_v = v_{t=0} = v_0) \quad \text{(ploština na dijagramu } a = f(t))$$

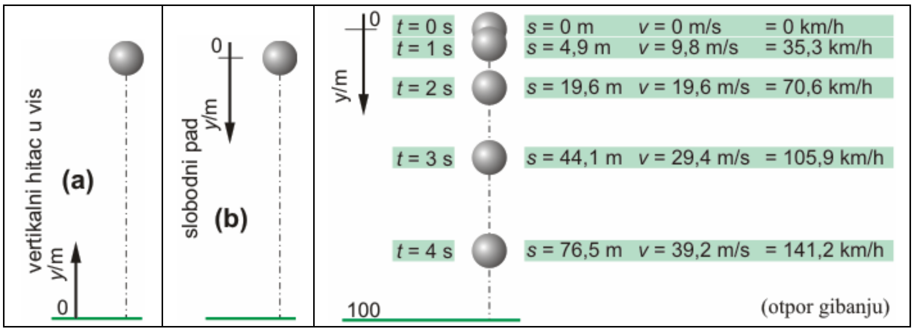
$$s = \int ds = \int v(t)\circ dt = \int (a\circ t + v_0)\circ dt = \int a\circ t\circ dt + \int v_0\circ dt = ½\circ a\circ t^2 + v_0\circ t + C_s = ½\circ a\circ t^2 + v_0\circ t + s_0$$

$$\text{(pri } t = 0\text{: } ½\circ a\circ t^2 + v_0\circ t = 0 \ \Rightarrow\ C_s = s_{t=0} = s_0) \quad \text{(ploština na dijagramu } v = f(t))$$

1. Ako je pri $t = 0$: $v_0 = 0$ (neovisno je li pri $t = 0$ i $s_0 = 0$): $v = a\circ t$
2. Ako je pri $t = 0$: $v_0 = 0$ i $s_0 = 0$: $s = ½\circ a\circ t^2$ $\quad s = ½\circ a\circ t^2 = ½\circ v\circ t^{-1}\circ t^2 = ½\circ v\circ t$

2.10 Vertikalni hitac i slobodni pad

Tijelo se pri slobodnom padu giba pravocrtno jednoliko ubrzano. Ubrzanje zemljine teže ($g \approx 9{,}8$ m/s^2 ~ 10 m/s^2) ovisi o aktualnom položaju (za [g] = m/s^2 , {g} = Zagreb: 9,807, Reykjavik: 9,823, Kinshasa: 9,779, polovi: 9,83, ekvator: 9,78 m).



- brzina tijela neovisna o njegovoj masi ?
- prvi Newtonov zakon: $a = F/m$
- *za procjene:* 10 m/s^2
- otpor zraka raste s porastom brzine gibanja
- padobranac, s velike visine (iz literature):

(I) zatvoren padobran:
v ~ 54 m/s (~ 194 km/h)

(II) otvoren padobran:
v ~ 6,3 m/s (~23 km/h).

(a) $a = -g$ m∘s^{-2} $\quad t_0 = 0$ (start) $\quad v_0 = 0$ (start iz mirovanja) $\quad s_0 = H$ (start s visine H)

$$a = dv/dt \quad v = ds/dt \quad dv = a\circ dt \quad ds = v\circ dt \quad \int dv = \int a\circ dt \quad \int ds = \int v\circ dt \quad v = \int a\circ dt \quad s = \int v\circ dt$$

$$v = \int -g\circ dt = -g\circ\int dt = -g\circ t + C_v \quad t_0 = 0\text{:} \quad v_0 = 0 \quad -g\circ t = 0 \quad C_v = 0 \quad v = -g\circ t$$

$$s = \int v\circ dt = \int -g\circ t\circ dt = -g\circ\int t\circ dt = -g\circ(½\circ t^2 + C_s) = -½\circ g\circ t^2 - g\circ C_s \quad t_0 = 0\text{:} \quad s_0 = H \quad H = 0 - g\circ C_s \quad C_s = H/-g$$

$$s = -½\circ g\circ t^2 - g\circ C_s = -½\circ g\circ t^2 - g\circ(H/-g) = -½\circ g\circ t^2 + H = H - ½\circ g\circ t^2$$

(b) $a = g$ m∘s^{-2} $\quad t_0 = 0$ (start) $\quad v_0 = 0$ (start iz mirovanja) $\quad s_0 = 0$ (start s kote 0)

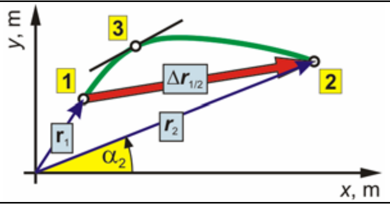
$$v = g\circ t + C_v \quad t_0 = 0\text{:} \quad v_0 = 0 \quad g\circ t = 0 \quad C_v = 0 \quad v = g\circ t$$

$$s = ½\circ g\circ t^2 + g\circ C_s \quad t_0 = 0\text{:} \quad s_0 = 0 \quad 0 = 0 - g\circ C_s \quad C_s = 0 \quad s = ½\circ g\circ t^2$$

Primjer P-2.5: Kojom će brzinom udariti o tlo kugla nakon slobodnog pada s visine od 100 m?

$h = 100$ m n = ? m/s, km/h	$g = 9{,}8$ m/s^2 $s = ½\circ g\circ t^2$ $\quad v = g\circ t$ $\quad s = ½\circ g\circ(v^2/g^2) = ½\circ v^2/g$
$v = \sqrt{2\circ s\circ g} = \sqrt{2\circ 100\circ m\circ 9{,}8\circ m\circ s^{-2}} = \sqrt{1960\circ m^2\circ s^{-2}} = 44{,}27\circ m\circ s^{-1}$ = 45 m/s $= 45\circ 1000^{-3}\circ km\circ 3600\circ s^{-1}$ $v = 45\circ 3{,}6 = 162$ = 160 km/h (pomoć pri pamćenju: „veća je jedinica veća od manje“ – množenje manje s 3,6)	

2.11 Gibanje u ravnini



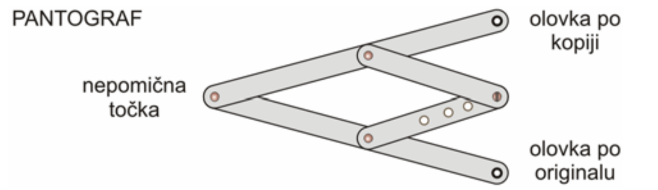
s = ?
v = ?
a = ?

Opis s vektorskim veličinama: **(**kratki teorijski opis – matematika**)**

$$\Delta \boldsymbol{r}_{1/2} = \boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1 \neq |\boldsymbol{r}_2| - |\boldsymbol{r}_1|$$

$$\boldsymbol{v}_{1/2} = \frac{\Delta \boldsymbol{r}_{1/2}}{\Delta t_{1/2}} = \boldsymbol{v}_2 - \boldsymbol{v}_1 \neq |\boldsymbol{v}_2| - |\boldsymbol{v}_1| \qquad \boldsymbol{v}_3 = \frac{d\boldsymbol{r}_3}{dt_3}$$

$$\boldsymbol{a}_{1/2} = \frac{\Delta \boldsymbol{v}_{1/2}}{\Delta t_{1/2}} = \boldsymbol{a}_2 - \boldsymbol{a}_1 \neq |\boldsymbol{a}_2| - |\boldsymbol{a}_1| \qquad \boldsymbol{a}_3 = \frac{d\boldsymbol{v}_3}{dt_3}$$



Opis s jediničnim vektorima: **(**detaljniji teorijski opis – fizika**)**

$$\boldsymbol{r}_1 = r_{1,x}\circ\boldsymbol{i} + r_{1,y}\circ\boldsymbol{j} \qquad \boldsymbol{r}_2 = r_{2,x}\circ\boldsymbol{i} + r_{2,y}\circ\boldsymbol{j} \qquad \Delta\boldsymbol{r}_{1/2} = \boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1 = (r_{2,x}\circ\boldsymbol{i} + r_{2,y}\circ\boldsymbol{j}) - (r_{1,x}\circ\boldsymbol{i} + r_{1,y}\circ\boldsymbol{j}) = (r_{2,x} - r_{1,x})\circ\boldsymbol{i} + (r_{2,y} - r_{1,y})\circ\boldsymbol{j}$$

$$\Delta\boldsymbol{v}_{1/2} = \boldsymbol{v}_2 - \boldsymbol{v}_1 = (v_{x,2}\circ\boldsymbol{i} + v_{y,2}\circ\boldsymbol{j}) - (v_{x,1}\circ\boldsymbol{i} + v_{y,1}\circ\boldsymbol{j}) = (v_{x,2} - v_{x,1})\circ\boldsymbol{i} + (v_{y,2} - v_{y,1})\circ\boldsymbol{j} \qquad \boldsymbol{v} = v_x\circ\boldsymbol{i} + v_y\circ\boldsymbol{j} = \frac{dx}{dt}\circ\boldsymbol{i} + \frac{dy}{dt}\circ\boldsymbol{j}$$

$$\Delta\boldsymbol{a}_{1/2} = \boldsymbol{a}_2 - \boldsymbol{a}_1 = (a_{x,2} - a_{x,1})\circ\boldsymbol{i} + (a_{y,2} - a_{y,1})\circ\boldsymbol{j} \qquad \boldsymbol{a} = a_x\circ\boldsymbol{i} + a_y\circ\boldsymbol{j} = \frac{dv_x}{dt}\circ\boldsymbol{i} + \frac{dv_y}{dt}\circ\boldsymbol{j} = \frac{d^2x}{dt^2}\circ\boldsymbol{i} + \frac{d^2y}{dt^2}\circ\boldsymbol{j}$$

Opis s komponentama: **(**izračunavanja u strojarstvu – predznak je „uključen“ u vrijednosti sin α, cos α**)**

$$x_1 = r_{1,x} = |\boldsymbol{r}_1|\circ\cos\alpha_1 \qquad y_1 = r_{1,y} = |\boldsymbol{r}_1|\circ\sin\alpha_1 \qquad x_2 = r_{2,x} = |\boldsymbol{r}_2|\circ\cos\alpha_2 \qquad y_2 = r_{2,y} = |\boldsymbol{r}_2|\circ\sin\alpha_2$$

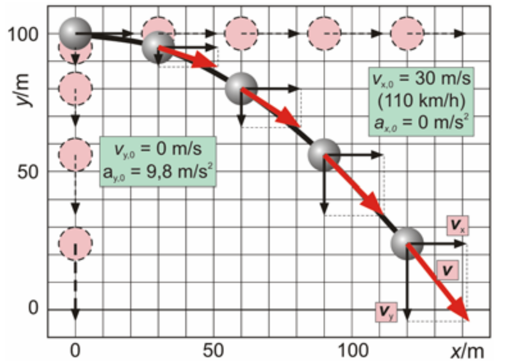
$$\frac{dx}{dt} = v_x = \frac{dr_x}{dt} = -|\boldsymbol{r}|\circ\sin\alpha \qquad \frac{dy}{dt} = v_y = \frac{dr_y}{dt} = |\boldsymbol{r}|\circ\cos\alpha \qquad |\boldsymbol{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} \qquad \cos\beta = \frac{v_x}{v}$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = a_x = \frac{dv_x}{dt} = -|\boldsymbol{r}|\circ\cos\alpha \qquad \frac{d^2y}{dt^2} = a_y = \frac{dv_y}{dt} = -|\boldsymbol{r}|\circ\sin\alpha \qquad |\boldsymbol{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} \qquad \cos\gamma = \frac{a_x}{a}$$

Opisivanje gibanja u prostoru je načelno isto kao i opisivanje gibanja u ravnini, s tim što se uvodi treća koordinata, z.

2.12 Horizontalni i kosi hitac

Horizontalni hitac – primjer složenog gibanja, koje slijedi iz kombinacije jednolikog pravocrtnog gibanja i slobodnog pada.



- $t = 0$: $x = x_0 = 0$, $y = y_0 = H$, $v_x = v_{x,0} = 30$ m/s, $v_y = v_{y,0} = 0$, $a_x = a_{x,0} = 0$, $a_y = a_{y,0} = -g$,
- $y = 0$: $x = x_{Max} = D$ (doseg)

$$a_x = 0 \qquad v_x = v_{x,0} \qquad x = v_x\circ t + x_0 = v_{x,0}\circ t \text{ (tema 2.7)}$$

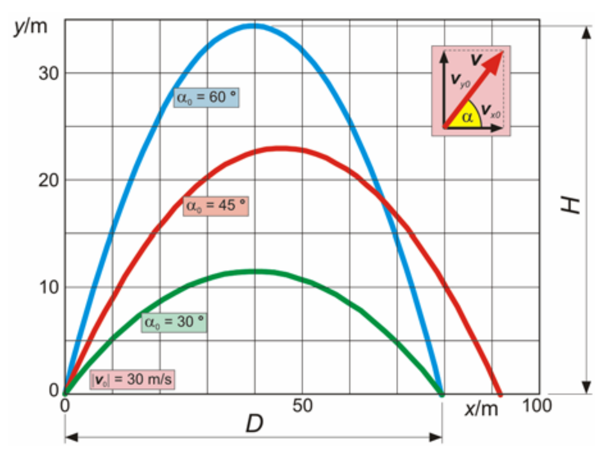
$$a_y = -g \qquad v_y = -a_y\circ t + v_{0,y} = -g\circ t \qquad y = H - ½\circ g\circ t^2 \text{ (tema 2.10)}$$

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{v_{x,0}^2 + g^2\circ t^2}$$

$$t = \sqrt{\frac{2\circ(H-y)}{g}} \qquad x_{Max} = v_{x,0}\circ t = D = v_{x,0}\circ\sqrt{\frac{2\circ H}{g}}$$

$v_x = 30$ m/s, $H = 100$ m, $g = 10$ m/s² $\Rightarrow$ $D = 130$ m, $t_D = 4{,}5$ s, $v_D = 54$ m/s

Kosi hitac je drugi primjer složenog gibanja – koji slijedi iz kombinacije jednolikog pravocrtnog gibanja i slobodnog pada.



- $t = 0$: $x = x_0 = 0$, $y = y_0 = 0$, $v = v_0$, $\alpha = \alpha_0$,

$$v_{x,0} = v_0\circ\cos\alpha_0 \qquad v_{y,0} = v_0\circ\sin\alpha_0 \qquad v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$$

$$x = v_{x,0}\circ t \qquad y = -½\circ g\circ t^2 + v_{y,0}\circ t + y_0 = v_{y,0}\circ t - ½\circ g\circ t^2$$

$$v_x = v_{x0} \qquad v_y = v_{y,0} - g\circ t \qquad v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$$

- $y = 0$: $x = x_{Max} = D = v_{x,0}\circ t$

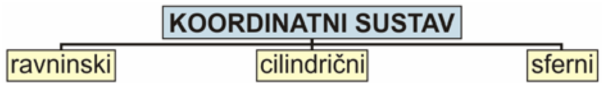
$$½\circ g\circ t^2 = v_{y,0}\circ t \qquad t = \frac{2\circ v_{y,0}}{g} \qquad D = v_{x0}\circ t = \frac{2\circ v_{x,0}\circ v_{y,0}}{g}$$

- $dy/dx = y' = 0$: $x = H$

$$y = v_{y,0}\circ\frac{x}{v_{x0}} - ½\circ g\circ\frac{x^2}{v_{x,0}^2} = \frac{v_{y,0}}{v_{x,0}}\circ x - \frac{g}{2\circ v_{x,0}^2}\circ x^2$$

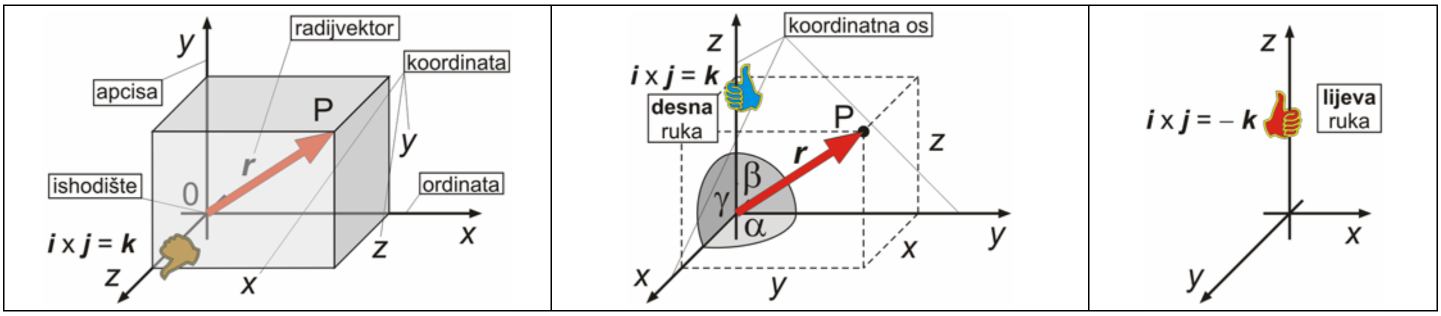
$$y' = \frac{v_{y,0}}{v_{x,0}} - \frac{g}{v_{x,0}^2}\circ x = 0 \qquad \Rightarrow \qquad x = \frac{v_{y,0}\circ v_{x,0}}{g}$$

2.13 Koordinatni sustavi

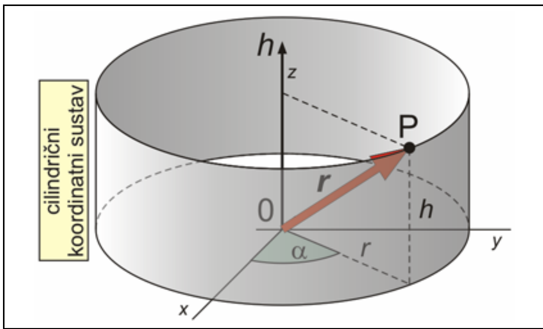


U analizi konkretnog fizičkog problema (gibanje) koristi se najpogodniji koordinatni sustav (najjasniji i/ili najjednostavniji opis i/ili matematička obrada).

Pravokutni (ravninski) koordinatni sustav: α = β = γ = 90 °. Raspored osi može biti po pravilu desne ruke i po pravilu lijeve ruke, koji se rijetko koristi.

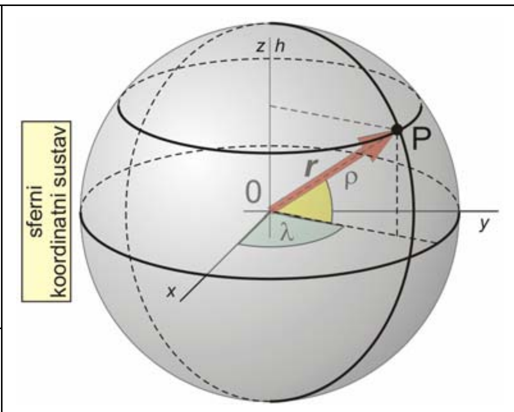


Kosokutni ravninski koordinatni sustav: α i/ili β i/ili γ = 90 °



Preračunavanje:

$x = r\circ\cos\alpha \quad y = r\circ\sin\alpha \quad z = h$



Preračunavanje:

$x = \rho\circ\cos\varphi\circ\cos\lambda$

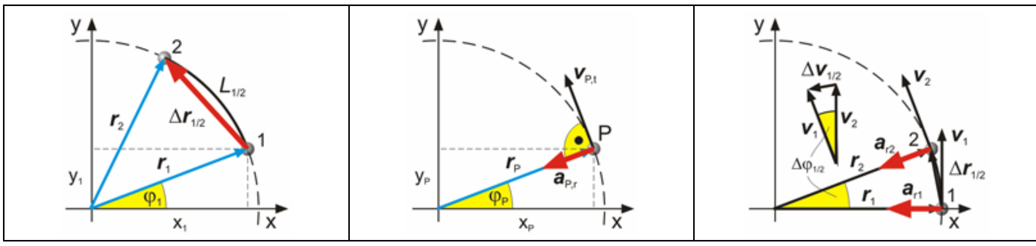
$y = \rho\circ\cos\varphi\circ\sin\lambda$

$z = \rho\circ\sin\varphi$

Ovo nisu opće važeće formule za preračunavanje – ako se osi i/ ili kutovi postave/označe na drugi način slijede i druge formule.

2.14 Jednoliko kružno gibanje

Jednoliko kružno gibanje – točka se giba konstantnom brzinom, po kružnici (najjednostavnije krivocrtno gibanje). Pri opisivanju putanje se umjesto koordinati x,y mogu koristiti koordinate r,φ te jednoliko kružno gibanje postaje usporedivo s jednolikim pravocrtnim gibanjem.



po kružnom luku:

$|\boldsymbol{r}| = r = \text{const}$

$\boldsymbol{r} \neq \text{const}$

$L = r\circ\varphi \quad [\varphi] = \text{rad}$

jednolikom brzinom

$|\boldsymbol{v}| = \text{const}$

$\boldsymbol{v} \neq \text{const}$

Period, T, s: vrijeme potrebno za obilazak opsega kružnice (2∘π).

Kutna brzina: $\omega_{1/2} = \frac{\Delta\varphi_{1/2}}{\Delta t_{1/2}} = \text{const} = \frac{2\circ\pi}{T} \qquad \omega_1 = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{d\varphi}{dt} = C_\omega = \omega_{1/2} \qquad \omega = \frac{\varphi}{t} \qquad [\omega] = \frac{\text{rad}}{\text{s}}$

Često se izostavlja i podrazumijeva oznaka jedinice za kut ([ω] = 1/s), što može dovesti do zabuna. (znači li to možda: [ω] = °/s ?)

Frekvencija – broj događaja (obilazaka opsega kružnice: $N = \varphi/2\circ\pi$) u jedinici vremena:

$$\nu = \frac{N}{t} = \frac{\varphi}{2\circ\pi}\circ\frac{1}{t} = \omega\circ t\circ\frac{1}{2\circ\pi}\circ\frac{1}{t} = \frac{2\circ\pi}{T}\circ t\circ\frac{1}{2\circ\pi}\circ\frac{1}{t} = \frac{1}{T} \qquad [\nu] = \frac{[N]}{[t]} = \frac{\text{dogadaja}}{\text{s}}$$

Često se izostavlja i podrazumijeva oznaka ponavljanog događaja $\{[\nu] = {}^{\text{ObilazakaOpsegaKružnice}}/\text{s}\}$. ([ω] = 1/s ≠ [ν])

Kutno ubrzanje: $\alpha_{1/2} = \frac{\Delta\omega_{1/2}}{\Delta t_{1/2}} = 0 \quad \alpha = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{d\omega}{dt} = 0 \quad \alpha = \frac{\omega}{t} \quad [\alpha] = \frac{[\omega]}{[t]} = \frac{\text{rad}}{\text{s}^2}$

Svojstva su jednolikog kružnog gibanja:

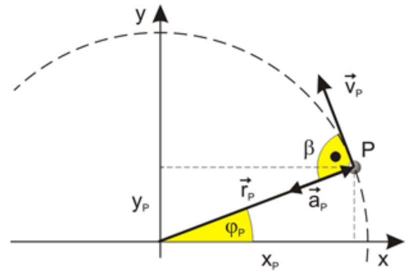
(a) put (skalarni luk L) ≠ intenzitetu pomaka (vektor, $|\Delta\boldsymbol{r}_{1/2}|$): $L_{1/2} = |\boldsymbol{r}|\circ(\varphi_2 - \varphi_1) \neq |\Delta\boldsymbol{r}_{1/2}|$

(b) nepromjenjivi su intenziteti i promjenjivi pravci trenutnih vektorskih brzina pomaka: $|\boldsymbol{v}| = \left|\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\right| = C_v \quad \boldsymbol{v} \neq \text{const}$

(c) nepromjenjivi su intenziteti i promjenjivi pravci trenutnih vektorskih ubrzanja pomaka: $|\boldsymbol{a}| = \left|\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}\right| = C_a \quad \boldsymbol{a} \neq \text{const}$

2.15 Kružno i harmonijsko gibanje

Kružno gibanje se odvija u ravnini (dva stupnja slobode), te za njegovo opisivanje treba koristiti vektore ili po dvije odgovarajuće komponente. U pravilu se nula koordinatnog sustava $0,x,y$ postavlja u centar kružnice po kojoj se giba točka.



Kružno gibanje nije jednoliko ako je $\beta \neq \pi/2$ – prisutna je tangencijalna komponenta ubrzanje.

$$r = |\boldsymbol{r}| \qquad \varphi = \omega \circ t$$

$$x = r \circ \cos\varphi \qquad y = r \circ \sin\varphi$$

$$x = r \circ \cos \omega \circ t \qquad y = r \circ \sin \omega \circ t$$

$$v_x = -r \circ \omega \circ \sin \omega \circ t \qquad v_y = r \circ \omega \circ \cos \omega \circ t$$

$v = r \circ \omega$ (izvesti izraz, znajući da je: $\sin^2\varphi + \cos^2\varphi = 1$)

$$a_x = -r \circ \omega^2 \circ \cos \omega \circ t \qquad a_y = -r \circ \omega^2 \circ \sin \omega \circ t$$

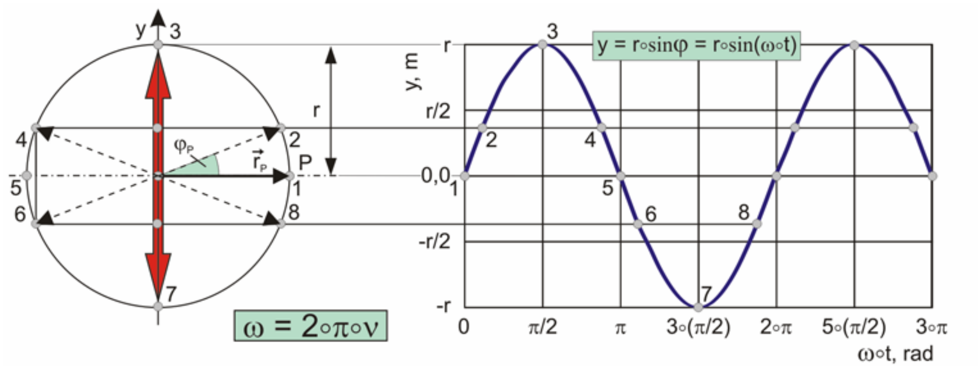
$$a_x = -x \circ \omega^2 \qquad a_y = -y \circ \omega^2$$

$a = r \circ \omega^2 = \dfrac{v^2}{r}$ (izvesti izraz, koristeći Pitagorin poučak)

Kod jednolikog kružnog gibanja:

- **radij vektor**, koji spaja centar kružnice i pokretnu točku, nepromjenjivog je intenziteta i promjenjivog pravca,
- trenutna brzina je okomita na radij vektor, nepromjenjivog je intenziteta i promjenjivog pravca,
- trenutna akceleracija, nepromjenjivog je intenziteta i promjenjivog pravca – istog kao i radij vektor, ali suprotnog smjera.

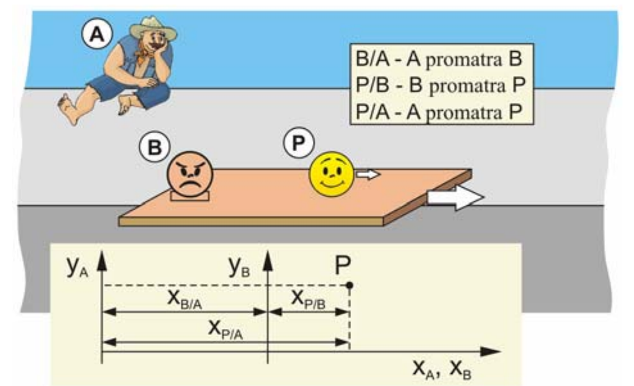
Harmonijsko gibanje – gibanje koje se može opisati sinusnom (kosinusnom) funkcijom: $y = r \circ \sin \omega \circ t$

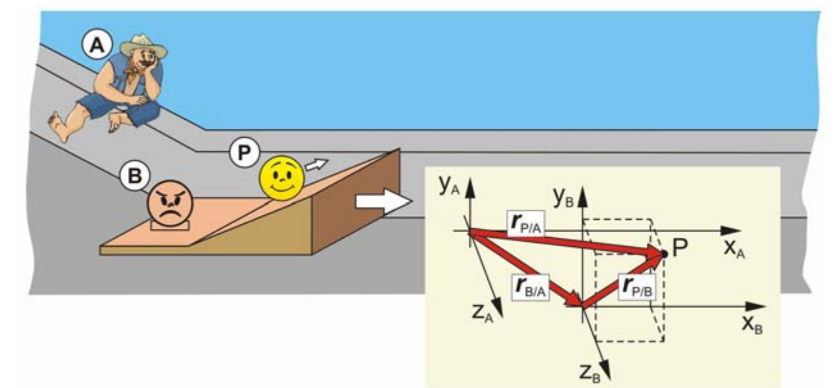


2.16 Relativno gibanje

Ako se dva promatrača uzajamno gibaju i analiziraju gibanje nekog objekta dobiti će različite rezultate (položaj, razmak/pomak, putanja/put, brzina pomaka / putna brzina, ubrzanje pomaka/ putno ubrzanje).

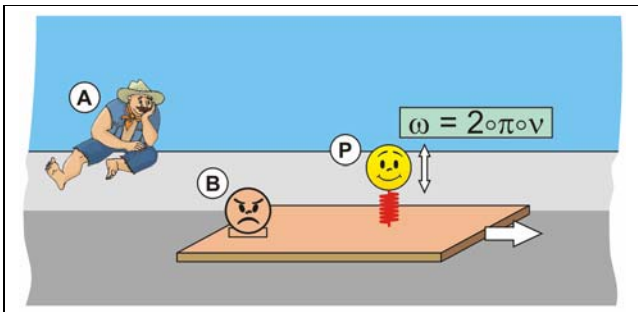
Svaki promatrač (opremljen sa: štopericom i mjernom trakom za duljinu) formira osobni **referentni sustav**, a dobivene veličine gibanja se nazivaju **relativnim veličinama**, na primjer : $v_{P/A}$ – relativna brzina objekta P u odnosu na promatrača A.





$\boldsymbol{x}_{P/A} = \boldsymbol{x}_{B/A} + \boldsymbol{x}_{P/B}$ $\qquad x_{P/A} = x_{B/A} + x_{P/B}$

$\boldsymbol{r}_{P/A} = \boldsymbol{r}_{B/A} + \boldsymbol{r}_{P/B}$ $\qquad z_{P/A} = z_{B/A} + z_{P/B}$, $\quad x_{P/A} = x_{B/A} + x_{P/B}$



1. promatrač – **A**, objekt **B**:
   $a_x = 0 \quad v_x = C_v \quad x = v \circ t + C_s \qquad a_y = -g \quad v_y = 0 \quad y = 0$
2. promatrač – **B**, objekt **P**:
   $a_x = -r \circ \omega^2 \circ \cos \omega \circ t \quad v_x = -r \circ \omega \circ \sin \omega \circ t \quad x = r \circ \cos \omega \circ t$
   $a_y = -r \circ \omega^2 \circ \sin \omega \circ t \quad v_y = r \circ \omega \circ \cos \omega \circ t \quad y = r \circ \sin \omega \circ t$
3. promatrač – **A**, objekt **P**:
   $a_x = -r \circ \omega^2 \circ \cos \omega \circ t \quad v_x = C_v - r \circ \omega \circ \sin \omega \circ t \quad x = v \circ t + C_s + r \circ \cos \omega \circ t$
   $a_y = -r \circ \omega^2 \circ \sin \omega \circ t - g \quad v_y = r \circ \omega \circ \cos \omega \circ t \quad y = r \circ \sin \omega \circ t$