

## 2. Primjer: Uvijanje statički neodređenog ravnog štapa okruglog presjeka

(Zadatak 6. primjer D) na 11. str. "Vježbenica ispitnih zadataka", primjenom na PC modula "Torzija.exe" paketa programa "CVRSTOCA").

Za ravni čelični štap ukliješten na oba kraja, slika a), treba odrediti:

- a) mjesto presjeka C štapa ( $a = ?$ ) iz uvjeta da su maksimalna posmična naprezanja jednaka u oba dijela štapa,
- b) dopušteno opterećenje štapa zakretnim momentom ( $M_{\text{dop}} = ?$ ), ako je zadano:  
 $l = 0,8 \text{ m}$ ,  $D_1 = 8 \text{ cm}$ ,  $k_1 = 0,65$ ,  $d_2 = 6,5 \text{ cm}$ ,  
 $G = 80 \text{ GPa}$ ,  $\tau_{\text{dop}} = 90 \text{ MPa}$ ,  $\vartheta_{\text{dop}} = 0,25 \text{ }^\circ/\text{m}$ .
- c) Za opterećenje štapa zakretnim momentom iznosa  $M = 1,5 \text{ kN}\cdot\text{m}$  treba odrediti reaktivne momente u A i B, provjeriti čvrstoću i krutost dijelova štapa, te odrediti kut zakreta presjeka C štapa.
- d) Skicirati dijagrame momenata uvijanja i kutova zakreta presjeka duž štapa.

**Rješenje:**

### a) Određivanje mjesta presjeka C štapa

Geometrijske značajke površina poprečnog presjeka dijelova ① i ② štapa su:

$$I_{p1} = \frac{\pi D_1^4}{32} [1 - k_1^4] = \frac{\pi \cdot 8^4}{32} [1 - 0,65^4] = 330,34 \text{ cm}^4,$$

$$W_{p1} = \frac{\pi D_1^3}{16} [1 - k_1^4] = \frac{\pi \cdot 8^3}{16} [1 - 0,65^4] = 82,586 \text{ cm}^3,$$

$$I_{p2} = \frac{\pi d_2^4}{32} = \frac{\pi \cdot 6,5^4}{32} = 175,25 \text{ cm}^4, \quad W_{p2} = \frac{\pi d_2^3}{16} = \frac{\pi \cdot 6,5^3}{16} = 53,92 \text{ cm}^3.$$

1. Jednadžba ravnoteže štapa, slika b):

$$\sum M_x = M_A + M_B - M = 0,$$

$$\text{slijedi: } M_A + M_B = M. \quad (1)$$

2. Uvjet deformacije štapa:

$$\alpha_{C,L} = \alpha_{C,D} \Rightarrow \frac{M_A \cdot a}{G I_{p1}} = \frac{M_B \cdot (l - a)}{G I_{p2}},$$

$$\text{slijedi: } \frac{M_A}{M_B} = \frac{I_{p1}}{I_{p2}} \cdot \frac{l - a}{a}. \quad (2)$$

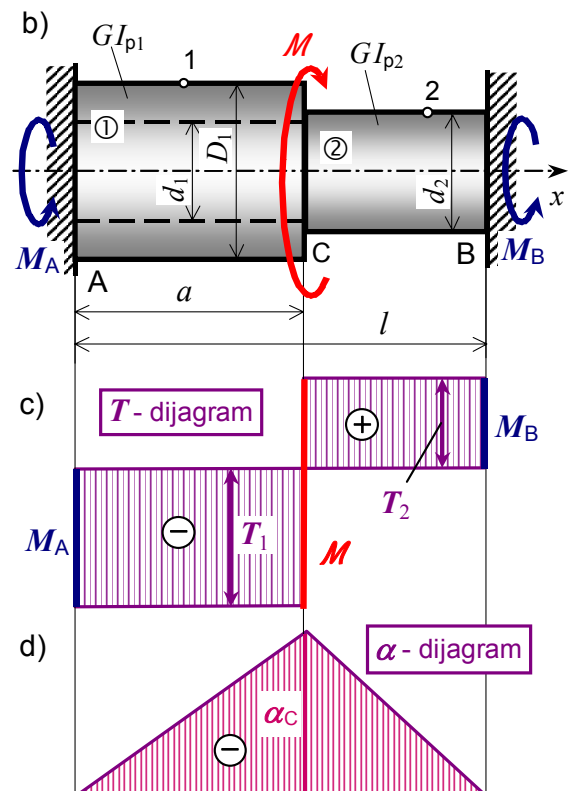
3. Uvjet zadatka:

$$\tau_{1\text{max}} = \tau_{2\text{max}} \Rightarrow \frac{M_A}{W_{p1}} = \frac{M_B}{W_{p2}},$$

$$\text{slijedi: } \frac{M_A}{M_B} = \frac{W_{p1}}{W_{p2}}. \quad (3)$$

Izjednačavanjem izraza (2) i (3) slijedi:

$$\frac{I_{p1}}{I_{p2}} \cdot \frac{l - a}{a} = \frac{W_{p1}}{W_{p2}},$$



$$\text{odnosno: } \frac{l-a}{a} = \frac{I_{p2}}{I_{p1}} \cdot \frac{2I_{p1}}{D_1} \cdot \frac{d_2}{2I_{p2}} = \frac{d_2}{D_1}.$$

Sređivanjem slijedi izraz za određivanje položaja presjeka C na štapu:

$$a = \frac{l}{1 + \frac{d_2}{D_1}} = \frac{80}{1 + \frac{65}{80}} = 44,14 \text{ cm}.$$

### b) Dopušteno opterećenje štapa na uvijanje

Rješavanjem jednadžbi (1) i (3) slijede reaktivni momenti na mjestima uklještenja štapa:

$$M_A = 0,605 M, \quad M_B = 0,395 M.$$

Dopušteni zakretni moment opterećenja štapa u presjeku C jest:

1) prema proračunu na čvrstoću ( $\tau_{1\max} = \tau_{2\max}$ ):

$$\tau_{1\max} = \frac{|T_1|}{W_{p1}} = \frac{0,605 M}{W_{p1}} \leq \tau_{\text{dop}} \Rightarrow M_{\text{dop}} \leq \frac{W_{p1} \cdot \tau_{\text{dop}}}{0,605} = \frac{82,586 \cdot 90}{0,605} = 12285,5 \text{ N}\cdot\text{m}.$$

2) prema proračunu na krutost:

$$\vartheta_1 = \frac{|T_1|}{GI_{p1}} = \frac{0,605 M}{GI_{p1}} \leq \vartheta_{\text{dop}} \Rightarrow M_{\text{dop}} \leq \frac{GI_{p1} \cdot \vartheta_{\text{dop}}}{0,605} = \frac{8 \cdot 10^{10} \cdot 330,342 \cdot 10^{-8} \cdot 0,25 \cdot \pi}{0,605 \cdot 180} = 1906 \text{ N}\cdot\text{m},$$

$$\vartheta_2 = \frac{|T_2|}{GI_{p2}} = \frac{0,395 M}{GI_{p2}} \leq \vartheta_{\text{dop}} \Rightarrow M_{\text{dop}} \leq \frac{GI_{p2} \cdot \vartheta_{\text{dop}}}{0,395} = \frac{8 \cdot 10^{10} \cdot 175,248 \cdot 10^{-8} \cdot 0,25 \cdot \pi}{0,395 \cdot 180} = 1549 \text{ N}\cdot\text{m}.$$

Za određivanje nosivosti štapa mjerodavna je najmanja od svih ovih vrijednosti, tj. dopušteni zakretni moment opterećenja štapa na uvijanje jest:

$$M_{\text{dop}} \leq 1549 \text{ N}\cdot\text{m}.$$

### b) Kontrola štapa na čvrstoću i krutost

Za zadani zakretni moment  $M = 1500 \text{ N}\cdot\text{m}$  u presjeku C, **reaktivni momenti** na mjestima uklještenja štapa su:

$$M_A = 0,605 M = 0,605 \cdot 1500 = 907,5 \text{ N}\cdot\text{m}, \quad M_B = 0,395 M = 0,395 \cdot 1500 = 592,5 \text{ N}\cdot\text{m}.$$

**Momenti uvijanja** u dijelovima ① i ② štapa su:

$$T_1 = -M_A = -907,5 \text{ N}\cdot\text{m}, \quad T_2 = M_B = 592,5 \text{ N}\cdot\text{m}.$$

Pripadajući dijagram momenata uvijanja  $T(x)$  duž štapa prikazan je na slici c).

1) **Proračun čvrstoće** dijelova ① i ② štapa ( $\tau_{1\max} = \tau_{2\max}$ ):

$$\tau_{1\max} = \frac{|T_1|}{W_{p1}} = \frac{907,5}{82,586} = 11 \text{ MPa} = \tau_{2\max} < \tau_{\text{dop}}.$$

Čvrstoća svih dijelova štapa kod opterećenja na uvijanje je zadovoljavajuća.

2) **Proračun krutosti** dijelova ① i ② štapa, tj. relativni kutovi uvijanja su:

$$\vartheta_1 = \frac{|T_1|}{GI_{p1}} = \frac{907,5}{8 \cdot 10^{10} \cdot 330,342 \cdot 10^{-8}} \cdot \frac{180}{\pi} = 0,197 \text{ } ^\circ/\text{m} < \vartheta_{\text{dop}},$$

$$\vartheta_2 = \frac{|T_2|}{GI_{p2}} = \frac{592,5}{8 \cdot 10^{10} \cdot 175,248 \cdot 10^{-8}} \cdot \frac{180}{\pi} = 0,242 \text{ } ^\circ/\text{m} < \vartheta_{\text{dop}}.$$

Krutost svih dijelova štapa kod opterećenja na uvijanje je zadovoljavajuća.

3) **Kut zakreta presjeka C** štapa kod uvijanja (pri čemu je pozitivni kut zakreta suprotnog smjera od gibanja kazaljke na satu) jest:

$$\alpha_C = -\vartheta_1 \cdot a = -0,197 \cdot 0,4414 = -0,087^\circ.$$

Pripadajući dijagram kutova zakreta  $\alpha(x)$  presjeka duž štapa kod opterećenja na uvijanje, prikazan je na slici d).