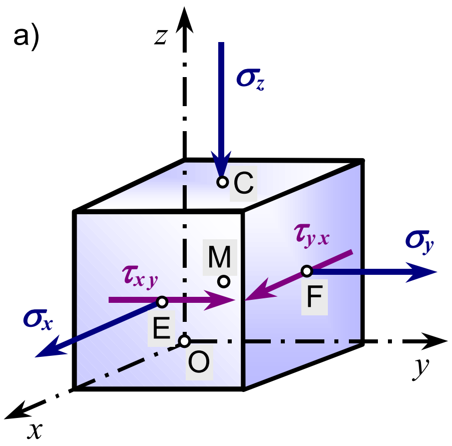
Primjer: Prostorno stanje naprezanja

a)



Zadano je stanje naprezanja u točki tijela u pravokutnom $(0xyz)$-koordinatnom sustavu, slika a), koje čini matricu tenzora naprezanja σ_{ij}:

$$\left[\sigma_{ij}\right]=\begin{bmatrix}\sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz}\\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz}\\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}100 & 30 & 0\\ 30 & 180 & 0\\ 0 & 0 & -100\end{bmatrix}\text{MPa.}$$

Treba odrediti analitički i grafički:

a) glavna naprezanja σ_1, σ_2 i σ_3 s orijentiranim elementom u točki tijela,
b) maksimalno posmično naprezanje $\tau_{\max}$ s pripadajućim normalnim naprezanjem,
c) naprezanje u presjeku N čija je normala $\vec{n}$ određena kutovima $\alpha=60^{\circ}$ i $\gamma=75^{\circ}$ s glavnim pravcima naprezanja 1 i 3,
d) nacrtati Mohrovu kružnicu naprezanja.

Analitičko rješenje:

a) Glavna naprezanja u točki M tijela

Može se odmah zaključiti, da će normalno naprezanje u pravcu osi z biti ujedno i glavno naprezanje u pravcu osi 3:
$\sigma_3=\sigma_z=-100\ \text{MPa}$.

Naprezanje σ_z ne utječe na element u (x,y)- ravnini, te se preostala dva glavna naprezanja σ_1 i σ_2 mogu odrediti analitički ili grafički crtanjem Mohrove kružnice naprezanja:

$$\sigma_{1,2}=\frac{\sigma_x+\sigma_y}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)^2+\tau_{xy}^2}=\frac{100+180}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{100-180}{2}\right)^2+30^2}=$$

$$=140\pm\sqrt{40^2+30^2}=140\pm 50\ \text{MPa}\,.$$

$\sigma_1=140+50=190\ \text{MPa}$, $\sigma_2=140-50=90\ \text{MPa}$.

Glavni pravci naprezanja 1 i 2 određuju se iz izraza:

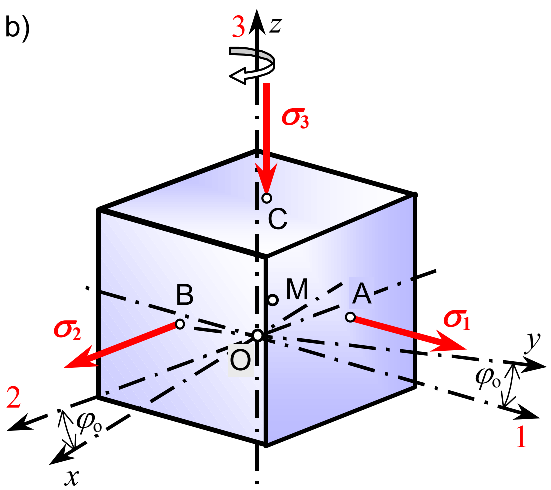
$$\tan 2\varphi_o=\frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x-\sigma_y}=\frac{30}{-40}=-0{,}75\,,$$

slijedi: $2\varphi_o=-36{,}87^{\circ}$, odnosno $\varphi_o=-18{,}435^{\circ}$.

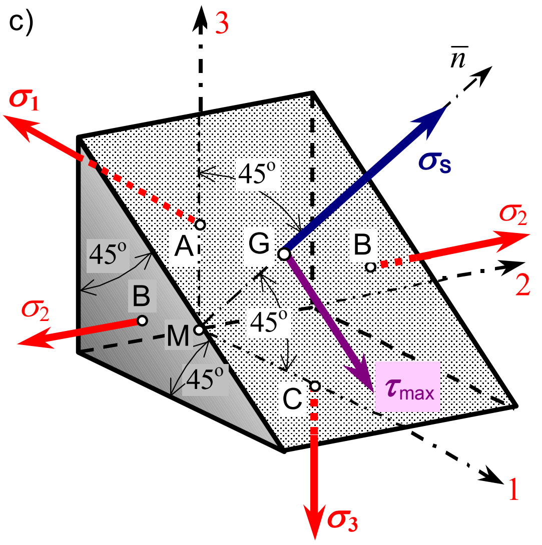
Glavni pravac 1 otklonjen je od osi y u smjeru gibanja kazaljke na satu za kut φ_o, a za isti je kut otklonjen i pravac 2 od osi x, kod rotacije elementa oko osi z u (x,y)- ravnini. Orijentirani element s glavnim naprezanjima prikazan je na slici b).

b) Maksimalno posmično naprezanje $\tau_{\max}$ s pripadajućim normalnim naprezanjem σ_S, pojavit će se u presjeku koji je paralelan s glavnim pravcem 2 i normala $\bar{n}$ čini kut od 45° s glavnim pravcima naprezanja 1 i 3, slika c).

b)



c)



U tom slučaju na presjek djeluje normalno naprezanje iznosa:

$$\sigma_{\mathrm{S}} = \sigma_{\mathrm{S3}} = \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} = \frac{190 - 100}{2} = 45\ \mathrm{MPa}$$

i maksimalno posmično naprezanje

$$\tau_{\max} = \tau_{13} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = \frac{190 - (-100)}{2} = 145\ \mathrm{MPa}\,.$$

Sekundarna maksimalna posmična naprezanja u kosim presjecima kroz točku tijela su:

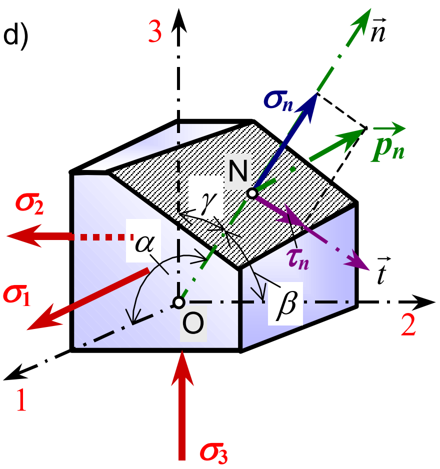
$$\tau_{12} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} = \frac{190 - 90}{2} = 50\ \mathrm{MPa} \ \text{ i } \ \tau_{23} = \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2} = \frac{90 - (-100)}{2} = 95\ \mathrm{MPa}\,,$$

a pripadajuća normalna naprezanja (apscise središta kružnica) su:

$$\sigma_{\mathrm{S1}} = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} = \frac{190 + 90}{2} = 140\ \mathrm{MPa} \ \text{ i } \ \sigma_{\mathrm{S2}} = \frac{\sigma_2 + \sigma_3}{2} = \frac{90 - 100}{2} = -5\ \mathrm{MPa}\,.$$

c) Puno naprezanje u presjeku N čija je normala $\vec{n}$ otklonjena od glavnih pravaca 1, 2 i 3 za kutove α, β i γ, slika d), određeno je izrazom:

d)



$$p_n^2 = (\sigma_1 \cdot \cos\alpha)^2 + (\sigma_2 \cdot \cos\beta)^2 + (\sigma_3 \cdot \cos\gamma)^2\,,$$

gdje se kut β između glavnog pravca 2 i normale $\vec{n}$ izračunava prema izrazu:

$$\cos^2\beta = 1 - \cos^2\alpha - \cos^2\gamma\,.$$

Uvrštavanjem vrijednosti dobiva se:

$$\cos^2\beta = 1 - \cos^2 60^{\circ} - \cos^2 75^{\circ}\,,$$

$\cos\beta = 0{,}82645$, odnosno kut je $\beta = 34{,}265^{\circ}$.

Slijedi vrijednost punog naprezanja na presjeku N tijela:

$$p_n^2 = (190 \cdot 0{,}5)^2 + (90 \cdot 0{,}82645)^2 + (-100 \cdot 0{,}25882)^2\,,$$

$$p_n = 123{,}4\ \mathrm{MPa}\,.$$

Komponente punog naprezanja na presjeku N su normalno naprezanje koje djeluje okomito na površinu presjeka N:

$$\sigma_n = \sigma_1 \cdot \cos^2\alpha + \sigma_2 \cdot \cos^2\beta + \sigma_3 \cdot \cos^2\gamma\,,$$

$$\sigma_n = 190 \cdot 0{,}5^2 + 90 \cdot 0{,}82645^2 - 100 \cdot 0{,}25882 \ \Rightarrow \ \sigma_n = 102{,}27\ \mathrm{MPa}\,,$$

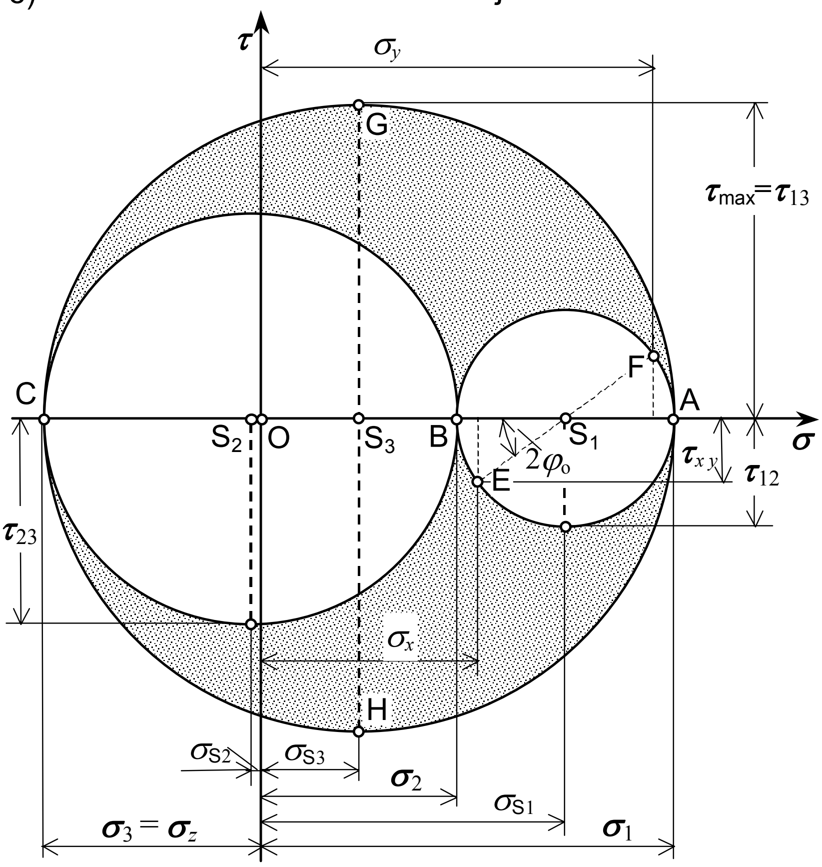
te posmično naprezanje koje djeluje na površini presjeka N:

$$\tau_n = \sqrt{p_n^2 - \sigma_n^2}\,, \quad \Rightarrow \ \tau_n = \sqrt{123{,}4^2 - 102{,}27^2} = 69{,}05\ \mathrm{MPa}\,.$$

Grafičko rješenje pomoću Mohrove kružnice naprezanja:

a) U $(0\sigma\tau)$-koordinatnom sustavu u odabranom mjerilu nacrtaju se točke E$(100,30)$ i F$(180,30)$, slika e); njihova spojnica na osi σ određuje središte kružnice S$_1(140,0)$, a njezin je polumjer $\overline{ES_1}$.Ta kružnica siječe os σ u točkama A i B koje određuju glavna naprezanja σ_1 i σ_2. Kut glavnih pravaca naprezanja 1 i 2 određen je kutom φ_o. Sada su poznata sva tri glavna naprezanja i mogu se nacrtati druge dvije Mohrove kružnice za prostorno stanje naprezanja u točki tijela.

e) Mjerilo: 1 cm $\triangleq$ 20 MPa



b) Apscise središta manjih kružnica su točke S$_2(-5,0)$ i S$_3(45,0)$, a polumjeri kružnica u mjerilu su jednaki sekundarnim maksimalnim posmičnim naprezanjima τ_{12} i τ_{23}. Točke G i H određuju naprezanja na presjecima u kojima djeluje maksimalno posmično naprezanje τ_{max} i pripadajuće normalno naprezanje σ_S, a presjeci čine kutove od 45^o s glavnim pravcima 1 i 3.

c) Naprezanje u presjeku N određenom normalom $\vec{n}$, slika d), određuje se grafički pomoću Mohrove kružnice naprezanja sljedećim postupkom, slika f):

- iz točke A povuče se pod kutom α od okomice pravac koji siječe najveću kružnicu u točki J, a zatim se iz središta S$_2$ povuče kružni luk polumjera $R_2 = \overline{JS_2}$ kroz točku J,
- iz točke C povuče se pod kutom γ od okomice pravac koji siječe najveću kružnicu u točki K, a zatim se iz središta S$_1$ povuče kružni luk polumjera $R_1 = \overline{KS_1}$ kroz točku K,
- sjecište ovih kružnih lukova je u točki N, čime su u mjerilu za presjek N određene vrijednosti punog naprezanja $p_n = \overline{ON}$; normalna komponenta naprezanja σ_n odgovara apscisi točke N, a posmična komponenta naprezanja τ_n odgovara ordinati točke N.

Očitane vrijednosti naprezanja na presjeku N određenom normalom $\vec{n}$, su:
$p_n = 125\ \mathrm{MPa}$, $\sigma_n = 105\ \mathrm{MPa}$, $\tau_n = 70\ \mathrm{MPa}$, što zadovoljava u odnosu na analitička rješenja.

f)