

## Primjer 2. Mjerenje deformacije pomoću mjerne rozete 0/45/90°

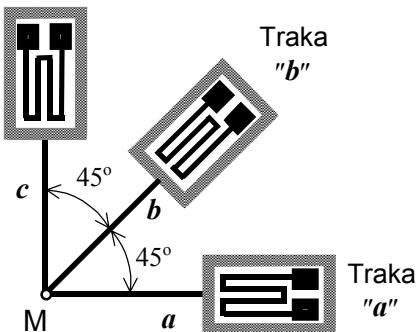
Na površini tijela koje je u ravninskom stanju naprezanja, u točki M u  $(x, y)$  - ravnini izmjerene su pomoću mjerne rozete 0/45/90° komponente deformacije u prvcima osi  $a$ ,  $b$  i  $c$ , slika a).

Treba odrediti analitički i grafički pomoću Mohrove kružnice deformacija:

- glavne pravce i vrijednosti glavnih deformacija u mjernoj točki,
- komponente deformacije u smjerovima koordinatnih osi  $x$  i  $y$ ,
- iznos maksimalne kutne deformacije s pripadnim duljinskim deformacijama.

Skicirati orijentirane početne i deformirane elemente u točki M tijela, s naznačenim komponentama deformacije u svim analiziranim koordinatnim sustavima.

a) Traka "c"



**Zadano:**  $\varepsilon_a = -700 \times 10^{-6}$ ,  $\varepsilon_b = 600 \times 10^{-6}$ ,  
 $\varepsilon_c = 900 \times 10^{-6}$ .

Mjerilo za Mohrovu kružnicu deformacija:

$$1 \text{ cm} \triangleq 200 \times 10^{-6}.$$

### Rješenje:

#### 1. Analitičko rješenje:

- Glavne deformacije u točki M tijela za mjeru rozetu 0/45/90° iznose (prema izrazima kod mjerenja **metodom tenzometrije**):

$$\begin{aligned}\varepsilon_{1,2} &= \frac{\varepsilon_a + \varepsilon_c}{2} \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\varepsilon_a - \varepsilon_b)^2 + (\varepsilon_b - \varepsilon_c)^2} = \\ &= \left[ \frac{-700 + 900}{2} \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(-700 - 600)^2 + (600 - 900)^2} \right] \cdot 10^{-6} = (100 \pm 943,4) \times 10^{-6}, \\ \varepsilon_1 &= (100 + 943,4) \cdot 10^{-6} = 1043,4 \times 10^{-6}, \\ \varepsilon_2 &= (100 - 943,4) \cdot 10^{-6} = -843,4 \times 10^{-6}.\end{aligned}$$

Kut glavnih pravaca deformacija jest:

$$\tan 2\psi = \left| \frac{2\varepsilon_b - \varepsilon_a - \varepsilon_c}{\varepsilon_a - \varepsilon_c} \right| = \left| \frac{2 \cdot 600 - (-700) - 900}{-700 - 900} \right| = 0,625,$$

slijedi:  $2\psi \approx 32^\circ$ , odnosno  $\psi = 16^\circ$ .

Glavni pravac deformacija 1 s koordinatnom osi  $x$  čini kut:

$$\varphi_0 = 90^\circ - \psi = 90^\circ - 16^\circ = 74^\circ.$$

Orijentirani element s glavnim deformacijama u glavnim prvcima prikazan je na slici b).

- Komponente deformacija u točki M tijela u prvcima koordinatnih osi  $x$  i  $y$ , kad se os  $x$  podudara s osi  $a$  i os  $y$  s osi  $c$  mjerne rozete 0/45/90°, mogu se odrediti iz sljedećih izraza tenzometrije:

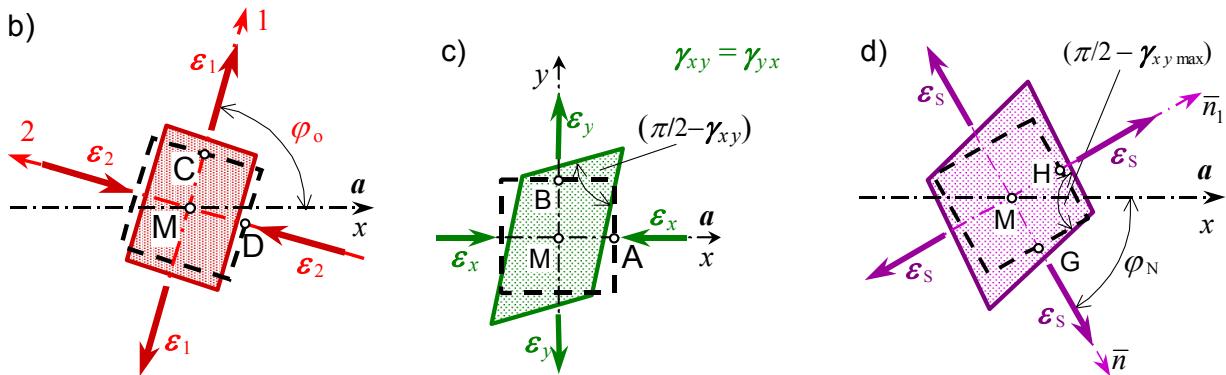
$$\varepsilon_x = \varepsilon_a = -700 \times 10^{-6},$$

$$\varepsilon_y = \varepsilon_c = 900 \times 10^{-6},$$

$$\gamma_{xy} = 2\varepsilon_b - (\varepsilon_a + \varepsilon_c) = [2 \cdot 600 - (-700 + 900)] \times 10^{-6},$$

$$\gamma_{xy} = 1000 \times 10^{-6} \text{ rad}.$$

Element u okolišu točke M tijela s komponentama deformacija u pravcima koordinatnih osi x i y prikazan je na slici c).



c) Apsolutni iznos maksimalne kutne deformacije u točki M tijela jest:

$$\gamma_{xy\max} = |\varepsilon_1 - \varepsilon_2| = |1043,4 - (-943,4)| \times 10^{-6},$$

$$\text{odnosno } \gamma_{xy\max} = 1886,8 \times 10^{-6} \text{ rad},$$

a pripadne srednje duljinske deformacije su:

$$\varepsilon_s = \frac{\varepsilon_a + \varepsilon_c}{2} = \frac{-700 + 900}{2} \cdot 10^{-6} = 100 \times 10^{-6}.$$

Pravac normale  $\bar{n}$  presjeka u kojem je maksimalna kutna deformacija određen je kutom  $\varphi_N$  mjerenoj od osi x:

$$\varphi_N = \varphi_o + \pi/2 = 74^\circ + 45^\circ = 119^\circ \text{ ili } \varphi_N = 119^\circ - 180^\circ = -61^\circ.$$

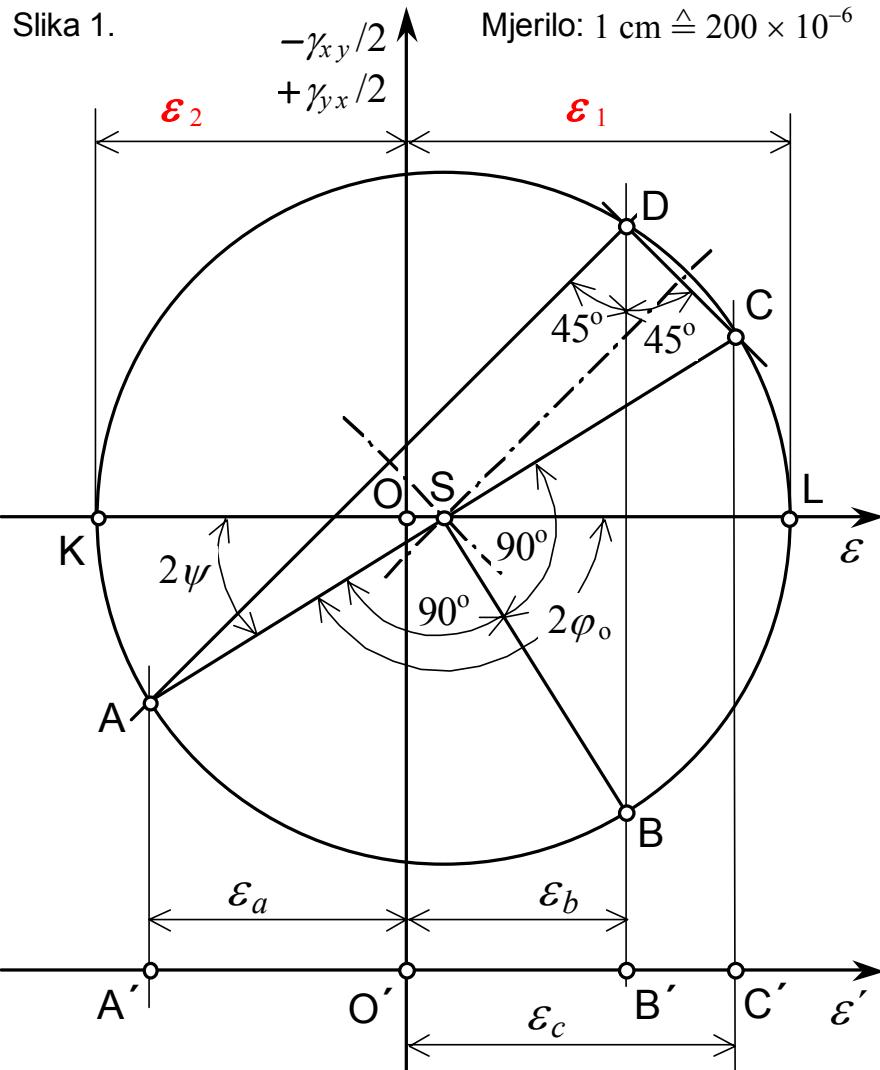
Orijentirani element s ucrtanim maksimalnim kutnim i pripadnim duljinskim deformacijama prikazan je na slici d).

## 2. Grafičko rješenje pomoću Mohrove kružnice deformacija

- U pomoćnom koordinatnom sustavu  $(O'\varepsilon' \frac{\gamma}{2})$  crtaju se točke A', B' i C' kojima apscise u zadanom mjerilu predstavljaju izmjerene duljinske deformacije  $\varepsilon_a$ ,  $\varepsilon_b$  i  $\varepsilon_c$ , slika 1.

U tim se točkama podižu okomice na pomoćnu vodoravnu os  $\varepsilon'$ . Odabire se proizvoljna točka D na okomici kroz točku B'. Iz točke D povlače se pravci koji s okomicom kroz točku B' čine kutove od  $45^\circ$ . Presjecišta tih pravaca s okomicama kroz točke A' i C' određuju točke A i C. U presjecištu simetrala dužina  $\overline{AD}$  i  $\overline{CD}$  nalazi se središte S Mohrove kružnice deformacija. Sada se opiše kružnica kroz točke C, D i A. Okomica kroz B' sijeće kružnicu u točki B. Kutovi  $\angle ASB$  i  $\angle BSC$  iznose  $90^\circ$ .

Točke K i L definiraju glavne deformacije  $\varepsilon_1$  i  $\varepsilon_2$ . Glavni pravac deformacija  $\varepsilon_1$  otklonjen je od pravca  $a$  za kut  $2\varphi_0$  suprotno od gibanja kazaljke na satu, slika b).

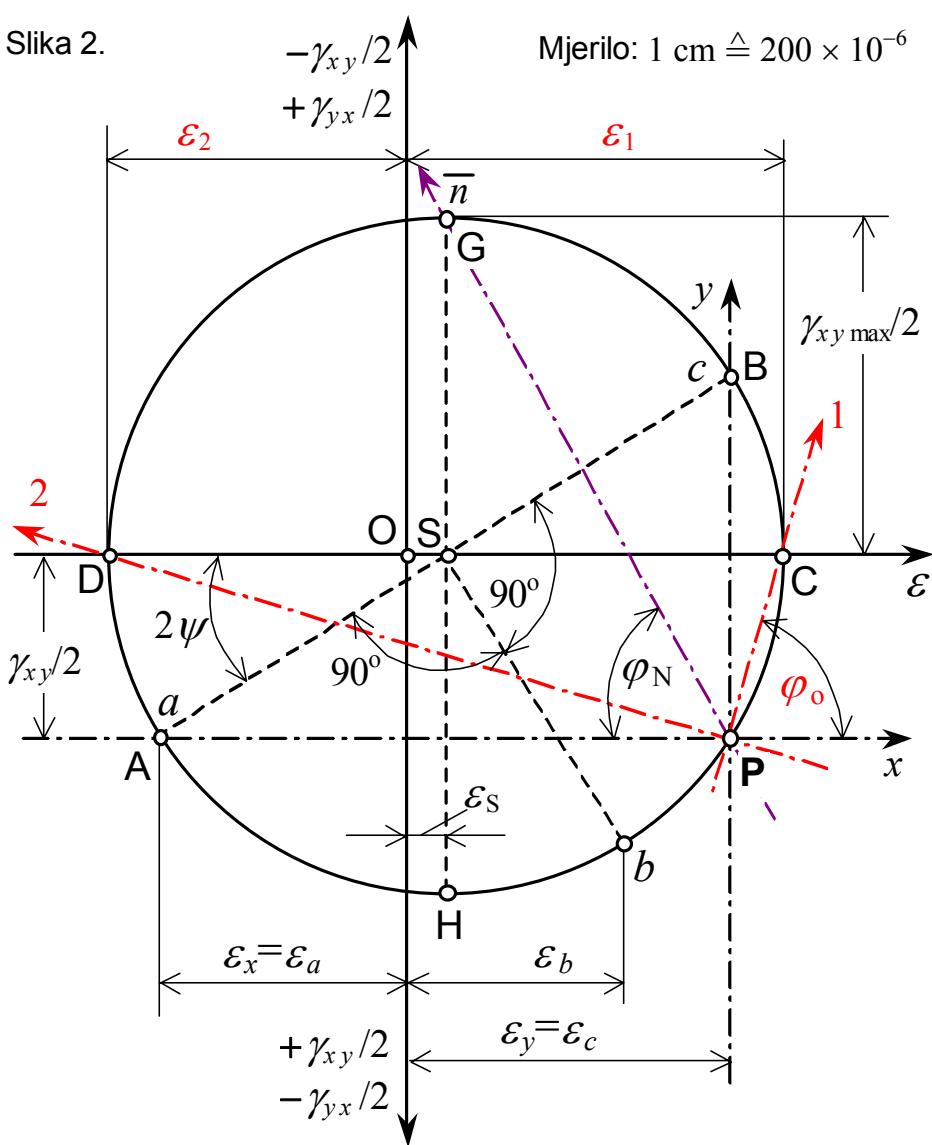


Mohrova kružnica deformacija s ucrtanim polom P omogućuje uobičajeno označavanje svih relevantnih deformacija i kutova, slika 2.

Točke na okomici kroz središte S kružnice određuju točke G i H u kojima je polovična maksimalna kutna deformacija  $\frac{1}{2}\gamma_{xy\max}$ , a sve duljinske deformacije jednake su srednjoj duljinskoj deformaciji  $\varepsilon_S$  u točki M tijela. Pravac normale  $\bar{n}$  određen je kutom  $\varphi_N$  povlačenjem iz pola P pravca PG kroz točku G.

Svi orijentirani elementi u točki M tijela, u početnom i deformiranom obliku s naznačenim komponentama deformacije u koordinatnim osima promatranih koordinatnih sustava, prikazani su na slikama b), c) i d).

Slika 2.



Napomena za rješavanje zadatka na PC:

Analitičko i grafičko rješenje ovog primjera može se dobiti uporabom modula «Mohr's circle» programa «MDSolids®».