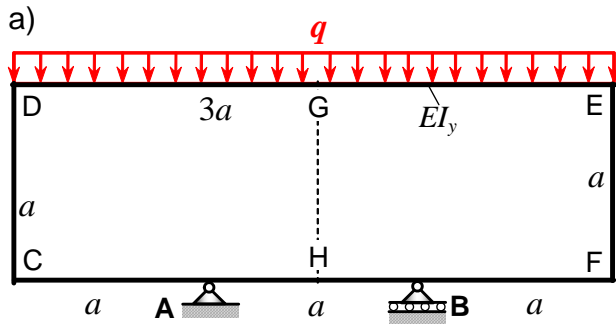


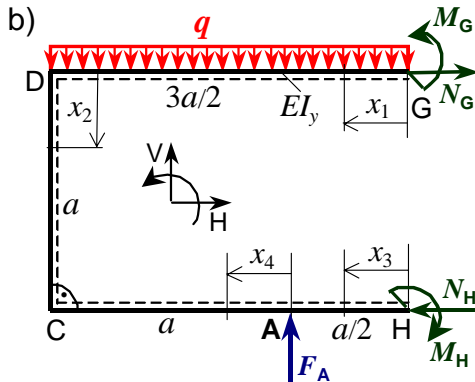
1. Zadatak: Zatvoreni ravninski okvirni nosač



Za zatvoreni okvirni nosač ABCDEF zadan i opterećen prema slici a) treba:

- odrediti reakcije veza u osloncima A i B
- unutarnje sile u poprečnim presjecima nosača
- skicirati i kotirati dijagrame uzdužnih i poprečnih sila te momenta savijanja duž konture nosača.

Zadano: $q, a, EI_y = \text{konst.}$



Rješenje:

Zatvoreni okvirni nosač je geometrijski simetričan i simetrično opterećen, te su vanjske reakcije veza u osloncima A i B, slika b):

$$F_A = F_B = \frac{3}{2} q \cdot a.$$

Unutarnje sile u poprečnim presjecima dijelova nosača, zbog simetrije konstrukcije i opterećenja, određuju

se iz jednadžbi ravnoteže za 1/2 nosača i dopunskih uvjeta minimuma energije deformiranja:

- poprečne sile u presjecima G i H $\rightarrow Q_G = Q_H = 0$,
 - uzdužne sile N_G, N_H te momenti savijanja M_G i M_H iz jednadžbi (1) do (5).
- Jednadžbe ravnoteže za 1/2 nosača:

- $\sum F_H = 0 \quad N_G - N_H = 0, \rightarrow N_G = N_H = N.$
- $\sum F_V = 0 \quad F_A - \frac{3}{2} q \cdot a = 0 \rightarrow F_A = F_B = \frac{3}{2} q \cdot a.$
- $\sum M_G = 0 \quad M_G - M_H - N_H \cdot a - F_A \cdot \frac{a}{2} + \frac{3}{2} q \cdot a \cdot \frac{3}{4} a = 0. \rightarrow M_H = M_G - N \cdot a + \frac{3}{8} q \cdot a^2. \dots (3')$

Zadatak je dvaput unutarnje statički neodređen, jer jest: $n = k - s = 5 - 3 = 2$.

Prekobrojne unutarnje sile su: N i M_G .

Poučci o minimumu energije deformiranja nosača su za $i = 4$ i $EI_y = \text{konst.}$, slika b):

$$4. \frac{\partial U}{\partial M_G} = \left[\sum_{i=1}^4 \left(\int_0^{l_i} M_b(x_i) \cdot \frac{\partial M_b(x_i)}{\partial M_G} dx_i \right) \right] = 0, \quad 5. \frac{\partial U}{\partial N} = \left[\sum_{i=1}^4 \left(\int_0^{l_i} M_b(x_i) \cdot \frac{\partial M_b(x_i)}{\partial N} dx_i \right) \right] = 0.$$

Momenti savijanja duž konture nosača $M_b(x_i) = M_y(x_i)$ i potrebne derivacije jesu:

Momenti savijanja $M_b(x_i)$ dijelova okvirnog nosača:	$\frac{\partial M_b(x_i)}{\partial M_G}$	$\frac{\partial M_b(x_i)}{\partial N}$
$M_b(x_1) = M_G - \frac{q \cdot x_1^2}{2}$	1	0
$M_b(x_2) = M_G - N \cdot x_2 - \frac{3}{2} qa \cdot \frac{3}{4} a = M_G - N \cdot x_2 - \frac{9}{8} qa^2$	1	$-x_2$
$M_b(x_3) = M_H = M_G - N \cdot a + \frac{3}{8} qa^2$	1	$-a$

$M_b(x_4) = M_H - F_A \cdot x_4 = M_G - N \cdot a + \frac{3}{8}qa^2 - \frac{3}{2}qa \cdot x_4$	1	-a
--	---	----

Moment savijanja $M_b(x_i) = M_y(x_i)$ uzet je pozitivan, ako on na strani dijela nosača označenom crtkanom linijom, slika b), izaziva rastezna (vlačna) naprezanja.

Uvrštavanjem izraza za momente savijanja $M_b(x_i)$ i pripadajućih derivacija iz tablice u izraze (4) i (5), sređivanjem slijedi:

$$(4) \int_0^{\frac{3}{2}a} \left(M_G - \frac{q \cdot x_1^2}{2} \right) \cdot 1 \cdot dx_1 + \int_0^a \left(M_G - N \cdot x_2 - \frac{9}{8}qa^2 \right) \cdot 1 \cdot dx_2 + \int_0^{a/2} \left(M_G - N \cdot x_2 + \frac{3}{8}qa^2 \right) \cdot 1 \cdot dx_3 + \int_0^a \left(M_G - N \cdot a + \frac{3}{8}qa^2 - \frac{3}{2}qa \cdot x_4 \right) \cdot 1 \cdot dx_4 = 0.$$

Integriranjem i sređivanjem izraza te dijeljenjem s a , slijedi izraz (4'):

$$4M_G - 2N \cdot a = \frac{15}{8}qa^2. \dots (4')$$

$$(5) \int_0^a \left(M_G - N \cdot x_2 - \frac{9}{8}qa^2 \right) \cdot (-x_2) \cdot dx_2 + \int_0^{a/2} \left(M_G - N \cdot x_2 + \frac{3}{8}qa^2 \right) \cdot (-a) \cdot dx_3 + \int_0^a \left(M_G - N \cdot a + \frac{3}{8}qa^2 - \frac{3}{2}qa \cdot x_4 \right) \cdot (-a) \cdot dx_4 = 0.$$

Integriranjem i sređivanjem izraza te dijeljenjem s a^2 , slijedi izraz (5'):

$$2M_G - \frac{11}{6}N \cdot a = \frac{3}{4}qa^2. \dots (5')$$

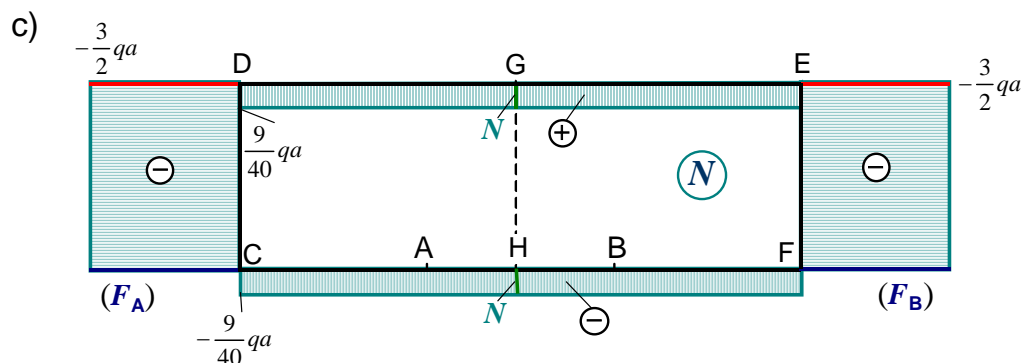
Rješavanjem sustava jednačbi (4') i (5') dobivaju se komponente unutarnjih sila u presjecima G i H okvirnog nosača:

$N = \frac{9}{40}qa = N_G = N_H,$	$M_G = \frac{93}{160}qa^2.$
-----------------------------------	-----------------------------

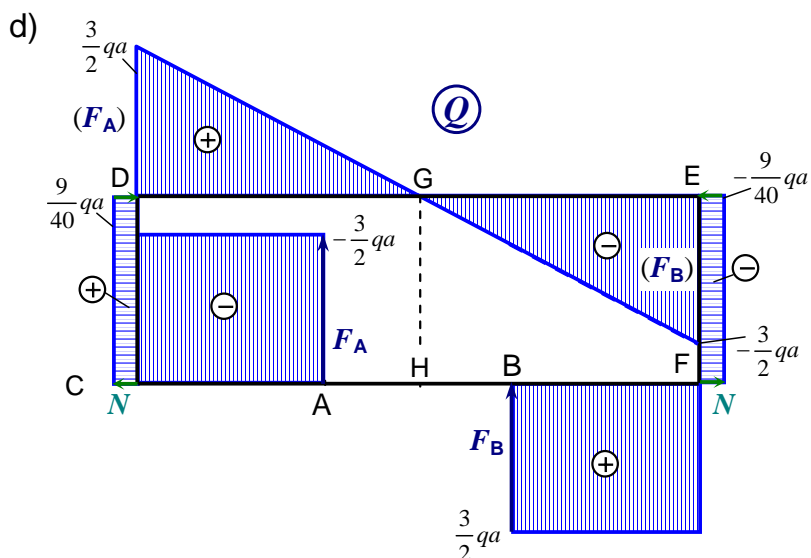
Moment savijanja M_H u presjeku H okvirnog nosača dobiva se iz izraza (3'):

$$M_H = M_G - N \cdot a + \frac{3}{8}qa^2 \rightarrow \boxed{M_H = \frac{117}{160}qa^2}.$$

Dijagram unutarnjih uzdužnih sila duž konture zatvorenog okvirnog nosača:



Dijagram unutarnjih poprečnih sila duž konture zatvorenog okvirnog nosača:



Momenti savijanja u karakterističnim točkama zatvorenog okvirnog nosača jesu:

$$M_{bA} = M_{bB} = M_{bH} = \frac{117}{160} qa^2, \quad M_{bD} = M_{bE} = M_G - \frac{q}{2} \cdot \left(\frac{3}{2}a\right)^2 = -\frac{87}{160} qa^2,$$

$$M_{bC} = M_{bF} = M_H - F_A \cdot a = -\frac{123}{160} qa^2, \quad M_{bG} = \frac{93}{160} qa^2.$$

Dijagram momenata savijanja duž konture zatvorenog okvirnog nosača:

