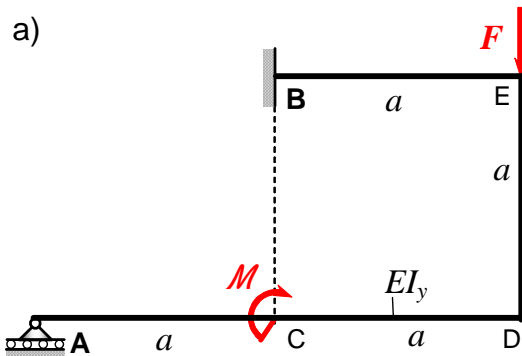


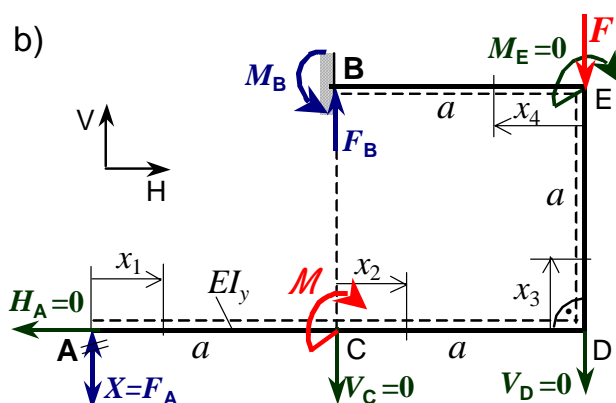
6. Zadatak: Statički neodređeni ravninski okvirni nosač



Za statički neodređeni ravninski okvirni nosač ABCDE zadan i opterećen prema slici a) treba:

- odrediti reakcije veza u osloncima A i B
- odrediti vertikalne pomake u točkama C i D ($w_C = ?$, $w_D = ?$)
- vodoravni pomak oslonca A ($u_A = ?$)
- kutni zakret u točki E ($\alpha_E = ?$)
- skicirati i kotirati dijagrame uzdužnih i poprečnih sila te momenta savijanja duž konture nosača.

Zadano: F , a , $M = F \cdot a$, $EI_y = \text{konst.}$

**Rješenje:**

Jednadžbe ravnoteže za okvirni nosač, slika b), jesu:

1. $\sum F_H = 0 \quad F_{BH} = 0$,
2. $\sum F_V = 0 \quad -F + F_A + F_B = 0$,
3. $\sum M_B = 0 \quad M_B - F \cdot a - M - F_A \cdot a = 0$.

Slijedi: $F_B = F - F_A$, $M_B = 2F \cdot a + F_A \cdot a$.

Zadatak je jedanput statički neodređen, jer jest: $n = k - s = 4 - 3 = 1$. Za osnovni statički određeni nosač odabran je okvirni konzolni nosač uklanjanjem oslonca u A, slika b), tj. prekobrojna je nepoznata sila: $X = F_A$.

4. Poučak o minimumu energije deformiranja jest ($i = 4$):

$$\frac{\partial U}{\partial X} = \frac{1}{EI_y} \left[\sum_{i=1}^4 \left(\int_0^{l_i} M_b(x_i) \cdot \frac{\partial M_b(x_i)}{\partial X} dx_i \right) \right] = 0 \cdot EI_y$$

Za određivanje vodoravnih i vertikalnih pomaka te kuta zakreta u zadanim točkama okvirnog nosača, prema drugom Castiglianovom poučku potrebno je dodati "nulte sile" u tim točkama. Njihov utjecaj je u derivacijama po tim silama, te su one u momentima savijanja duž konture okvirnog nosača, slika b).

Momenti savijanja duž konture nosača $M_b(x_i) = M_y(x_i)$ i potrebne derivacije jesu:

Momenti savijanja $M_b(x_i)$ dijelova nosača:	$\frac{\partial M_b(x_i)}{\partial X}$	$\frac{\partial M_b(x_i)}{\partial V_C}$	$\frac{\partial M_b(x_i)}{\partial V_D}$	$\frac{\partial M_b(x_i)}{\partial H_A}$	$\frac{\partial M_b(x_i)}{\partial M_E}$
$M_b(x_1) = -X \cdot x_1$	$-x_1$	0	0	0	0
$M_b(x_2) = -X \cdot (x_2 + a) - M + V_C \cdot x_2$	$-(x_2 + a)$	x_2	0	0	0
$M_b(x_3) = -X \cdot 2a - M + V_C \cdot a - H_A \cdot x_3$	$-2a$	a	0	$-x_3$	0
$M_b(x_4) = -X \cdot (2a - x_4) - M - F \cdot x_4 - H_A \cdot a + V_C \cdot (a - x_4) - V_D \cdot x_4 - M_E$	$-(2a - x_4)$	$(a - x_4)$	$-x_4$	$-a$	-1

Moment savijanja $M_b(x_i) = M_y(x_i)$ uzet je pozitivan, ako on na strani dijela nosača označenom crtkanom linijom, slika b), izaziva rastezna (vlačna) naprezanja.

Uvrštavanjem izraza za momente savijanja $M_b(x_i)$ i derivacije $\frac{\partial M_b(x_i)}{\partial X}$ iz tablice u izraz (4), uz dodane "sile" $V_C = V_D = H_A = M_E = 0$, sređivanjem slijedi vrijednost nepoznate sile X (vertikalna reakcija veze u osloncu A):

$$\int_0^a (-X \cdot x_1) \cdot (-x_1) dx_1 + \int_0^a [-X \cdot (a + x_2) - \mathcal{M}] \cdot [-(a + x_2)] dx_2 + \int_0^a (-X \cdot 2a - \mathcal{M}) \cdot (-2a) dx_3 + \int_0^a [-X \cdot (2a - x_4) - F \cdot x_4 - \mathcal{M}] \cdot (x_4 - 2a) dx_4 = 0.$$

Integriranjem i sređivanjem izraza te dijeljenjem s a^3 , slijedi:

$$9X + \frac{17}{3} \cdot F = 0 \rightarrow \boxed{X = -\frac{17}{27} F = F_A (\downarrow)}.$$

Komponente reakcije veza u osloncu B jesu:

$$F_B = F - F_A = \frac{44}{27} F, \quad M_B = 2F \cdot a + F_A \cdot a = \frac{37}{27} F a.$$

Sređeni momenti savijanja duž konture okvirnog nosača jesu:

$$M_b(x_1) = -F_A \cdot x_1 = \frac{17}{27} F \cdot x_1,$$

$$M_b(x_2) = -F_A \cdot (x_2 + a) - \mathcal{M} = \frac{F}{27} \cdot (17 \cdot x_2 - 10 \cdot a),$$

$$M_b(x_3) = -\mathcal{M} - F_A \cdot 2a = -\frac{10}{27} F \cdot a,$$

$$M_b(x_4) = -\mathcal{M} - F \cdot x_4 - F_A \cdot (2a - x_4) = \frac{F}{27} \cdot (7 \cdot a - 44 \cdot x_4).$$

Za određivanje deformacija okvirnog nosača: vertikalnih pomaka u točkama C i D (i E), vodoravnog pomaka u osloncu A (u C i D) te kutnog zakreta u E, prema drugom Castiglianovom poučku potrebno je dodati "nulte sile" (sile ili momente) u tim točkama. Njihov utjecaj je u derivacijama momenata savijanja po tim silama, te su one izračunate u momentima savijanja duž konture okvirnog nosača, tablica i slika b).

Vertikalni pomak nosača u točki C jest:

$$w_C = \left(\frac{\partial U}{\partial V_C} \right)_{V_C=0} = \frac{1}{EI_y} \left[\sum_{i=1}^4 \left(\int_0^{l_i} M_b(x_i) \cdot \frac{\partial M_b(x_i)}{\partial V_C} dx_i \right) \right] = \frac{F}{EI_y} \cdot \frac{1}{27} \cdot \left\{ \int_0^a (17x_2 - 10a) \cdot x_2 dx_2 + \int_0^a (-10a) \cdot a dx_3 + \int_0^a (7a - 44x_4) \cdot (a - x_4) dx_4 \right\} = \frac{23}{162} \cdot \frac{Fa^3}{EI_y} \cong 0,142 \cdot \frac{Fa^3}{EI_y} (\downarrow).$$

Vertikalni pomak nosača u točki D (i E) jest:

$$w_D = \left(\frac{\partial U}{\partial V_D} \right)_{V_D=0} = \frac{1}{EI_y} \left[\sum_{i=1}^4 \left(\int_0^{l_i} M_b(x_i) \cdot \frac{\partial M_b(x_i)}{\partial V_D} dx_i \right) \right] = \frac{F}{EI_y} \cdot \frac{1}{27} \int_0^a (7a - 44x_4) \cdot (-x_4) dx_4 = \frac{67}{162} \cdot \frac{Fa^3}{EI_y} \cong 0,4136 \cdot \frac{Fa^3}{EI_y} = w_E (\downarrow).$$

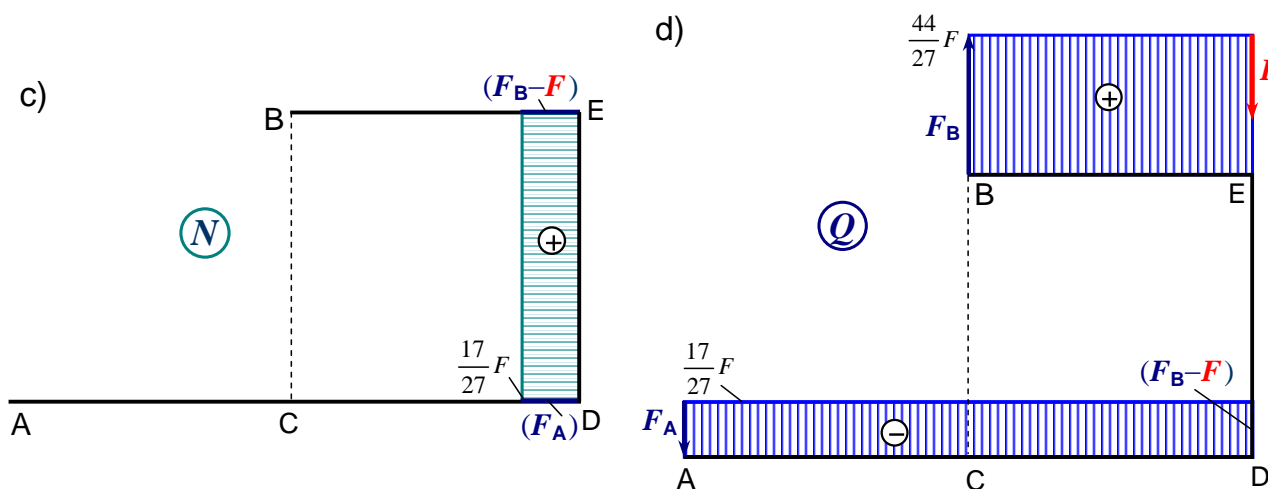
Vodoravni pomak nosača na mjestu oslonca A (u C i D) jest:

$$u_A = \left(\frac{\partial U}{\partial H_A} \right)_{H_A=0} = \frac{1}{EI_y} \left[\sum_{i=1}^4 \left(\int_0^{l_i} M_b(x_i) \cdot \frac{\partial M_b(x_i)}{\partial H_A} dx_i \right) \right] = \frac{F}{EI_y} \cdot \frac{1}{27} \cdot \left\{ \int_0^a (-10a) \cdot (-x_3) dx_3 + \int_0^a (7a - 44x_4) \cdot (-a) dx_4 \right\} = \frac{23}{54} \cdot \frac{Fa^3}{EI_y} \cong 0,426 \cdot \frac{Fa^3}{EI_y} = u_D = u_C \quad (\leftarrow).$$

Kutni zakret nosača u točki E jest:

$$\alpha_E = \left(\frac{\partial U}{\partial M_E} \right)_{M_E=0} = \frac{1}{EI_y} \left[\sum_{i=1}^4 \left(\int_0^{l_i} M_b(x_i) \cdot \frac{\partial M_b(x_i)}{\partial M_E} dx_i \right) \right] = \frac{F}{EI_y} \cdot \frac{1}{27} \cdot \left\{ \int_0^a (7a - 44x_4) \cdot (-1) dx_4 \right\} = \frac{15}{27} \cdot \frac{Fa^2}{EI_y}.$$

Dijagrami unutarnjih uzdužnih i poprečnih sila duž konture okvirnog nosača:



Momenti savijanja u karakterističnim točkama okvirnog nosača jesu:

$$M_{bA} = 0, M_{bB} = -\frac{37}{27}Fa, M_{bD} = M_{bE} = -M_B + F_B \cdot a = \frac{7}{27}Fa, (M_{bC})_L = -F_A \cdot a = \frac{17}{27}Fa,$$

$$(M_{bC})_D = (M_{bC})_L - M = -\frac{10}{27}Fa.$$

Dijagram momenata savijanja duž konture nosača i elastična linija okvirnog nosača:

