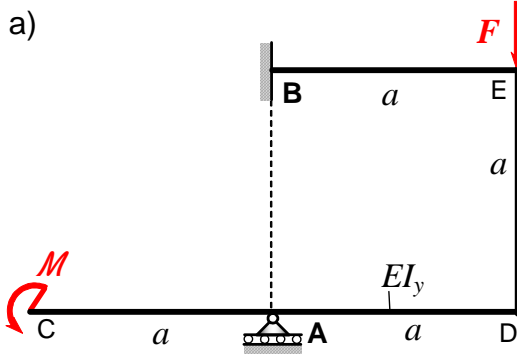


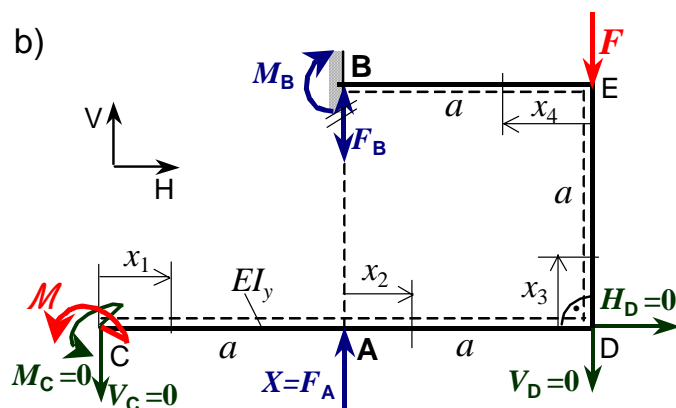
## 5. Zadatak: Statički neodređeni ravninski okvirni nosač



Za statički neodređeni ravninski okvirni nosač ABCDE zadan i opterećen prema slici a) treba:

- odrediti reakcije veza u osloncima A i B
- odrediti vertikalne pomake u točkama C i D ( $w_C = ?$ ,  $w_D = ?$ )
- vodoravni pomak u točki D ( $u_D = ?$ )
- kutni zakret u točki C ( $\alpha_C = ?$ )
- skicirati i kotirati dijagrame uzdužnih i poprečnih sila te momenta savijanja duž konture nosača.

Zadano:  $F$ ,  $a$ ,  $M = F \cdot a$ ,  $EI_y = \text{konst.}$

**Rješenje:**

Jednadžbe ravnoteže za okvirni nosač, slika b), jesu:

1.  $\sum F_H = 0 \quad F_{BH} = 0$ ,
2.  $\sum F_V = 0 \quad -F + F_A + F_B = 0$ ,
3.  $\sum M_B = 0 \quad -M_B - F \cdot a + M = 0$ .

Slijedi:  $F_B = F - F_A$ ,  $M_B = -F \cdot a + M = 0$ .

Zadatak je jedanput statički neodređen, jer jest:  $n = k - s = 4 - 3 = 1$ . Za osnovni statički određeni nosač odabran je okvirni konzolni nosač uklanjanjem oslonca u A, slika b), tj. prekobrojna je nepoznata sila:  $X = F_A$ .

4. Poučak o minimumu energije deformiranja jest ( $i = 4$ ):

$$\frac{\partial U}{\partial X} = \frac{1}{EI_y} \left[ \sum_{i=1}^4 \left( \int_0^{l_i} M_b(x_i) \cdot \frac{\partial M_b(x_i)}{\partial X} dx_i \right) \right] = 0 \cdot EI_y$$

Za određivanje vodoravnih i vertikalnih pomaka te kuta zakreta u zadanim točkama okvirnog nosača, prema drugom Castiglianovom poučku potrebno je dodati "nulte sile" u tim točkama. Njihov utjecaj je u derivacijama po tim silama, te su one u momentima savijanja duž konture okvirnog nosača, slika b).

Momenti savijanja duž konture nosača  $M_b(x_i) = M_y(x_i)$  i potrebne derivacije jesu:

Momenti savijanja $M_b(x_i)$ dijelova nosača:	$\frac{\partial M_b(x_i)}{\partial X}$	$\frac{\partial M_b(x_i)}{\partial V_C}$	$\frac{\partial M_b(x_i)}{\partial V_D}$	$\frac{\partial M_b(x_i)}{\partial H_D}$	$\frac{\partial M_b(x_i)}{\partial M_C}$
$M_b(x_1) = M + V_C \cdot x_1 + M_C$	0	$x_1$	0	0	1
$M_b(x_2) = M - X \cdot x_2 + V_C \cdot (a + x_2) + M_C$	$-x_2$	$(a + x_2)$	0	0	1
$M_b(x_3) = M - X \cdot a + V_C \cdot 2a + M_C + H_D \cdot x_3$	$-a$	$2a$	0	$x_3$	1
$M_b(x_4) = M - X \cdot (a - x_4) - F \cdot x_4 + H_D \cdot a + V_C \cdot (2a - x_4) + M_C - V_D \cdot x_4$	$(x_4 - a)$	$(2a - x_4)$	$-x_4$	$a$	1

Moment savijanja  $M_b(x_i) = M_y(x_i)$  uzet je pozitivan, ako on na strani dijela nosača označenom crtkanom linijom, slika b), izaziva rastezna (vlačna) napreznja.

Uvrštavanjem izraza za momente savijanja  $M_b(x_i)$  i derivacije  $\frac{\partial M_b(x_i)}{\partial X}$  iz tablice u izraz (4), uz dodane "sile"  $V_C = V_D = H_D = M_C = 0$ , sređivanjem slijedi vrijednost nepoznate sile  $X$  (vertikalna reakcija veze u osloncu A):

$$\int_0^a (-X \cdot x_2 + F \cdot a) \cdot (-x_2) dx_2 + \int_0^a (F \cdot a - X \cdot a) \cdot (-a) dx_3 + \int_0^a [-X \cdot (a - x_4) - F \cdot x_4 + F \cdot a] \cdot (x_4 - a) dx_4 = 0.$$

Integriranjem i sređivanjem izraza te dijeljenjem s  $a^3$ , slijedi:

$$\frac{5}{3}X - \frac{11}{6} \cdot F = 0 \rightarrow \boxed{X = \frac{11}{10}F = F_A}.$$

Komponente reakcije veza u osloncu B jesu:

$$F_B = F - F_A = -\frac{1}{10}F \quad (\downarrow), \quad M_B = 0.$$

Sređeni momenti savijanja duž konture okvirnog nosača jesu:

$$M_b(x_1) = M = F \cdot a,$$

$$M_b(x_2) = M - F_A \cdot x_2 = F \cdot \left( a - \frac{11}{10}x_2 \right),$$

$$M_b(x_3) = M - F_A \cdot a = -\frac{1}{10}F \cdot a,$$

$$M_b(x_4) = M - F \cdot x_4 - F_A \cdot (a - x_4) = \frac{1}{10}F \cdot (x_4 - a).$$

Za određivanje deformacija okvirnog nosača: vertikalnih pomaka u točkama C i D (i E), vodoravnog pomaka u D (u C i u osloncu A) te kutnog zakreta u C, prema drugom Castiglianovom poučku potrebno je dodati "nulte sile" (sile ili momente) u tim točkama. Njihov utjecaj je u derivacijama momenata savijanja po tim silama, te su one izračunate u momentima savijanja duž konture okvirnog nosača, tablica i slika b).

Vertikalni pomak nosača u točki C jest:

$$w_C = \left( \frac{\partial U}{\partial V_C} \right)_{V_C=0} = \frac{1}{EI_y} \left[ \sum_{i=1}^4 \left( \int_0^{l_i} M_b(x_i) \cdot \frac{\partial M_b(x_i)}{\partial V_C} dx_i \right) \right] = \frac{F}{EI_y} \left\{ \int_0^a a \cdot x_1 dx_1 + \int_0^a \left( a - \frac{11}{10}x_2 \right) \cdot (a + x_2) dx_2 + \int_0^a \left( -\frac{1}{10}a \right) \cdot 2a dx_3 + \frac{1}{10} \cdot \int_0^a (x_4 - a) \cdot (2a - x_4) dx_4 \right\} = \frac{4}{5} \cdot \frac{Fa^3}{EI_y} \quad (\downarrow).$$

Vertikalni pomak nosača u točki D (i E) jest:

$$w_D = \left( \frac{\partial U}{\partial V_D} \right)_{V_D=0} = \frac{1}{EI_y} \left[ \sum_{i=1}^4 \left( \int_0^{l_i} M_b(x_i) \cdot \frac{\partial M_b(x_i)}{\partial V_D} dx_i \right) \right] = \frac{F}{EI_y} \cdot \frac{1}{10} \cdot \int_0^a (x_4 - a) \cdot (-x_4) dx_4 = \frac{1}{60} \cdot \frac{Fa^3}{EI_y} = w_E \quad (\downarrow).$$

Vodoravni pomak nosača u točki D (u C i na mjestu oslonca A) jest:

$$u_D = \left( \frac{\partial U}{\partial H_D} \right)_{H_D=0} = \frac{1}{EI_y} \left[ \sum_{i=1}^4 \left( \int_0^{l_i} M_b(x_i) \cdot \frac{\partial M_b(x_i)}{\partial H_D} dx_i \right) \right] = \frac{F}{EI_y} \cdot \frac{1}{10} \left\{ \int_0^a (-a) \cdot x_3 dx_3 + \int_0^a (x_4 - a) \cdot a dx_4 \right\} =$$

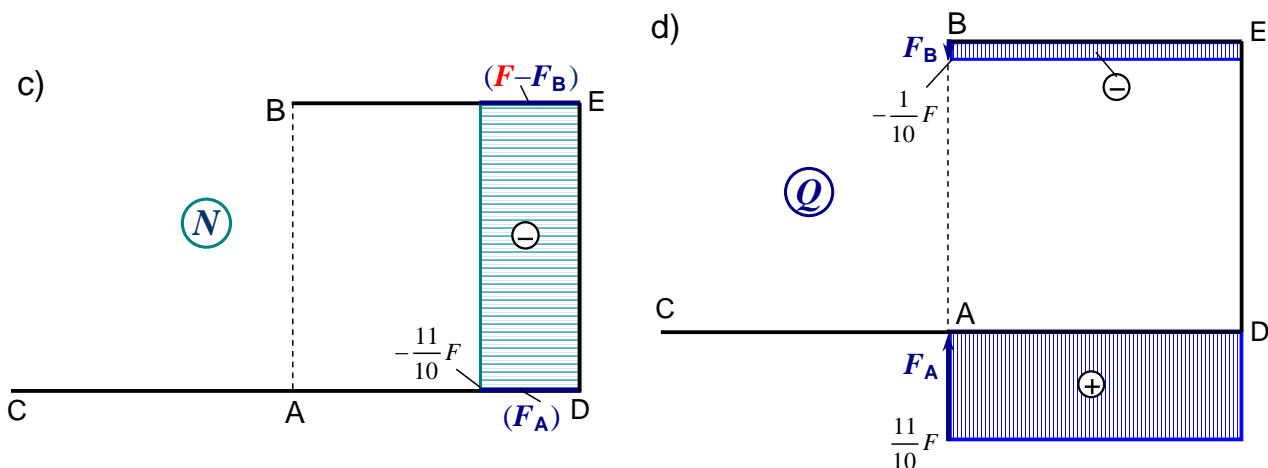
$$= -\frac{1}{10} \cdot \frac{Fa^3}{EI_y} = u_A = u_C \quad (\leftarrow).$$

Kutni zakret nosača u točki C jest:

$$\alpha_C = \left( \frac{\partial U}{\partial M_C} \right)_{M_C=0} = \frac{1}{EI_y} \left[ \sum_{i=1}^4 \left( \int_0^{l_i} M_b(x_i) \cdot \frac{\partial M_b(x_i)}{\partial M_C} dx_i \right) \right] = \frac{F}{EI_y} \left\{ \int_0^a a \cdot 1 \cdot dx_1 + \int_0^a \left( a - \frac{11}{10} x_2 \right) \cdot 1 \cdot dx_2 + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{10} \cdot \int_0^a (-a) \cdot 1 \cdot dx_3 + \frac{1}{10} \cdot \int_0^a (x_4 - a) \cdot 1 \cdot dx_4 \right\} = \frac{13}{10} \cdot \frac{Fa^2}{EI_y} \quad (\curvearrowleft).$$

Dijagrami unutarnjih uzdužnih i poprečnih sila duž konture okvirnog nosača:



Momenti savijanja u karakterističnim točkama okvirnog nosača jesu:

$$M_{bA} = M_{bC} = M = Fa, \quad M_{bB} = 0, \quad M_{bD} = M - F_A \cdot a = -\frac{1}{10}Fa, \quad M_{bE} = F_B \cdot a = -\frac{1}{10}Fa.$$

Dijagram momenata savijanja duž konture nosača i elastična linija okvirnog nosača:

