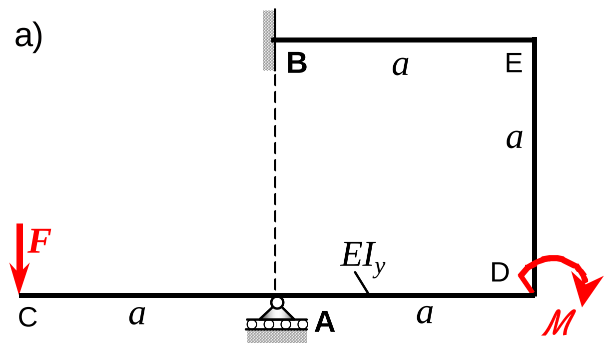
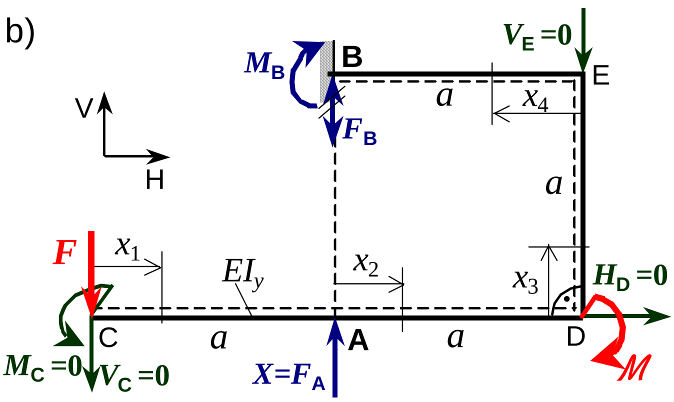
4. Zadatak: Statički neodređeni ravninski okvirni nosač



Za statički neodređeni ravninski okvirni nosač ABCDE zadan i opterećen prema slici a) treba:

- odrediti reakcije veza u osloncima A i B
- odrediti vertikalne pomake u točkama C i E ($w_C = ?$, $w_E = ?$)
- vodoravni pomak u točki D ($u_D = ?$)
- kutni zakret u točki C ($\alpha_C = ?$)
- skicirati i kotirati dijagrame uzdužnih i poprečnih sila te momenta savijanja duž konture nosača.

Zadano: F, a, $\mathcal{M} = F \cdot a$, $EI_y = \text{konst.}$



Rješenje:

Jednadžbe ravnoteže za okvirni nosač, slika b), jesu:

1. $\sum F_H = 0 \quad F_{BH} = 0$,
2. $\sum F_V = 0 \quad -F + F_A + F_B = 0$,
3. $\sum M_B = 0 \quad -M_B + F \cdot a - \mathcal{M} = 0$.

Slijedi: $F_B = F - F_A$, $M_B = F \cdot a - \mathcal{M} = 0$.

Zadatak je jedanput statički neodređen, jer jest: $n = k - s = 4 - 3 = 1$. Za osnovni statički određeni nosač odabran je okvirni konzolni nosač uklanjanjem oslonca u A, slika b), tj. prekobrojna je nepoznata sila: $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{F}_A$.

4. Poučak o minimumu energije deformiranja jest ($i = 4$):

$$\frac{\partial U}{\partial X} = \frac{1}{EI_y}\left[\sum_{i=1}^{4}\left(\int_0^{l_i} M_b(x_i) \cdot \frac{\partial M_b(x_i)}{\partial X}\,\mathrm{d}x_i\right)\right] = 0 \,/\cdot EI_y$$

Za određivanje vodoravnih i vertikalnih pomaka te kuta zakreta u zadanim točkama okvirnog nosača, prema drugom Castiglianovom poučku potrebno je dodati ″nulte sile″ u tim točkama. Njihov utjecaj je u derivacijama po tim silama, te su one u momentima savijanja duž konture okvirnog nosača, slika b).

Momenti savijanja duž konture nosača $M_b(x_i) = M_y(x_i)$ i potrebne derivacije jesu:

Momenti savijanja $M_b(x_i)$ dijelova nosača:	$\frac{\partial M_b(x_i)}{\partial X}$	$\frac{\partial M_b(x_i)}{\partial V_C}$	$\frac{\partial M_b(x_i)}{\partial V_E}$	$\frac{\partial M_b(x_i)}{\partial H_D}$	$\frac{\partial M_b(x_i)}{\partial M_C}$
$M_b(x_1) = F \cdot x_1 + V_C \cdot x_1 + M_C$	0	x_1	0	0	1
$M_b(x_2) = F \cdot (a + x_2) - X \cdot x_2 + V_C \cdot (a + x_2) + M_C$	$-x_2$	$(a + x_2)$	0	0	1
$M_b(x_3) = F \cdot 2a - \mathcal{M} - X \cdot a + V_C \cdot 2a + M_C + H_D \cdot x_3$	$-a$	$2a$	0	x_3	1
$M_b(x_4) = F \cdot (2a - x_4) - X \cdot (a - x_4) - \mathcal{M} + H_D \cdot a + V_C \cdot (2a - x_4) + M_C - V_E \cdot x_4$	$(x_4 - a)$	$(2a - x_4)$	$-x_4$	a	1

Moment savijanja $M_b(x_i) = M_y(x_i)$ uzet je pozitivan, ako on na strani dijela nosača označenom crtkanom linijom, slika b), izaziva rastezna (vlačna) naprezanja.

Uvrštavanjem izraza za momente savijanja $M_\mathrm{b}(x_i)$ i derivacije $\dfrac{\partial M_\mathrm{b}(x_i)}{\partial X}$ iz tablice u izraz (4), uz dodane "sile" $V_\mathrm{C} = V_\mathrm{E} = H_\mathrm{D} = M_\mathrm{C} = 0$, sređivanjem slijedi vrijednost nepoznate sile $\boldsymbol{X}$ (vertikalna reakcija veze u osloncu A):

$$\int_0^a \left[-X\cdot x_2 + F\cdot(a+x_2)\right]\cdot(-x_2)\,\mathrm{d}x_2 + \int_0^a \left(F\cdot a - X\cdot a\right)\cdot(-a)\,\mathrm{d}x_3 +$$
$$+\int_0^a \left[-X\cdot(a-x_4) + F\cdot(2a-x_4) - \mathcal{M}\right]\cdot(x_4-a)\,\mathrm{d}x_4 = 0.$$

Integriranjem i sređivanjem izraza te dijeljenjem s a^3, slijedi:

$$\frac{5}{3}X - \frac{13}{6}\cdot F = 0 \quad \rightarrow \quad \boxed{X = \frac{13}{10}F = F_\mathrm{A}}.$$

Komponente reakcije veza u osloncu B jesu:

$$F_\mathrm{B} = F - F_\mathrm{A} = -\frac{3}{10}F \;\;(\downarrow), \quad M_\mathrm{B} = 0.$$

Sređeni momenti savijanja duž konture okvirnog nosača jesu:

$$M_\mathrm{b}(x_1) = F\cdot x_1,$$
$$M_\mathrm{b}(x_2) = F\cdot(a+x_2) - F_\mathrm{A}\cdot x_2 = F\cdot\left(a - \frac{3}{10}x_2\right),$$
$$M_\mathrm{b}(x_3) = F\cdot a - F_\mathrm{A}\cdot a = -\frac{3}{10}F\cdot a,$$
$$M_\mathrm{b}(x_4) = F\cdot(a-x_4) - F_\mathrm{A}\cdot(a-x_4) = \frac{3}{10}F\cdot(x_4-a).$$

Za određivanje deformacija okvirnog nosača: vertikalnih pomaka u točkama C i E (i D), vodoravnog pomaka u D (u C i oslonca A) te kutnog zakreta u C, prema drugom Castiglianovom poučku potrebno je dodati ″nulte sile" (sile ili momente) u tim točkama. Njihov utjecaj je u derivacijama momenata savijanja po tim silama, te su one izračunate u momentima savijanja duž konture okvirnog nosača, tablica i slika b).

Vertikalni pomak nosača na mjestu C jest:

$$w_\mathrm{C} = \left(\frac{\partial U}{\partial V_\mathrm{C}}\right)_{V_\mathrm{C}=0} = \frac{1}{EI_y}\left[\sum_{i=1}^{4}\left(\int_0^{l_i} M_\mathrm{b}(x_i)\cdot\frac{\partial M_\mathrm{b}(x_i)}{\partial V_\mathrm{C}}\mathrm{d}x_i\right)\right] = \frac{F}{EI_y}\left\{\int_0^a x_1\cdot x_1\,\mathrm{d}x_1 + \int_0^a\left(a-\frac{3}{10}x_2\right)\cdot(a+x_2)\,\mathrm{d}x_2 +\right.$$
$$\left.+\int_0^a\left(-\frac{3}{10}a\right)\cdot 2a\,\mathrm{d}x_3 + \frac{3}{10}\cdot\int_0^a (x_4-a)\cdot(2a-x_4)\,\mathrm{d}x_4\right\} = \frac{11}{15}\cdot\frac{Fa^3}{EI_y}\;\;(\downarrow).$$

Vertikalni pomak nosača na mjestu E (i D) jest:

$$w_\mathrm{E} = \left(\frac{\partial U}{\partial V_\mathrm{E}}\right)_{V_\mathrm{E}=0} = \frac{1}{EI_y}\left[\sum_{i=1}^{4}\left(\int_0^{l_i} M_\mathrm{b}(x_i)\cdot\frac{\partial M_\mathrm{b}(x_i)}{\partial V_\mathrm{E}}\mathrm{d}x_i\right)\right] = \frac{F}{EI_y}\cdot\frac{3}{10}\cdot\int_0^a (x_4-a)\cdot(-x_4)\,\mathrm{d}x_4 = \frac{1}{20}\cdot\frac{Fa^3}{EI_y}\;\;(\downarrow).$$

Vodoravni pomak nosača u D (u C i na mjestu oslonca A) jest:

$$u_\mathrm{D} = \left(\frac{\partial U}{\partial H_\mathrm{D}}\right)_{H_\mathrm{D}=0} = \frac{1}{EI_y}\left[\sum_{i=1}^{4}\left(\int_0^{l_i} M_\mathrm{b}(x_i)\cdot\frac{\partial M_\mathrm{b}(x_i)}{\partial H_\mathrm{D}}\mathrm{d}x_i\right)\right] = \frac{F}{EI_y}\cdot\frac{3}{10}\left\{\int_0^a(-a)\cdot x_3\,\mathrm{d}x_3 + \int_0^a (x_4-a)\cdot a\,\mathrm{d}x_4\right\} =$$

$$= -\frac{3}{10}\cdot\frac{Fa^3}{EI_y} = u_{\mathrm{A}} = u_{\mathrm{C}} \quad (\leftarrow).$$

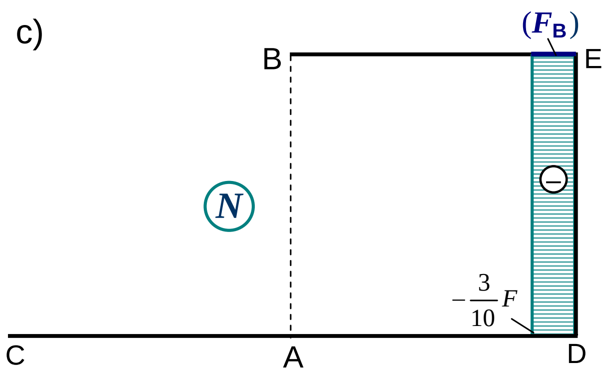
Kutni zakret nosača na mjestu C jest:

$$\alpha_{\mathrm{C}} = \left(\frac{\partial U}{\partial M_{\mathrm{C}}}\right)_{M_{\mathrm{C}}=0} = \frac{1}{EI_y}\left[\sum_{i=1}^{4}\left(\int_0^{l_i} M_{\mathrm{b}}(x_i)\cdot\frac{\partial M_{\mathrm{b}}(x_i)}{\partial M_{\mathrm{C}}}\mathrm{d}x_i\right)\right] = \frac{F}{EI_y}\left\{\int_0^a x_1\cdot 1\cdot\mathrm{d}x_1 + \int_0^a\left(a-\frac{3}{10}x_2\right)\cdot 1\cdot\mathrm{d}x_2 + \right.$$

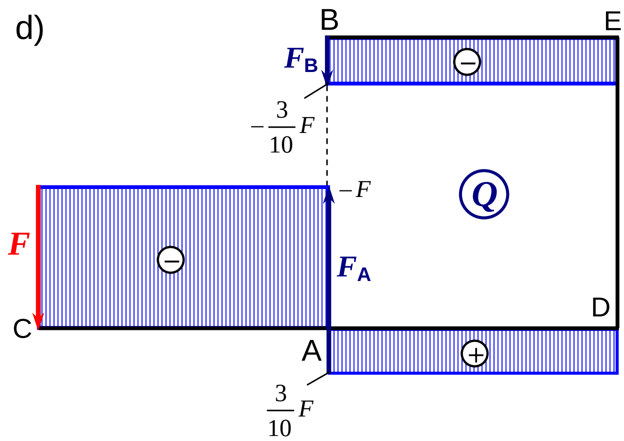
$$\left. + \frac{3}{10}\cdot\int_0^a(-a)\cdot 1\cdot\mathrm{d}x_3 + \frac{3}{10}\cdot\int_0^a(x_4-a)\cdot 1\cdot\mathrm{d}x_4\right\} = \frac{9}{10}\cdot\frac{Fa^2}{EI_y} \quad (\circlearrowleft).$$

Dijagrami unutarnjih uzdužnih i poprečnih sila duž konture okvirnog nosača:

c)



d)



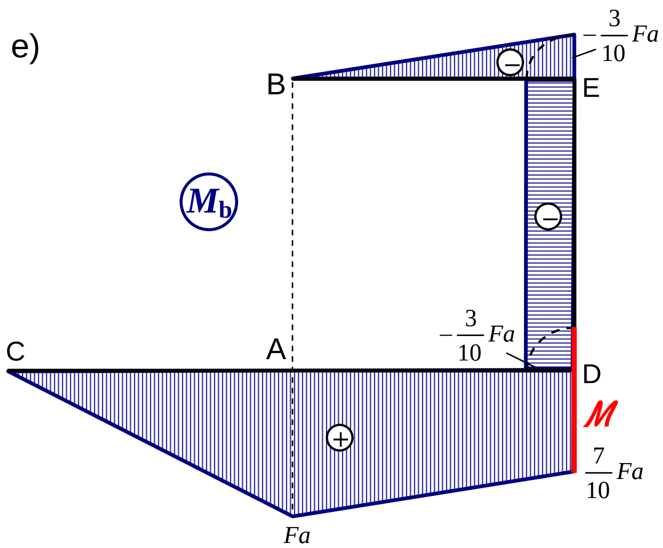
Momenti savijanja u karakterističnim točkama okvirnog nosača jesu:

$$M_{\mathrm{bA}} = F\,a,\quad M_{\mathrm{bB}} = 0,\quad (M_{\mathrm{bD}})_{\mathrm{L}} = 2F\cdot a - F_{\mathrm{A}}\cdot a = \frac{7}{10}F\,a\,,\quad (M_{\mathrm{bD}})_{\mathrm{D}} = (M_{\mathrm{bD}})_{\mathrm{L}} - \mathcal{M} = -\frac{3}{10}F\,a,$$

$$M_{\mathrm{bC}} = 0,\quad M_{\mathrm{bE}} = -F_{\mathrm{B}}\cdot a = -\frac{3}{10}F\,a\,.$$

Dijagram momenata savijanja duž konture nosača i elastična linija okvirnog nosača:

e)



f)