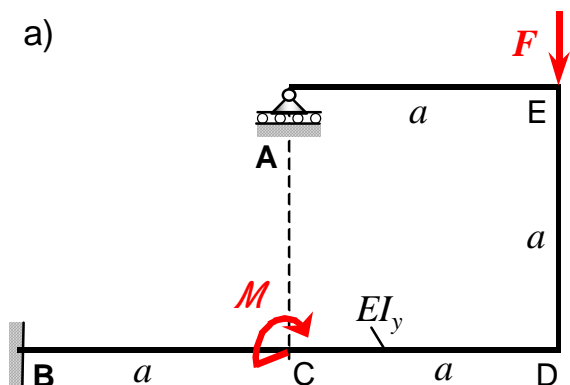


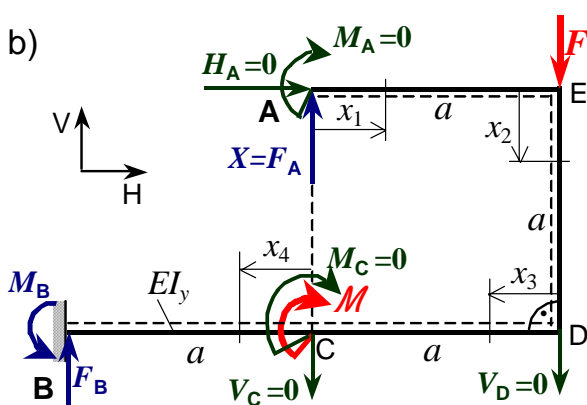
3. Zadatak: Statički neodređeni ravninski okvirni nosač



Za statički neodređeni ravninski okvirni nosač ABCDE zadan i opterećen prema slici a) treba:

- odrediti reakcije veza u osloncima A i B
- odrediti vertikalne pomake u točkama C i D ($w_C = ?$, $w_D = ?$)
- vodoravni pomak oslonca A ($u_A = ?$)
- kutne zakrete u točkama A i C (α_A , $\alpha_C = ?$)
- skicirati i kotirati dijagrame uzdužnih i poprečnih sila te momenta savijanja duž konture nosača.

Zadano: F , a , $M = F \cdot a$, $EI_y = \text{konst.}$



Rješenje:

Jednadžbe ravnoteže za okvirni nosač,

slika b), jesu:

1. $\sum F_H = 0 \quad F_{BH} = 0$,
2. $\sum F_V = 0 \quad -F + F_A + F_B = 0$,
3. $\sum M_B = 0 \quad M_B + F_A \cdot a - 2F \cdot a - M = 0$.

Slijedi: $F_B = F - F_A$,

$$M_B = 2F \cdot a + M - F_A \cdot a = 3F \cdot a - F_A \cdot a.$$

Zadatak je jedanput statički neodređen, jer jest: $n = k - s = 4 - 3 = 1$. Za osnovni statički određeni nosač odabran je okvirni konzolni nosač uklaňanjem oslonca u A, slika b), tj. prekobrojna je nepoznata sila: $X = F_A$.

4. Poučak o minimumu energije deformiranja jest ($i = 4$):

$$\frac{\partial U}{\partial X} = \frac{1}{EI_y} \left[\sum_{i=1}^4 \left(\int_0^{l_i} M_b(x_i) \cdot \frac{\partial M_b(x_i)}{\partial X} dx_i \right) \right] = 0 \cdot EI_y$$

Za određivanje vodoravnih i vertikalnih pomaka te kuta zakreta u zadanim točkama okvirnog nosača, prema drugom Castiglianovom poučku potrebno je dodati "nulte sile" u tim točkama. Njihov utjecaj je u derivacijama po tim silama, te su one u momentima savijanja duž konture okvirnog nosača, slika b).

Momenti savijanja duž konture nosača $M_b(x_i) = M_y(x_i)$ i potrebne derivacije jesu:

Momenti savijanja $M_b(x_i)$ dijelova nosača:	$\frac{\partial M_b(x_i)}{\partial X}$	$\frac{\partial M_b(x_i)}{\partial V_C}$	$\frac{\partial M_b(x_i)}{\partial V_D}$	$\frac{\partial M_b(x_i)}{\partial H_A}$	$\frac{\partial M_b(x_i)}{\partial M_A}$	$\frac{\partial M_b(x_i)}{\partial M_C}$
$M_b(x_1) = X \cdot x_1 + M_A$	x_1	0	0	0	1	0
$M_b(x_2) = X \cdot a + M_A + H_A \cdot x_2$	a	0	0	x_2	1	0
$M_b(x_3) = X \cdot (a - x_3) + F \cdot x_3 + H_A \cdot a + M_A + V_D \cdot x_3$	$(a - x_3)$	0	x_3	a	1	0
$M_b(x_4) = -X \cdot x_4 + F \cdot (a + x_4) + M + H_A \cdot a + M_A + V_C \cdot x_4 + M_C + V_D \cdot (a + x_4)$	$-x_4$	x_4	$(a + x_4)$	a	1	1

Uvrštavanjem izraza za momente savijanja $M_b(x_i)$ i derivacije $\frac{\partial M_b(x_i)}{\partial X}$ iz tablice u izraz (4), uz dodane "sile" $V_C = V_D = H_A = M_A = M_C = 0$, sređivanjem slijedi vrijednost nepoznate sile X (vertikalna reakcija veze u osloncu A):

$$\int_0^a (X \cdot x_1) \cdot x_1 dx_1 + \int_0^a (X \cdot a) \cdot a dx_2 + \int_0^a [X \cdot (a - x_3) + F \cdot x_3] \cdot (a - x_3) dx_3 + \int_0^a [-X \cdot x_4 + F \cdot (a + x_4) + \mathcal{M}] \cdot (-x_4) dx_4 = 0.$$

Integriranjem i sređivanjem izraza te dijeljenjem s a^3 , slijedi:

$$2X - \frac{7}{6} \cdot F = 0 \rightarrow \boxed{X = \frac{7}{12} F = F_A}.$$

Komponente reakcije veza u osloncu B jesu:

$$F_B = F - F_A = \frac{5}{12} F, \quad M_B = 3F \cdot a - F_A \cdot a = \frac{29}{12} F a.$$

Sređeni momenti savijanja duž konture okvirnog nosača jesu:

$$M_b(x_1) = F_A \cdot x_1 = \frac{7}{12} F \cdot x_1,$$

$$M_b(x_2) = F_A \cdot a = \frac{7}{12} F \cdot a,$$

$$M_b(x_3) = F_A \cdot (a - x_3) + F \cdot x_3 = F \cdot \left(\frac{7}{12} a + \frac{5}{12} x_3 \right),$$

$$M_b(x_4) = -F_A \cdot x_4 - F \cdot (a + x_4) + \mathcal{M} = F \cdot \left(2a + \frac{5}{12} x_4 \right).$$

Za određivanje deformacija okvirnog nosača: vertikalnih pomaka u točkama C i D (i E), vodoravnog pomaka oslonca A (i u točki E) te kutnog zakreta u A i C, prema drugom Castiglianovom poučku potrebno je dodati "nulte sile" (sile ili momente) u tim točkama. Njihov utjecaj je u derivacijama momenata savijanja po tim silama, te su one izračunate u momentima savijanja duž konture okvirnog nosača, tablica i slika b).

Vertikalni pomak nosača u točki C jest:

$$w_C = \left(\frac{\partial U}{\partial V_C} \right)_{V_C=0} = \frac{1}{EI_y} \left[\sum_{i=1}^4 \left(\int_0^{l_i} M_b(x_i) \cdot \frac{\partial M_b(x_i)}{\partial V_C} dx_i \right) \right] = \frac{F}{EI_y} \left[\int_0^a \left(2a + \frac{5}{12} x_4 \right) \cdot x_4 dx_4 \right] = \frac{41}{36} \cdot \frac{F a^3}{EI_y} \quad (\downarrow).$$

Vertikalni pomak nosača u točki D (i E) jest:

$$w_D = \left(\frac{\partial U}{\partial V_D} \right)_{V_D=0} = \frac{1}{EI_y} \left[\sum_{i=1}^4 \left(\int_0^{l_i} M_b(x_i) \cdot \frac{\partial M_b(x_i)}{\partial V_D} dx_i \right) \right] = \frac{F}{EI_y} \left\{ \int_0^a \left(\frac{7}{12} a + \frac{5}{12} x_3 \right) \cdot x_3 dx_3 + \int_0^a \left(2a + \frac{5}{12} x_4 \right) \cdot (a + x_4) dx_4 \right\} = \frac{34}{9} \cdot \frac{F a^3}{EI_y} = 3,778 \cdot \frac{F a^3}{EI_y} = w_E \quad (\downarrow).$$

Vodoravni pomak nosača na mjestu oslonca A (u C i D) jest:

$$u_A = \left(\frac{\partial U}{\partial H_A} \right)_{H_A=0} = \frac{1}{EI_y} \left[\sum_{i=1}^4 \left(\int_0^{l_i} M_b(x_i) \cdot \frac{\partial M_b(x_i)}{\partial H_A} dx_i \right) \right] = \frac{F}{EI_y} \left[\int_0^a \frac{7}{12} a \cdot x_2 dx_2 + \int_0^a \left(\frac{7}{12} a + \frac{5}{12} x_3 \right) \cdot a dx_3 + \right.$$

$$+ \int_0^a \left(2a + \frac{5}{12} x_4 \right) \cdot a dx_4 \Big] = \frac{55}{24} \cdot \frac{Fa^3}{EI_y} = 2,292 \cdot \frac{Fa^3}{EI_y} = u_E \quad (\rightarrow).$$

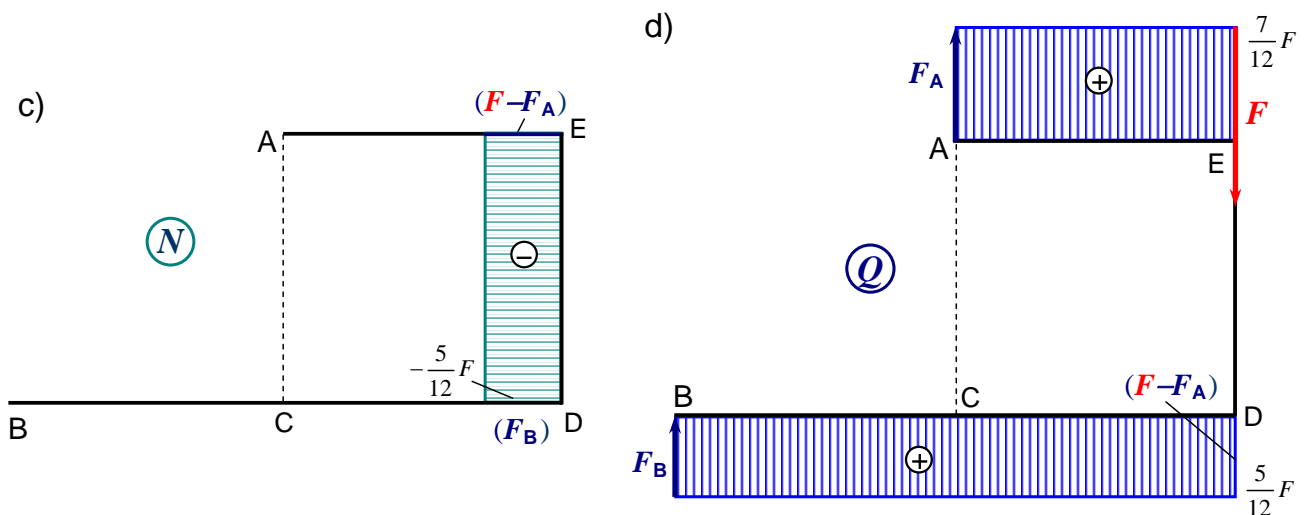
Kutni zakret nosača na mjestu oslonca A jest:

$$\alpha_A = \left(\frac{\partial U}{\partial M_A} \right)_{M_A=0} = \frac{1}{EI_y} \left[\sum_{i=1}^4 \left(\int_0^{l_i} M_b(x_i) \cdot \frac{\partial M_b(x_i)}{\partial M_A} dx_i \right) \right] = \frac{F}{EI_y} \left\{ \int_0^a \frac{7}{12} x_1 \cdot 1 \cdot dx_1 + \int_0^a \frac{7}{12} a \cdot 1 \cdot dx_2 + \int_0^a \left(\frac{7}{12} a + \frac{5}{12} x_3 \right) \cdot 1 \cdot dx_3 + \int_0^a \left(2a + \frac{5}{12} x_4 \right) \cdot 1 \cdot dx_4 \right\} = \frac{93}{24} \cdot \frac{Fa^2}{EI_y} \quad (\curvearrow).$$

Kutni zakret nosača u točki C jest:

$$\alpha_C = \left(\frac{\partial U}{\partial M_C} \right)_{M_C=0} = \frac{1}{EI_y} \left[\sum_{i=1}^4 \left(\int_0^{l_i} M_b(x_i) \cdot \frac{\partial M_b(x_i)}{\partial M_C} dx_i \right) \right] = \frac{F}{EI_y} \int_0^a \left(2a + \frac{5}{12} x_4 \right) \cdot 1 \cdot dx_4 = \frac{53}{24} \cdot \frac{Fa^2}{EI_y} \quad (\curvearrow).$$

Dijagrami unutarnjih uzdužnih i poprečnih sila duž konture okvirnog nosača:



Momenti savijanja u karakterističnim točkama okvirnog nosača jesu:

$$M_{bA} = 0, \quad M_{bB} = \frac{29}{12} Fa, \quad M_{bE} = F_A \cdot a = \frac{7}{12} Fa = M_{bD}, \quad (M_{bC})_L = M_B - F_B \cdot a = 2Fa,$$

$$(M_{bC})_D = (M_{bC})_L - M = Fa.$$

Dijagram momenata savijanja duž konture nosača i elastična linija okvirnog nosača:

