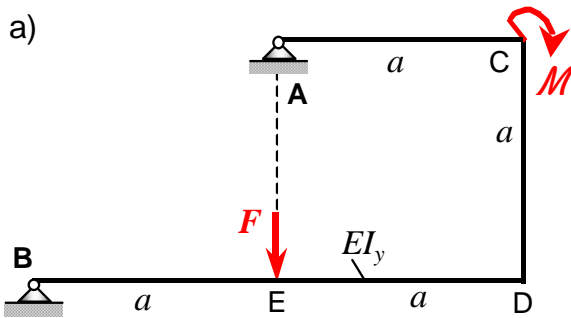


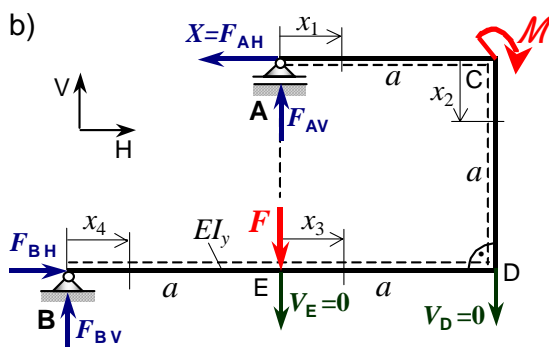
1. Zadatak: Statički neodređeni ravninski okvirni nosač



Za statički neodređeni ravninski okvirni nosač ABCDE zadan i opterećen prema slici a) treba:

- odrediti reakcije veza u osloncima A i B
- odrediti vertikalne pomake u točkama D i E ($w_D = ?$, $w_E = ?$)
- skicirati i kotirati dijagrame uzdužnih i poprečnih sila te momenta savijanja duž konture nosača.

Zadano: F , a , $M = F \cdot a$, $EI_y = \text{konst.}$

**Rješenje:**

Jednadžbe ravnoteže za okvirni nosač, slika b), jesu:

$$1. \sum F_H = 0 \quad -F_{AH} + F_{BH} = 0 \rightarrow F_{BH} = F_{AH},$$

$$2. \sum F_V = 0 \quad F_{AV} + F_{BV} - F - V_D - V_E = 0,$$

$$3. \sum M_B = 0 \quad F_{AV} \cdot a + F_{AH} \cdot a - F \cdot a - M - V_D \cdot 2a - V_E \cdot a = 0 / : a$$

$$\text{Slijedi: } F_{AV} = 2F - F_{AH} + 2V_D + V_E,$$

$$F_{BV} = F - F_{AV} + V_D + V_E = -F + F_{AH} - V_D.$$

Zadatak je jedanput statički neodređen, jer jest: $n = k - s = 4 - 3 = 1$. Za osnovni statički određeni nosač odabran je okvirni nosač na dva oslonca, s vodoravno pomičnim osloncem u A, slika b), tj. prekobrojna nepoznata je sila: $X = F_{AH}$.

4. Poučak o minimumu energije deformiranja jest ($i = 4$):

$$\frac{\partial U}{\partial X} = \frac{1}{EI_y} \left[\sum_{i=1}^4 \left(\int_0^{l_i} M_b(x_i) \cdot \frac{\partial M_b(x_i)}{\partial X} dx_i \right) \right] = 0 / \cdot EI_y$$

Za određivanje vertikalnih pomaka okvirnog nosača u točkama D i E prema drugom Castiglianovom poučku, potrebno je dodati "nulte sile" u tim točkama. Njihov utjecaj je u derivacijama po tim silama, te su one izračunate u reakcijama i u momentima savijanja duž konture okvirnog nosača, slika b).

Momenti savijanja duž konture nosača $M_b(x_i) = M_y(x_i)$ i potrebne derivacije jesu:

Momenti savijanja $M_b(x_i)$ dijelova okvirnog nosača:	$\frac{\partial M_b(x_i)}{\partial X}$	$\frac{\partial M_b(x_i)}{\partial V_D}$	$\frac{\partial M_b(x_i)}{\partial V_E}$
$M_b(x_1) = F_{AV} \cdot x_1 = 2F \cdot x_1 - X \cdot x_1 + 2V_D \cdot x_1 + V_E \cdot x_1$	$-x_1$	$2x_1$	x_1
$M_b(x_2) = F_{AV} \cdot a - X \cdot x_2 + M = 3F \cdot a - X \cdot (a + x_2) + 2V_D \cdot a + V_E \cdot a$	$-(a + x_2)$	$2a$	a
$M_b(x_3) = -F_{BV} \cdot (a + x_3) + F \cdot x_3 + V_E \cdot x_3 = F \cdot (a + 2x_3) - X \cdot (a + x_3) + V_D \cdot (a + x_3) + V_E \cdot x_3$	$-(a + x_3)$	$(a + x_3)$	x_3
$M_b(x_4) = -F_{BV} \cdot x_4 = F \cdot x_4 - X \cdot x_4 + V_D \cdot x_4$	$-x_4$	x_4	0

Moment savijanja $M_b(x_i) = M_y(x_i)$ uzet je pozitivan, ako on na strani dijela nosača označenom crtkanom linijom, slika b), izaziva rastezna (vlačna) naprezanja.

Uvrštavanjem izraza za momente savijanja $M_b(x_i)$ i derivacije $\frac{\partial M_b(x_i)}{\partial X}$ iz tablice u izraz (4), uz dodane sile $V_D = 0$ i $V_E = 0$, sređivanjem slijedi vrijednost nepoznate sile X (vodoravna komponenta F_{AH} reakcije veze u osloncu A):

$$\int_0^a (2F \cdot x_1 - X \cdot x_1) \cdot (-x_1) dx_1 + \int_0^a [3F \cdot a - X \cdot (a + x_2)] \cdot [-(a + x_2)] dx_2 + \\ + \int_0^a [F \cdot (a + 2x_3) - X \cdot (a + x_3)] \cdot [-(a + x_3)] dx_3 + \int_0^a (F \cdot x_4 - X \cdot x_4) \cdot (-x_4) dx_4 = 0,$$

integriranjem i sređivanjem izraza te dijeljenjem s a^3 , slijedi:

$$X \cdot \frac{16}{3} = \frac{52}{6} \cdot F \rightarrow \boxed{X = \frac{13}{8} F = F_{AH} = F_{BH}}.$$

Ostale komponente reakcija veza u osloncima A i B jesu:

$$F_{AV} = 2F - F_{AH} = \frac{3}{8} F, \quad F_{BV} = -F + F_{AH} = \frac{5}{8} F.$$

Za određivanje vrijednosti vertikalnog pomaka u točkama D i E rabi se drugi Castiglianov poučak, pri čemu su vrijednosti dodanih sila $V_D = 0$ i $V_E = 0$, a sređeni momenti savijanja duž konture okvirnog nosača jesu:

$$M_b(x_1) = F_{AV} \cdot x_1 = 2F \cdot x_1 - X \cdot x_1 = \frac{3}{8} F \cdot x_1,$$

$$M_b(x_2) = F_{AV} \cdot a - X \cdot x_2 + M = 3F \cdot a - X \cdot (a + x_2) = F \cdot \left(\frac{11}{8} a - \frac{13}{8} x_2 \right),$$

$$M_b(x_3) = -F_{BV} \cdot (a + x_3) + F \cdot x_3 = F \cdot (a + 2x_3) - X \cdot (a + x_3) = F \cdot \left(-\frac{5}{8} a + \frac{3}{8} x_3 \right),$$

$$M_b(x_4) = -F_{BV} \cdot x_4 = F \cdot x_4 - X \cdot x_4 = -\frac{5}{8} F \cdot x_4.$$

Vertikalni pomak nosača u točki D jest:

$$w_D = \left(\frac{\partial U}{\partial V_D} \right)_{V_D=0} = \frac{1}{EI_y} \left[\sum_{i=1}^4 \left(\int_0^{l_i} M_b(x_i) \cdot \frac{\partial M_b(x_i)}{\partial V_D} dx_i \right) \right] = \frac{F}{EI_y} \left[\int_0^a \frac{3}{8} x_1 \cdot 2x_1 dx_1 + \int_0^a \left(\frac{11}{8} a - \frac{13}{8} x_2 \right) \cdot 2a dx_2 + \right. \\ \left. + \int_0^a \left(-\frac{5}{8} a + \frac{3}{8} x_3 \right) \cdot (a + x_3) dx_3 + \int_0^a \left(-\frac{5}{8} x_4 \right) \cdot x_4 dx_4 \right] = \frac{26}{48} \cdot \frac{Fa^3}{EI_y} = \frac{13}{24} \cdot \frac{Fa^3}{EI_y} = w_C \quad (\downarrow).$$

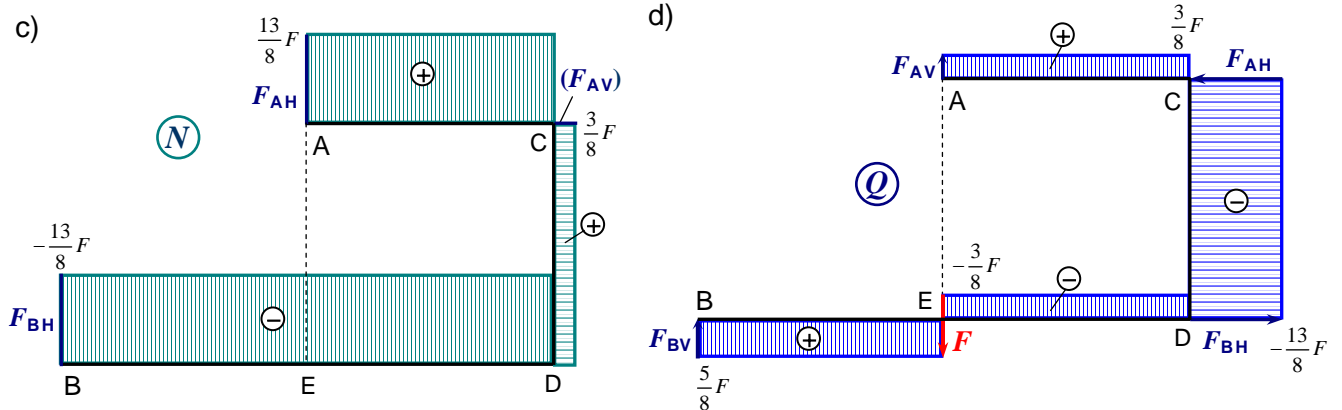
Vertikalni pomak nosača u točki E jest:

$$w_E = \left(\frac{\partial U}{\partial V_E} \right)_{V_E=0} = \frac{1}{EI_y} \left[\sum_{i=1}^4 \left(\int_0^{l_i} M_b(x_i) \cdot \frac{\partial M_b(x_i)}{\partial V_E} dx_i \right) \right] = \frac{F}{EI_y} \left[\int_0^a \frac{3}{8} x_1 \cdot x_1 dx_1 + \int_0^a \left(\frac{11}{8} a - \frac{13}{8} x_2 \right) \cdot a dx_2 + \right. \\ \left. + \int_0^a \left(-\frac{5}{8} a + \frac{3}{8} x_3 \right) \cdot x_3 dx_3 + \int_0^a \left(-\frac{5}{8} x_4 \right) \cdot 0 \cdot dx_4 \right] = \frac{1}{2} \cdot \frac{Fa^3}{EI_y} \quad (\downarrow).$$

Grafički prikazi unutarnjih sila (uzdužnih sila N , poprečnih sila Q i momenata savijanja M_b) duž konture okvirnog nosača dani su na slikama c), d) i e).

Na slici f) dan je prikaz elastične linije kod zadanog opterećenja okvirnog nosača.

Dijagrami uzdužnih i poprečnih sila duž konture okvirnog nosača:



Momenti savijanja u karakterističnim točkama okvirnog nosača jesu:

$$M_{bA} = 0, M_{bB} = 0, (M_{bC})_L = F_{AV} \cdot a = \frac{3}{8} Fa, (M_{bC})_D = (M_{bC})_L + M = \frac{11}{8} Fa,$$

$$M_{bE} = -F_{BV} \cdot a = -\frac{5}{8} Fa, M_{bD} = -F_{BV} \cdot 2a + F \cdot a = -\frac{2}{8} Fa.$$

Dijagram momenata savijanja i elastična linija okvirnog nosača:

