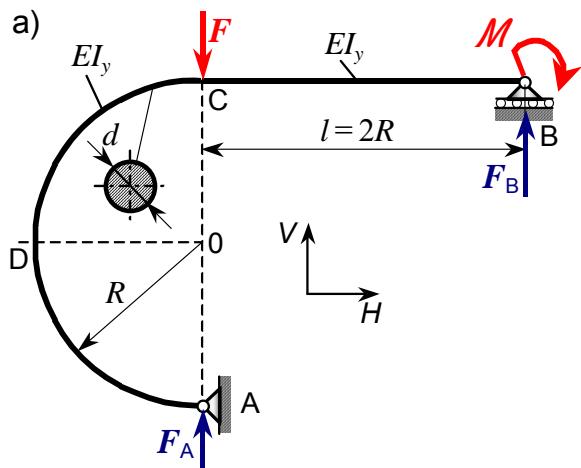


2. Primjer: Energija deformiranja ravninskog zakrivljenog okvirnog nosača

Za staticki određeni ravninski zakrivljeni okvirni nosač ABCD zadan i opterećen prema slici a), izrađen od čelika i punog kružnog poprečnog presjeka, treba odrediti energiju deformiranja za svaki pojedini štap i ukupno.



Zadano:

$$F_1 = 12 \text{ kN}, M = F \cdot R, R = 1,4 \text{ m}, l = 2R = 2,8 \text{ m}, d = 80 \text{ mm}, E = 200 \text{ GPa}, G = 77 \text{ GPa}, k_z = 10/9 \text{ (kružni presjek)}.$$

Geometrijske značajke površine poprečnog presjeka štapova su:

$$A = \frac{\pi d^2}{4} = \frac{\pi \cdot 8^2}{4} = 50,2655 \text{ cm}^2,$$

$$I_y = I = \frac{\pi d^4}{64} = \frac{\pi \cdot 8^4}{64} = 201,062 \text{ cm}^4.$$

Osnova krutost štapova jest:

$$EA = 2 \times 10^{11} \cdot 50,2655 \times 10^{-4} = 1005,31 \times 10^6 \text{ N}.$$

Smična krutost štapova jest:

$$GA = 77 \times 10^9 \cdot 50,2655 \times 10^{-4} = 387,044 \times 10^6 \text{ N}.$$

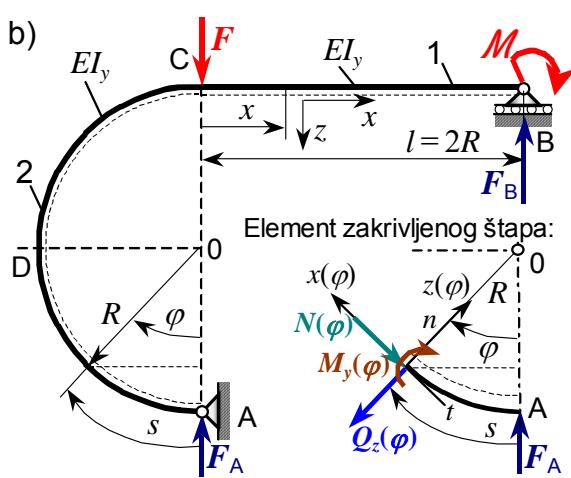
Krutost na savijanje štapova jest:

$$EI = 2 \times 10^{11} \cdot 201,062 \times 10^{-8} = 402,124 \times 10^3 \text{ N} \cdot \text{m}^2.$$

Reakcije u osloncima nosača, slika a), su:

$$1. \sum F_V = F_A + F_B - F = 0, \rightarrow F_A = F - F_B = \frac{F}{2} = 6 \text{ kN},$$

$$2. \sum M_A = F_B \cdot 2R - M = 0 / : 2R \rightarrow F_B = \frac{M}{2R} = \frac{F}{2} = 6 \text{ kN}.$$



Unutarnje sile i momenti savijanja u poprečnim presjecima štapova, slika b), su:

$$0 \leq x \leq l: N(x) = 0, Q(x) = Q_z(x) = F_A - F = -\frac{F}{2},$$

$$M_b(x) = M_y(x) = F_A \cdot x - F \cdot x = -\frac{F}{2} \cdot x,$$

$$0 \leq \varphi \leq \pi: N(\varphi) = -F_A \cdot \sin \varphi = -\frac{F}{2} \cdot \sin \varphi,$$

$$Q(s) = Q_z(\varphi) = -F_A \cdot \cos \varphi = -\frac{F}{2} \cdot \cos \varphi,$$

$$M_b(s) = M_y(\varphi) = -F_A \cdot R \sin \varphi = -\frac{F \cdot R}{2} \cdot \sin \varphi.$$

Na slici b) crtkanom linijom označena je kontura nosača za koju je moment savijanja pozitivan, ako on savija nosač tako da izaziva u krajnjim vlaknima poprečnog presjeka rastezanje (vlačna naprezanja).

Svi štapovi zadanoj okvirnog nosača ABCD imaju jednake konstantne poprečne presjeke i izrađeni su od istog materijala te je izraz za određivanje energije deformiranja zakrivljenog okvirnog nosača:

$$\boxed{U = U_1 + U_2 = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{EA} \int_0^l N^2(x) dx + \frac{k_z}{GA} \int_0^l Q_z^2(x) dx + \frac{1}{EI} \int_0^l M_y^2(x) dx \right] + \frac{1}{2} \left[\frac{1}{EA} \int_s^l N^2(s) ds + \frac{k_z}{GA} \int_s^l Q(s) ds + \frac{1}{EI} \int_s^l M_b^2(s) ds \right], J}$$

Energija deformiranja dijelova zakrivljenog okvirnog nosača

1) Ravni štap BC duljine $l = 2R$:

$$U_1 = \frac{1}{2} \left[\frac{k_z}{GA} \int_0^l Q_z^2(x) dx + \frac{1}{EI} \int_0^l M_y^2(x) dx \right] = \frac{Q_z^2(x) \cdot l}{2GA} k_z + \frac{1}{8EI} \int_0^l F^2 \cdot x^2 \cdot dx = \\ = \frac{F^2 \cdot l}{8GA} k_z + \frac{F^2 \cdot l^3}{24EI} = \frac{12^2 \times 10^6 \cdot 2,8}{8 \cdot 387,044 \times 10^6} \cdot \frac{10}{9} + \frac{12^2 \times 10^6 \cdot 2,8^3}{24 \cdot 402,124 \times 10^3} = 0,145 + 327,541 = 327,686 \text{ J.}$$

2) Kružno zakrivljeni štap ADC (element kružnog luka jest $ds = R \cdot d\varphi$):

$$U_2 = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{EA} \int_0^\pi N^2(\varphi) \cdot R d\varphi + \frac{k_z}{GA} \int_0^\pi Q_z^2(\varphi) \cdot R d\varphi + \frac{1}{EI} \int_0^\pi M_y^2(\varphi) \cdot R d\varphi \right] = \\ = \frac{1}{2} \left[\frac{F^2}{4EA} \int_0^\pi \sin^2 \varphi \cdot R d\varphi + \frac{k_z \cdot F^2}{4GA} \int_0^\pi \cos^2 \varphi \cdot R d\varphi + \frac{F^2 \cdot R^2}{4EI} \int_0^\pi \sin^2 \varphi \cdot R d\varphi \right] = \\ = \frac{1}{2} \left[\frac{F^2 \cdot R}{4EA} \cdot \frac{\pi}{2} + \frac{k_z \cdot F^2 \cdot R}{4GA} \cdot \frac{\pi}{2} + \frac{F^2 \cdot R^3}{4EI} \cdot \frac{\pi}{2} \right] = \\ = \frac{12^2 \times 10^6 \cdot 1,4 \cdot \pi}{16 \cdot 1005,31 \times 10^6} + \frac{12^2 \times 10^6 \cdot 1,4 \cdot \pi}{16 \cdot 387,044 \times 10^6} \cdot \frac{10}{9} + \frac{12^2 \times 10^6 \cdot 1,4^3 \cdot \pi}{16 \cdot 402,124 \times 10^3} = \\ = 0,039 + 0,114 + 129,937 = 193,09 \text{ J.}$$

Ukupna energija deformiranja zakrivljenog ravninskog okvirnog nosača određena je zbrojem energija deformiranja svih pojedinih štapova:

$$U = U_1 + U_2 = 327,686 + 193,09 = 520,776 \text{ J.}$$

Vidi se, da se energije deformiranja od smicanja i od osnog opterećenja u štapovima mogu zanemariti zbog malih vrijednosti u usporedbi s vrijednostima energija deformiranja od savijanja štapova.

Određeni integrali trigonometrijskih funkcija u primjeru očitani su iz priručne [tablice integrala trigonometrijskih funkcija](#) kod kružno zakrivljenih štapova.