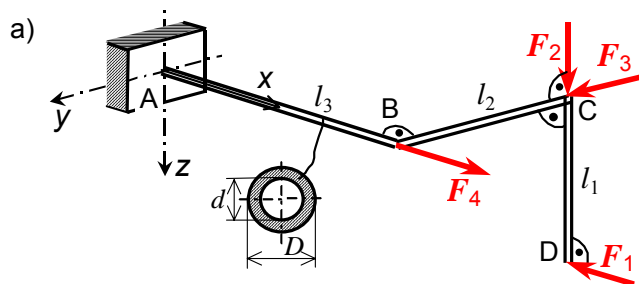


1. Primjer: Energija deformiranja koljenastog štapa prstenastog presjeka

Za koljenasto savijen štapa ABCD zadan i opterećen prema slici a), izrađen od čelika, treba odrediti energiju deformiranja za svaki pojedini štapa i ukupno.

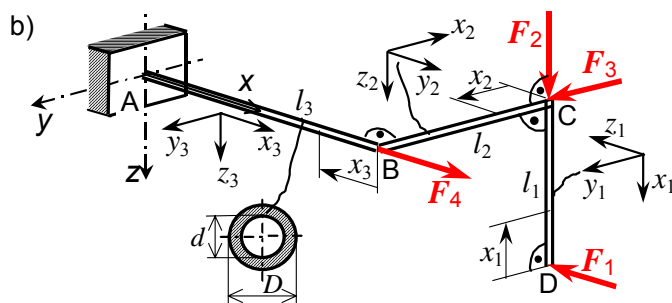


Zadano:

$$F_1 = 9 \text{ kN}, F_2 = 8 \text{ kN}, F_3 = 7 \text{ kN}, \\ F_4 = 160 \text{ kN}, l_1 = 60 \text{ cm}, l_2 = 50 \text{ cm}, \\ l_3 = 140 \text{ cm}, k = d/D = 0,6, D = 120 \text{ mm}, \\ E = 200 \text{ GPa}, G = 78 \text{ GPa}, \\ k_y = k_z \cong 2 \text{ (kružni prsten!)}$$

Svi dijelovi zadanog koljenastog štapa ABCD imaju jednake konstantne poprečne presjeka i izrađeni su od istog materijala te je izraz za određivanje energije deformiranja U_i ravnog štapa duljine l_i :

$$U_i = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{EA} \int_0^{l_i} N^2(x_i) dx_i + \frac{k_z}{GA} \int_0^{l_i} Q_z^2(x_i) dx_i + \frac{k_y}{GA} \int_0^{l_i} Q_y^2(x_i) dx_i + \frac{1}{GI_p} \int_0^{l_i} T^2(x_i) dx_i + \right. \\ \left. + \frac{1}{EI_y} \int_0^{l_i} M_{b_y}^2(x_i) dx_i + \frac{1}{EI_z} \int_0^{l_i} M_{b_z}^2(x_i) dx_i \right], \text{ J}$$



Kako je zadani koljenasti štapa ABCD konstrukcija sastavljena od $n=3$ ravnih štapova, slika b), energija deformiranja konstrukcije određena je zbrojem energija deformiranja svih pojedinih štapova:

$$U = \sum_{i=1}^3 [U_i] = U_1 + U_2 + U_3, \text{ J}.$$

Geometrijske značajke površine poprečnog presjeka štapova su:

$$A = \frac{\pi \cdot D^2}{4} (1 - k^2) = \frac{\pi \cdot 12^2}{4} (1 - 0,6^2) = 72,38 \text{ cm}^2,$$

$$I_y = I_z = \frac{\pi \cdot D^4}{64} (1 - k^4) = \frac{\pi \cdot 12^4}{64} (1 - 0,6^4) = 885,96 \text{ cm}^4 = I, \quad I_p = 2I = 1771,92 \text{ cm}^4.$$

Osa krutost štapova jest:

$$EA = 2 \times 10^{11} \cdot 72,38 \times 10^{-4} = 1447,65 \times 10^6 \text{ N}.$$

Smična krutost štapova jest:

$$GA = 78 \times 10^9 \cdot 72,38 \times 10^{-4} = 564,58 \times 10^6 \text{ N}.$$

Krutost na savijanje štapova jest:

$$EI = 2 \times 10^{11} \cdot 885,96 \times 10^{-8} = 177,192 \times 10^4 \text{ N} \cdot \text{m}^2.$$

Krutost na uvijanje štapova jest:

$$GI_p = 78 \times 10^9 \cdot 1771,92 \times 10^{-8} = 138,21 \times 10^4 \text{ N} \cdot \text{m}^2.$$

Unutarnje sile i momenti u pojedinim štapovima koljenastog štapa ABCD, slika b), su:

1) Štapa CD duljine l_1 :

$$N(x_1) = 0, \quad Q_y(x_1) = 0, \quad Q_z(x_1) = F_1 = 9 \text{ kN}, \quad T(x_1) = 0, \quad M_{b_y}(x_1) = -F_1 \cdot x_1, \quad M_{b_z}(x_1) = 0.$$

2) Štap BC duljine l_2 : $N(x_2) = -F_3 = -7$ kN, $Q_y(x_2) = -F_1 = -9$ kN, $Q_z(x_2) = F_2 = 8$ kN,
 $T(x_2) = F_1 \cdot l_1 = 9 \times 10^3 \cdot 0,6 = 5\,400$ N·m, $M_{by}(x_2) = -F_2 \cdot x_2$, $M_{bz}(x_2) = -F_1 \cdot x_2$.

3) Štap AB duljine l_3 : $N(x_3) = F_4 - F_1 = 160 - 9 = 151$ kN, $Q_y(x_3) = F_3 = 7$ kN,
 $Q_z(x_3) = F_2 = 8$ kN, $T(x_3) = F_2 \cdot l_2 = 8 \times 10^3 \cdot 0,5 = 4\,000$ N·m,
 $M_{by}(x_3) = -(F_1 \cdot l_1 + F_2 \cdot x_3)$, $M_{bz}(x_3) = -F_1 \cdot l_2 + F_3 \cdot x_3$.

Energija deformiranja dijelova koljenastog štapa

1) Štap CD duljine l_1 :

$$U_1 = \frac{1}{2} \left[\frac{Q_z^2(x_1) \cdot l_1}{GA} k_z + \frac{1}{EI} \int_0^{l_1} M_{by}^2(x_1) dx_1 \right] = \frac{F_1^2 \cdot l_1}{2GA} k_z + \frac{1}{2EI} \int_0^{l_1} F_1^2 \cdot x_1^2 \cdot dx_1 =$$

$$= \frac{F_1^2 \cdot l_1}{2GA} k_z + \frac{F_1^2 \cdot l_1^3}{6EI} = \frac{9^2 \times 10^6 \cdot 0,6}{2 \cdot 564,58 \times 10^6} \cdot 2 + \frac{9^2 \times 10^6 \cdot 0,6^3}{6 \cdot 177,192 \times 10^4} =$$

$$= 0,0861 + 1,6457 = 1,7318 \text{ J.}$$

2) Štap BC duljine l_2 , uz $I_y = I_z = I$:

$$U_2 = \frac{1}{2} \left[\frac{N^2(x_2) \cdot l_2}{EA} + \frac{Q_y^2(x_2) \cdot l_2}{GA} k_y + \frac{Q_z^2(x_2) \cdot l_2}{GA} k_z + \frac{T^2(x_2) \cdot l_2}{GI_p} + \frac{1}{EI} \left(\int_0^{l_2} M_{by}^2(x_2) dx_2 + \int_0^{l_2} M_{bz}^2(x_2) dx_2 \right) \right] =$$

$$= \frac{1}{2} \left[\frac{F_3^2 \cdot l_2}{EA} + \frac{F_1^2 \cdot l_2}{GA} k_y + \frac{F_2^2 \cdot l_2}{GA} k_z + \frac{T^2(x_2) \cdot l_2}{GI_p} + \frac{l_2^3}{3EI} (F_2^2 + F_1^2) \right] =$$

$$= \frac{7^2 \times 10^6 \cdot 0,5}{2 \cdot 1447,65 \times 10^6} + \frac{9^2 \times 10^6 \cdot 0,5}{2 \cdot 564,58 \times 10^6} \cdot 2 + \frac{8^2 \times 10^6 \cdot 0,5}{2 \cdot 564,58 \times 10^6} \cdot 2 + \frac{5,4^2 \times 10^6 \cdot 0,5}{2 \cdot 138,21 \times 10^4} +$$

$$+ \frac{0,5^3}{6 \cdot 177,192 \times 10^4} (8^2 + 9^2) \times 10^6 = 0,008462 + 0,071735 + 0,05668 + 5,27458 + 1,70484 = 7,1163 \text{ J.}$$

3) Štap AB duljine l_3 , uz $I_y = I_z = I$:

$$U_3 = \frac{1}{2} \left[\frac{N^2(x_3) \cdot l_3}{EA} + \frac{Q_y^2(x_3) \cdot l_3}{GA} k_y + \frac{Q_z^2(x_3) \cdot l_3}{GA} k_z + \frac{T^2(x_3) \cdot l_3}{GI_p} \right] + \frac{1}{2EI} \left(\int_0^{l_3} M_{by}^2(x_3) dx_3 + \int_0^{l_3} M_{bz}^2(x_3) dx_3 \right) =$$

$$= U_3' + U_3'' = 19,409 + 55,156 = 74,765 \text{ J.}$$

$$U_3' = \frac{151^2 \times 10^6 \cdot 1,4}{2 \cdot 1447,65 \times 10^6} + \frac{7^2 \times 10^6 \cdot 1,4}{2 \cdot 564,58 \times 10^6} \cdot 2 + \frac{8^2 \times 10^6 \cdot 1,4}{2 \cdot 564,58 \times 10^6} \cdot 2 + \frac{4^2 \times 10^6 \cdot 1,4}{2 \cdot 138,21 \times 10^4} =$$

$$= 11,02525 + 0,12151 + 0,1587 + 8,10361 = 19,409 \text{ J.}$$

$$U_3'' = U_{y3}'' + U_{z3}'' = \frac{1}{2EI} \left[\left(\int_0^{l_3} (F_1 \cdot l_1 + F_2 \cdot x_3)^2 dx_3 + \int_0^{l_3} (F_1 \cdot l_2 - F_3 \cdot x_3)^2 dx_3 \right) \right] =$$

$$= \frac{1}{2EI} \left(F_1^2 \cdot l_1^2 \cdot l_3 + F_1 \cdot F_2 \cdot l_1 \cdot l_3^2 + \frac{F_2^2 \cdot l_3^3}{3} + F_1^2 \cdot l_2^2 \cdot l_3 - F_1 \cdot F_3 \cdot l_2 \cdot l_3^2 + \frac{F_3^2 \cdot l_3^3}{3} \right) =$$

$$= \frac{10^6}{2 \cdot 177,192 \times 10^4} \left(9^2 \cdot 0,6^2 \cdot 1,4 + 9 \cdot 8 \cdot 0,6 \cdot 1,4^2 + \frac{8^2 \cdot 1,4^3}{3} + 9^2 \cdot 0,5^2 \cdot 1,4 - 9 \cdot 7 \cdot 0,5 \cdot 1,4^2 + \frac{7^2 \cdot 1,4^3}{3} \right) =$$

$$= 51,931 + 3,225 = 55,156 \text{ J.}$$

Ukupna energija deformiranja konstrukcije određena je zbrojem energija deformiranja svih pojedinih štapova:

$$U = \sum_{i=1}^3 [U_i] = U_1 + U_2 + U_3 = 1,7318 + 7,1163 + 74,565 = 83,413 \text{ J.}$$

Vidi se, da se energije deformiranja od smicanja kao i od osnovog opterećenja u štapovima (izuzetak je štap l_3 gdje je velika vrijednost uzdužne sile), mogu zanemariti zbog malih vrijednosti u usporedbi s vrijednostima energija deformiranja od savijanja i uvijanja štapova.

Iznosi komponentata reakcije veza na mjestu uklještenja A štapa su:

$$F_{Ax} = 151 \text{ kN}, F_{Ay} = 7 \text{ kN}, F_{Az} = 8 \text{ kN}, M_{Ax} = 4\,000 \text{ N}\cdot\text{m}, M_{Ay} = 16\,600 \text{ N}\cdot\text{m}, M_{Az} = 5\,300 \text{ N}\cdot\text{m}.$$

Dijagrami uzdužnih sila u poprečnim presjecima duž konture koljenastog štapa dani su na slikama.

