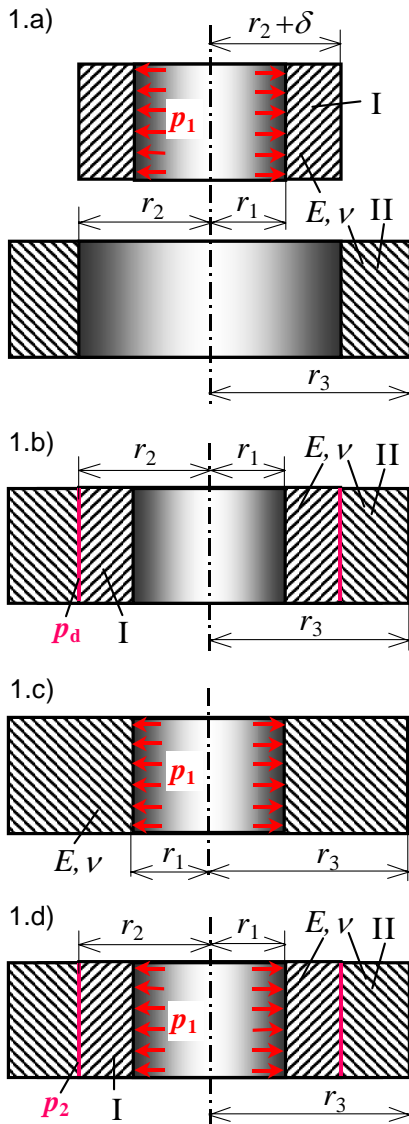


4. Seminarski zadatak: Sastavljena debela cijev opterećena unutarnjim tlakom



Sastavljena debela cijev sastoji se od unutarnje cijevi (I) polumjera r_1 i r_2 , te vanjske cijevi (II) polumjera r_2 i r_3 , slika 1.a). Cijev je opterećena jednolikim unutarnjim tlakom p_1 . Tlak na sastavu cijevi je p_d (nakon prisilnog sastavljanja, a prije opterećivanja cijevi), slika 1.b).

Treba odrediti:

1. vrijednosti radijalnih i cirkularnih napreznja σ_r i σ_φ , uz skice raspodjele napreznja po presjeku cijevi i to:
 - a) za unutarnju (I) i vanjsku cijev (II) opterećene na sastavu cijevi tlakom p_d , slika 1.b)
 - b) za cijev od jednog dijela, polumjera r_1 i r_3 te opterećenu unutarnjim tlakom p_1 , slika 1.c)
 - c) za sastavljenu cijev, polumjera r_1 , r_2 i r_3 opterećenu unutarnjim tlakom p_1 , slika 1.d), ako je zadano:

$$r_1, r_2 = r_1\sqrt{3}, r_3 = r_1\sqrt{7}, p_1, p_d = \frac{1}{8} p_1,$$

2. dopuštenu vrijednost unutarnjeg tlaka p_{1dop} sastavljene cijevi prema teoriji najvećeg posmičnog napreznja τ_{max} , ako je dopušteno napreznje materijala: $\sigma_{dop} = 250 \text{ MPa}$,

3. vrijednost prijeklopa δ na mjestu sastava cijevi kod poznatog dodirnog tlaka p_d , ako je zadano:

$$r_1 = 3 \text{ cm}, p_1 = p_{dop}, E = 200 \text{ GPa}, \nu = 0,3,$$

4. numeričke vrijednosti napreznja σ_r i σ_φ , uz skice raspodjele napreznja te pomake točaka površina sastavljene cijevi, ako je zadano:

$$r_1 = 30 \text{ mm}, r_2 = r_1\sqrt{3}, r_3 = r_1\sqrt{7}, p_d = \frac{1}{8} p_1, p_1 = 1152 \text{ bar}.$$

1. Vrijednosti radijalnih i cirkularnih napreznja u dijelovima cijevi

a) unutarnja (I) i vanjska cijev (II) opterećene na sastavu tlakom p_d , slika 1.b)

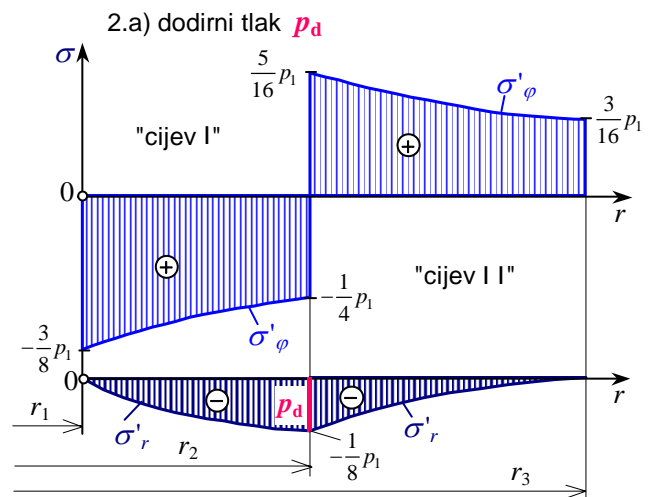
Vrijednosti radijalnih σ_r i cirkularnih napreznja σ_φ određuju se prema [izrazima \(59a\)](#) za unutarnju cijev (I), te prema [izrazima \(59b\)](#) za vanjsku cijev (II), a na slici 2.a) dana je raspodjela napreznja u presjecima cijevi nakon prisilnog spajanja:

- unutarnja cijev (I):

$$(\sigma'_r)_{r=r_1} = 0, (\sigma'_r)_{r=r_2} = -p_d = -\frac{1}{8} p_1,$$

$$(\sigma'_\varphi)_{r=r_1} = -p_d \cdot \frac{2r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} = -\frac{p_1}{8} \cdot \frac{2 \cdot 3}{3-1} = -\frac{3}{8} p_1,$$

$$(\sigma'_\varphi)_{r=r_2} = -p_d \cdot \frac{r_2^2 + r_1^2}{r_2^2 - r_1^2} = -\frac{p_1}{8} \cdot \frac{3+1}{3-1} = -\frac{1}{4} p_1,$$



- vanjska cijev (I I):

$$(\sigma'_r)_{r=r_2} = -p_d = -\frac{1}{8} p_1, \quad (\sigma'_r)_{r=r_3} = 0,$$

$$(\sigma'_\varphi)_{r=r_2} = p_d \cdot \frac{r_3^2 + r_2^2}{r_3^2 - r_2^2} = \frac{p_1}{8} \cdot \frac{7+3}{7-3} = \frac{5}{16} p_1, \quad (\sigma'_\varphi)_{r=r_3} = p_d \cdot \frac{2r_2^2}{r_3^2 - r_2^2} = \frac{p_1}{8} \cdot \frac{2 \cdot 3}{7-3} = \frac{3}{16} p_1.$$

b) cijev od jednog dijela (r_1, r_3), djeluje samo unutarnji tlak p_1 , slika 1.c)

Prema [izrazima \(60a\) i \(60b\)](#) vrijednosti naprezanja na unutarnjoj i vanjskoj površini debele cijevi opterećene unutarnjim tlakom p_1 su (prikaz naprezanja na slici 2.b):

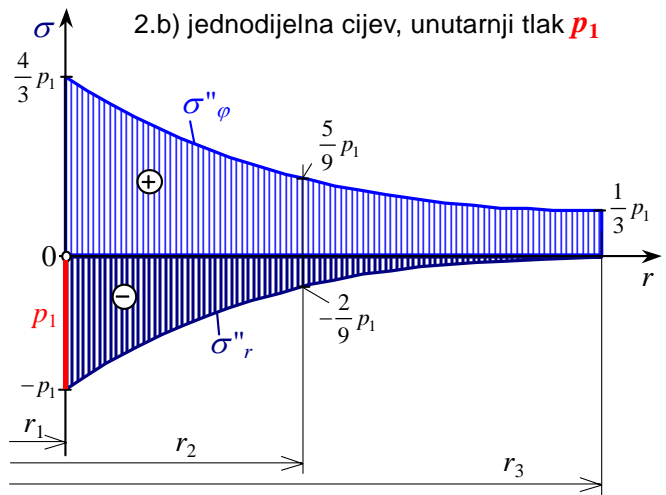
$$(\sigma''_r)_{r=r_1} = -p_1, \quad (\sigma''_r)_{r=r_3} = 0,$$

$$(\sigma''_r)_{r=r_2} = p_1 \cdot \frac{r_1^2}{r_3^2 - r_1^2} \cdot \left[1 - \frac{r_3^2}{r_2^2} \right] = -\frac{2}{9} p_1,$$

$$(\sigma''_\varphi)_{r=r_1} = p_1 \cdot \frac{r_3^2 + r_1^2}{r_3^2 - r_1^2} = p_1 \cdot \frac{7+1}{7-1} = \frac{4}{3} p_1,$$

$$(\sigma''_\varphi)_{r=r_2} = p_1 \cdot \frac{r_1^2}{r_3^2 - r_1^2} \cdot \left[1 + \frac{r_3^2}{r_2^2} \right] = \frac{5}{9} p_1,$$

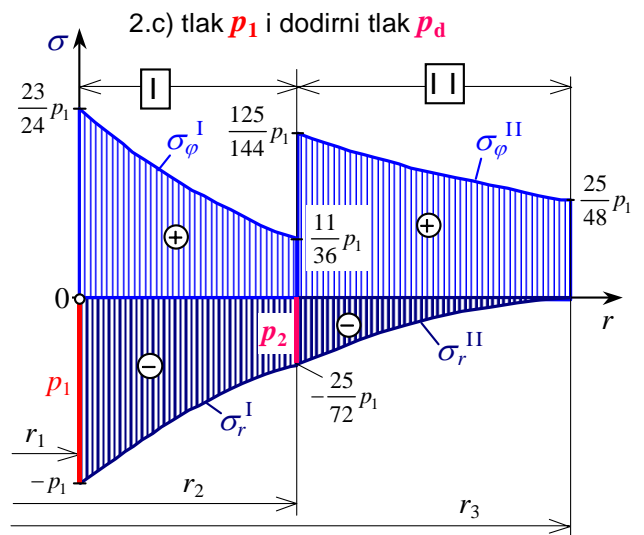
$$(\sigma''_\varphi)_{r=r_3} = p_1 \cdot \frac{2r_1^2}{r_3^2 - r_1^2} = p_1 \cdot \frac{2}{7-1} = \frac{1}{3} p_1.$$



c) za sastavljenu cijev opterećenu unutarnjim tlakom p_1 , slika 1.d)

Vrijednosti radijalnih i cirkularnih naprezanja na unutarnjoj i vanjskoj površini debele cijevi opterećene unutarnjim tlakom p_1 mogu se izračunati prema [izrazima \(61a,b,c\)](#) ili odrediti primjenom metode superpozicije zbrajanjem odgovarajućih komponenti naprezanja iz rješenja pod 1.a) i 1.b). Rezultati su dani u tablici i grafički na slici 2.c):

Tlak oper.	Kom. napr.	Cijev (I)		Cijev (II)	
		r_1	r_2	r_2	r_3
a) samo p_d	σ'_r	0	$-\frac{1}{8} p_1$	$-\frac{1}{8} p_1$	0
	σ'_φ	$-\frac{3}{8} p_1$	$-\frac{1}{4} p_1$	$\frac{5}{16} p_1$	$\frac{3}{16} p_1$
b) samo p_1	σ''_r	$-p_1$	$-\frac{2}{9} p_1$	$-\frac{2}{9} p_1$	0
	σ''_φ	$\frac{4}{3} p_1$	$\frac{5}{9} p_1$	$\frac{5}{9} p_1$	$\frac{1}{3} p_1$
c) $p_1 + p_d$	σ_r	$-p_1$	$-\frac{25}{72} p_1$	$-\frac{25}{72} p_1$	0
	σ_φ	$\frac{23}{24} p_1$	$\frac{11}{36} p_1$	$\frac{125}{144} p_1$	$\frac{25}{48} p_1$



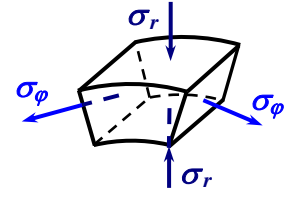
Iz tablice i slike 2.c) vidi se, da su se u sastavljenoj debeloj cijevi vrijednosti cirkularnih naprezanja smanjile u unutarnjoj cijevi, ali su se povećale u vanjskoj cijevi u odnosu na vrijednosti cirkularnih naprezanja u cijevi iz jednog dijela (slika 2.b), kod jednakog unutarnjeg tlaka p_1 u cijevi.

2. Vrijednost dopuštenog unutarnjeg tlaka $p_{1 \text{ dop}}$ u sastavljenoj cijevi

Najveća su naprežanja u točkama unutarnjih površina debelih cijevi (I) i (II), gdje vlada dvoosno stanje naprežanja, a iznosi glavnih naprežanja su (na slici elementa):

$$(I): \sigma_1 = (\sigma_\varphi)_{r=r_1} = \frac{23}{24} p_1, \quad \sigma_2 = \sigma_x = 0, \quad \sigma_3 = (\sigma_r)_{r=r_1} = -p_1,$$

$$(II): \sigma_1 = (\sigma_\varphi)_{r=r_2} = \frac{125}{144} p_1, \quad \sigma_2 = \sigma_x = 0, \quad \sigma_3 = (\sigma_r)_{r=r_2} = -\frac{25}{72} p_1.$$



Maksimalno ekvivalentno naprežanje prema teoriji najvećeg posmičnog naprežanja τ_{\max} je u tim točkama cijevi:

$$(\sigma_{\text{ekv}}^I)_{\max} = (\sigma_{\text{ekv}}^I)_{r=r_1} = \sigma_1 - \sigma_3 = \frac{23}{24} p_1 - (-p_1) = \frac{47}{24} p_1 = \frac{282}{144} p_1 \quad \text{i}$$

$$(\sigma_{\text{ekv}}^{II})_{\max} = (\sigma_{\text{ekv}}^{II})_{r=r_2} = \sigma_1 - \sigma_3 = \frac{125}{144} p_1 - (-\frac{25}{72} p_1) = \frac{175}{144} p_1,$$

$$\text{tj.: } (\sigma_{\text{ekv}})_{\max} = (\sigma_{\text{ekv}}^I)_{\max} = \frac{47}{24} p_1.$$

Vrijednost dopuštenog unutarnjeg tlaka $p_{1 \text{ dop}}$ u sastavljenoj cijevi jest:

$$(\sigma_{\text{ekv}})_{\max} \leq \sigma_{\text{dop}} \Rightarrow \frac{47}{24} p_1 \leq \sigma_{\text{dop}} \Rightarrow p_{1 \text{ dop}} \leq \frac{24}{47} \sigma_{\text{dop}} = \frac{24}{47} \cdot 250 = 127,66 \text{ MPa} = 1276,6 \text{ bar}.$$

3. Vrijednost prijeklopa δ u sastavljenoj cijevi kod zadanog tlaka p_d

Vrijednost dodirnog tlaka p_d na sastavu cijevi ($r = r_2$), kod opterećenja cijevi unutarnjim tlakom $p_1 = p_{1 \text{ dop}}$, prema zadanom uvjetu zadatka jest:

$$p_d = \frac{1}{8} p_{1 \text{ dop}} = \frac{127,66}{8} = 15,96 \text{ MPa}.$$

Vrijednost prijeklopa δ kod prisilnog sastavljanja cijevi u tom slučaju jest:

$$\delta = \frac{2 p_d}{E} \cdot r_2 \cdot \frac{r_2^2 \cdot (r_3^2 - r_1^2)}{(r_2^2 - r_1^2) \cdot (r_3^2 - r_2^2)} = 2 \cdot \frac{15,96}{2 \cdot 10^5} \cdot 30\sqrt{3} \cdot \frac{3 \cdot (7-1)}{(3-1) \cdot (7-3)} \cong 0,019 \text{ mm}.$$

Ova vrijednost odgovara steznom spoju H7/r6, gdje su za $d_N = 2r_2 \cong 104 \text{ mm}$ prema [tablici tolerancije prijeklopa](#) odstupanja promjera $-27/-68 \mu\text{m}$.

4. Numeričke vrijednosti naprežanja, prijeklopa i radijalnih pomaka sastavljene cijevi kod zadanog unutarnjeg tlaka $p_1 = 115,2 \text{ MPa}$

Prema ranije dobivenim vrijednostima danim u tablici, izračunate su numeričke vrijednosti radijalnih i cirkularnih komponenti naprežanja u sastavljenoj cijevi kod opterećenja unutarnjim tlakom $p_1 = 115,2 \text{ MPa}$ te su dane u tablici (u MPa) i u grafičkom prikazu na slici 2.d).

Vrijednost dodirnog tlaka p_d na sastavu cijevi ($r = r_2$), kod opterećenja cijevi unutarnjim tlakom $p_1 = 115,2 \text{ MPa}$, je prema zadanom uvjetu zadatka:

$$p_d = \frac{1}{8} p_1 = \frac{115,2}{8} = 14,4 \text{ MPa}.$$

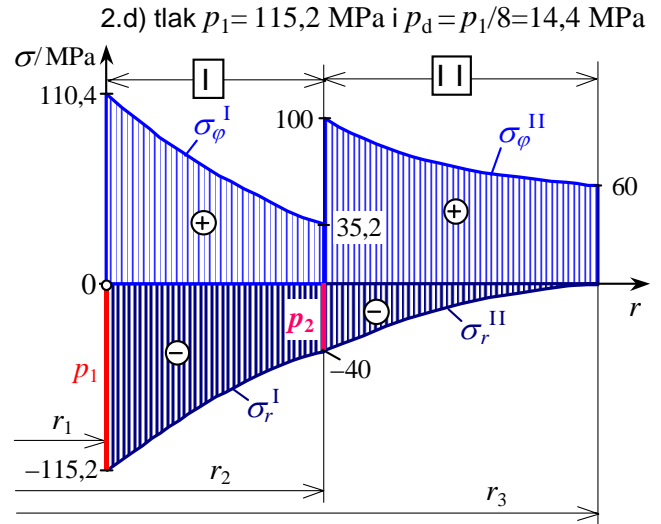
Vrijednost prijeklopa δ kod prisilnog sastavljanja cijevi u tom slučaju jest:

$$\delta = \frac{2p_d}{E} \cdot r_2 \cdot \frac{r_2^2 \cdot (r_3^2 - r_1^2)}{(r_2^2 - r_1^2) \cdot (r_3^2 - r_2^2)} = 2 \cdot \frac{14,4}{2 \cdot 10^5} \cdot 30\sqrt{3} \cdot \frac{3 \cdot (7-1)}{(3-1) \cdot (7-3)} = 0,017 \text{ mm}.$$

Ova vrijednost odgovara steznom spoju H7/r6, gdje su za $d_N = 2r_2 \cong 104 \text{ mm}$ prema [tablici tolerancije prijeklopa](#) odstupanja promjera $-27/-68 \text{ }\mu\text{m}$.

Vrijednosti radijalnih i cirkularnih komponenti napreznja u MPa.

Tlak oper.	Kom. napr.	Cijev (I)		Cijev (II)	
		r_1	r_2	r_2	r_3
a) samo p_d	σ'_r	0	-14,4	-14,4	0
	σ'_φ	-43,2	-28,8	36,0	21,6
b) samo p_1	σ''_r	-115,2	-25,6	-25,6	0
	σ''_φ	153,6	64,0	64,0	38,4
c) $p_1 + p_d$	σ_r	-115,2	-40,0	-40,0	0
	σ_φ	110,4	35,2	100,0	60,0



Radijalni pomaci površina sastavnih cijevi

Radijalni pomaci površina sastavnih cijevi mogu se odrediti jednostavnije kad se odredi tlak p_2 na dodiru sastavnih cijevi kod opterećenja sastavljene cijevi unutarnjim tlakom p_1 , slika 1.d). Vrijednost tlaka p_2 na površinama dodira sastavnih cijevi I i II sastavljene cijevi, prema [izrazu \(62\)](#) jest:

$$p_2 = |(\sigma_r)_{r=r_2}| = p_d - p_1 \cdot \frac{r_1^2}{r_3^2 - r_1^2} \cdot \left[1 - \frac{r_3^2}{r_2^2} \right] = p_1 \left[\frac{1}{8} - \frac{1}{7-1} \cdot \left(1 - \frac{7}{3} \right) \right] = \frac{25}{72} p_1 = \frac{25}{72} \cdot 115,2 = 40 \text{ MPa}.$$

Radijalni pomaci na unutarnjoj, dodirnoj i vanjskoj površini sastavljene cijevi, tj. povećanja polumjera sastavnih cijevi kod opterećenja cijevi unutarnjim tlakom p_1 su:

- za unutarnju cijev (I) prema [izrazima \(64a, 64b\)](#):

$$(u^I)_{r=r_1} = \frac{p_1 \cdot r_1}{E} \cdot \left(\frac{r_2^2 + r_1^2}{r_2^2 - r_1^2} + \nu \right) - \frac{p_2 \cdot 2r_1}{E} \cdot \frac{r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} = \frac{115,2 \cdot 30}{2 \cdot 10^5} \cdot \left[\frac{3+1}{3-1} + 0,3 - \frac{25}{72} \cdot \frac{2 \cdot 3}{3-1} \right] = 0,022 \text{ mm},$$

$$(u^I)_{r=r_2} = \frac{p_1 \cdot r_1^2 \cdot 2r_2}{E \cdot (r_2^2 - r_1^2)} - \frac{p_2 \cdot r_2}{E} \cdot \left(\frac{r_2^2 + r_1^2}{r_2^2 - r_1^2} - \nu \right) = \frac{115,2 \cdot 30 \sqrt{3}}{2 \cdot 10^5} \cdot \left[\frac{2 \cdot 1}{3-1} - \frac{25}{72} \cdot \left(\frac{3+1}{3-1} - 0,3 \right) \right] = 0,012 \text{ mm},$$

- za vanjsku cijev (II) prema [izrazima \(64c, 64d\)](#):

$$(u^{II})_{r=r_2} = \frac{p_2 \cdot r_2}{E} \cdot \left(\frac{r_3^2 + r_2^2}{r_3^2 - r_2^2} + \nu \right) = \frac{40 \cdot 30 \sqrt{3}}{2 \cdot 10^5} \cdot \left[\frac{7+3}{7-3} + 0,3 \right] = 0,029 \text{ mm},$$

tj. vrijedi: $(u^{II})_{r=r_2} = (u^I)_{r=r_2} + \delta = 0,012 + 0,017 = 0,029 \text{ mm}$,

$$(u^{II})_{r=r_3} = \frac{p_2 \cdot 2r_3}{E} \cdot \frac{r_2^2}{r_3^2 - r_2^2} = \frac{40 \cdot 2 \cdot 30 \sqrt{7}}{2 \cdot 10^5} \cdot \frac{3}{7-3} = 0,024 \text{ mm}.$$