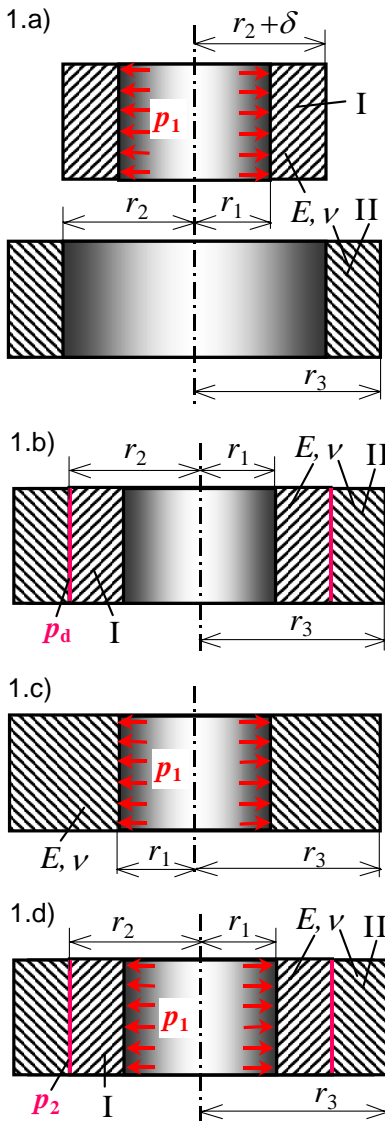


3. Seminarski zadatak: Sastavljena debela cijev opterećena unutarnjim tlakom



Sastavljena debela cijev sastoji se od unutarnje cijevi (I) polujmjera r_1 i r_2 , te vanjske cijevi (II) polujmjera r_2 i r_3 , slika 1.a). Cijev je opterećena jednolikim unutarnjim tlakom p_1 . Tlak na sastavu cijevi je p_d (nakon prisilnog sastavljanja, a prije opterećivanja cijevi), slika 1.b).

Treba odrediti:

1. vrijednosti radijalnih i cirkularnih napreznja σ_r i σ_φ , uz skice raspodjele napreznja po presjeku cijevi i to:
 - a) za unutarnju (I) i vanjsku cijev (II) opterećene na sastavu cijevi tlakom p_d , slika 1.b)
 - b) za cijev od jednog dijela, polujmjera r_1 i r_3 te opterećenu unutarnjim tlakom p_1 , slika 1.c)
 - c) za sastavljenu cijev, polujmjera r_1 , r_2 i r_3 opterećenu unutarnjim tlakom p_1 , slika 1.d), ako je zadano:

$$r_1, \quad r_2 = r_1\sqrt{3}, \quad r_3 = r_1\sqrt{6}, \quad p_1, \quad p_d = \frac{1}{8} p_1,$$

2. dopuštenu vrijednost unutarnjeg tlaka p_{1dop} sastavljene cijevi prema teoriji najvećeg posmičnog napreznja τ_{max} , ako je dopušteno napreznje materijala: $\sigma_{dop} = 280 \text{ MPa}$,

3. vrijednost prijeklopa δ na mjestu sastava cijevi kod poznatog dodirnog tlaka p_d , ako je zadano:

$$r_1 = 4 \text{ cm}, \quad p_1 = p_{dop}, \quad E = 200 \text{ GPa}, \quad \nu = 0,3,$$

4. numeričke vrijednosti napreznja σ_r i σ_φ , uz skice raspodjele napreznja te pomake točaka površina sastavljene cijevi, ako je zadano:

$$r_1 = 40 \text{ mm}, \quad r_2 = r_1\sqrt{3}, \quad r_3 = r_1\sqrt{6}, \quad p_d = \frac{1}{8} p_1, \quad p_1 = 1300 \text{ bar}.$$

1. Vrijednosti radijalnih i cirkularnih napreznja u dijelovima cijevi

a) unutarnja (I) i vanjska cijev (II) opterećene na sastavu tlakom p_d , slika 1.b)

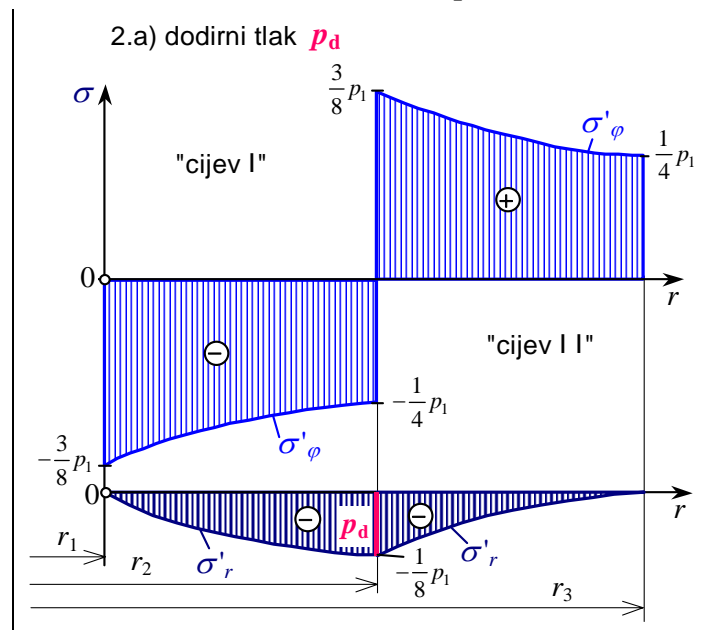
Vrijednosti radijalnih σ_r i cirkularnih napreznja σ_φ određuju se prema [izrazima \(59a\)](#) za unutarnju cijev (I), te prema [izrazima \(59b\)](#) za vanjsku cijev (II), a na slici 2.a) dana je raspodjela napreznja u presjecima cijevi nakon prisilnog spajanja:

- unutarnja cijev (I):

$$(\sigma'_r)_{r=r_1} = 0, \quad (\sigma'_r)_{r=r_2} = -p_d = -\frac{1}{8} p_1,$$

$$(\sigma'_\varphi)_{r=r_1} = -p_d \cdot \frac{2r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} = -\frac{p_1}{8} \cdot \frac{2 \cdot 3}{3-1} = -\frac{3}{8} p_1,$$

$$(\sigma'_\varphi)_{r=r_2} = -p_d \cdot \frac{r_2^2 + r_1^2}{r_2^2 - r_1^2} = -\frac{p_1}{8} \cdot \frac{3+1}{3-1} = -\frac{1}{4} p_1,$$



- vanjska cijev (II):

$$(\sigma'_r)_{r=r_2} = -p_d = -\frac{1}{8} p_1, \quad (\sigma'_r)_{r=r_3} = 0,$$

$$(\sigma'_\varphi)_{r=r_2} = p_d \cdot \frac{r_3^2 + r_2^2}{r_3^2 - r_2^2} = \frac{p_1}{8} \cdot \frac{6+3}{6-3} = \frac{3}{8} p_1, \quad (\sigma'_\varphi)_{r=r_3} = p_d \cdot \frac{2r_2^2}{r_3^2 - r_2^2} = \frac{p_1}{8} \cdot \frac{2 \cdot 3}{6-3} = \frac{1}{4} p_1.$$

b) cijev od jednog dijela (r_1, r_3), djeluje samo unutarnji tlak p_1 , slika 1.c)

Prema [izrazima \(60a\) i \(60b\)](#) vrijednosti naprezanja na unutarnjoj i vanjskoj površini debele cijevi opterećene unutarnjim tlakom p_1 su (prikaz naprezanja na slici 2.b):

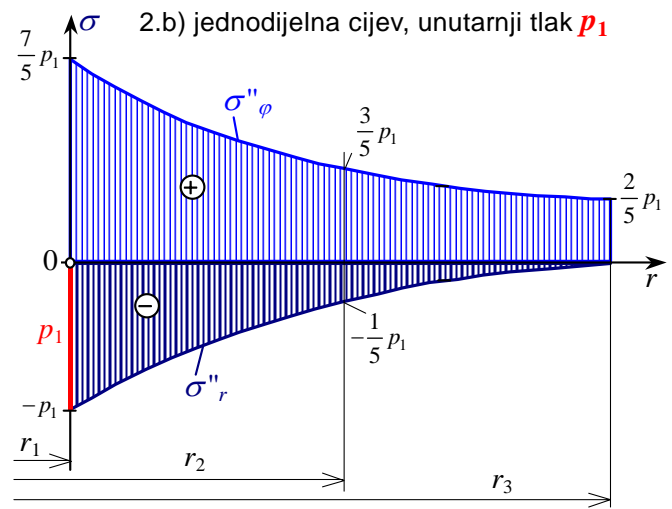
$$(\sigma''_r)_{r=r_1} = -p_1, \quad (\sigma''_r)_{r=r_3} = 0,$$

$$(\sigma''_r)_{r=r_2} = p_1 \cdot \frac{r_1^2}{r_3^2 - r_1^2} \cdot \left[1 - \frac{r_3^2}{r_2^2} \right] = -\frac{1}{5} p_1,$$

$$(\sigma''_\varphi)_{r=r_1} = p_1 \cdot \frac{r_3^2 + r_1^2}{r_3^2 - r_1^2} = p_1 \cdot \frac{6+1}{6-1} = \frac{7}{5} p_1,$$

$$(\sigma''_\varphi)_{r=r_2} = p_1 \cdot \frac{r_1^2}{r_3^2 - r_1^2} \cdot \left[1 + \frac{r_3^2}{r_2^2} \right] = \frac{3}{5} p_1,$$

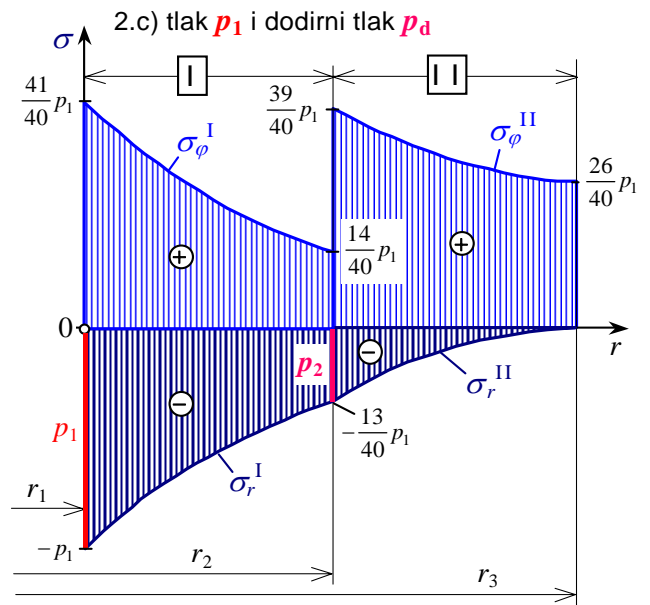
$$(\sigma''_\varphi)_{r=r_3} = p_1 \cdot \frac{2r_1^2}{r_3^2 - r_1^2} = p_1 \cdot \frac{2}{6-1} = \frac{2}{5} p_1.$$



c) za sastavljenu cijev opterećenu unutarnjim tlakom p_1 , slika 1.d)

Vrijednosti radialnih i cirkularnih naprezanja na unutarnjoj i vanjskoj površini debele cijevi opterećene unutarnjim tlakom p_1 mogu se izračunati prema [izrazima \(61a,b,c\)](#) ili odrediti primjenom metode superpozicije zbrajanjem odgovarajućih komponenti naprezanja iz rješenja pod 1.a) i 1.b). Rezultati su dani u tablici i grafički na slici 2.c):

Tlak oper.	Kom. napr.	Cijev (I)		Cijev (II)	
		r_1	r_2	r_2	r_3
a) samo p_d	σ'_r	0	$-\frac{1}{8} p_1$	$-\frac{1}{8} p_1$	0
	σ'_φ	$-\frac{3}{8} p_1$	$-\frac{1}{4} p_1$	$\frac{3}{8} p_1$	$\frac{1}{4} p_1$
b) samo p_1	σ''_r	$-p_1$	$-\frac{1}{5} p_1$	$-\frac{1}{5} p_1$	0
	σ''_φ	$\frac{7}{5} p_1$	$\frac{3}{5} p_1$	$\frac{3}{5} p_1$	$\frac{2}{5} p_1$
c) $p_1 + p_d$	σ_r	$-p_1$	$-\frac{13}{40} p_1$	$-\frac{13}{40} p_1$	0
	σ_φ	$\frac{41}{40} p_1$	$\frac{14}{40} p_1$	$\frac{39}{40} p_1$	$\frac{26}{40} p_1$



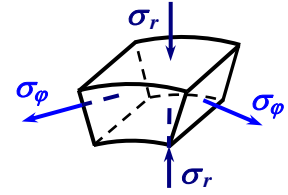
Iz tablice i slike 2.c) vidi se, da su se u sastavljenoj debeloj cijevi vrijednosti cirkularnih naprezanja smanjile u unutarnjoj cijevi, ali su se povećale u vanjskoj cijevi u odnosu na vrijednosti cirkularnih naprezanja u cijevi iz jednog dijela (slika 2.b), kod jednakog unutarnjeg tlaka p_1 u cijevi.

2. Vrijednost dopuštenog unutarnjeg tlaka $p_{1 \text{ dop}}$ u sastavljenoj cijevi

Najveća su naprežanja u točkama unutarnjih površina debelih cijevi (I) i (II), gdje vlada dvoosno stanje naprežanja, a iznosi glavnih naprežanja su (na slici elementa):

$$(I): \quad \sigma_1 = (\sigma_\varphi)_{r=r_1} = \frac{41}{40} p_1, \quad \sigma_2 = \sigma_x = 0, \quad \sigma_3 = (\sigma_r)_{r=r_1} = -p_1,$$

$$(II): \quad \sigma_1 = (\sigma_\varphi)_{r=r_2} = \frac{39}{40} p_1, \quad \sigma_2 = \sigma_x = 0, \quad \sigma_3 = (\sigma_r)_{r=r_2} = -\frac{13}{40} p_1.$$



Maksimalno ekvivalentno naprežanje prema teoriji najvećeg posmičnog naprežanja τ_{max} je u tim točkama cijevi:

$$(\sigma_{\text{ekv}}^I)_{\text{max}} = (\sigma_{\text{ekv}}^I)_{r=r_1} = \sigma_1 - \sigma_3 = \frac{41}{40} p_1 - (-p_1) = \frac{81}{40} p_1 \quad \text{i}$$

$$(\sigma_{\text{ekv}}^{II})_{\text{max}} = (\sigma_{\text{ekv}}^{II})_{r=r_2} = \sigma_1 - \sigma_3 = \frac{39}{40} p_1 - (-\frac{13}{40} p_1) = \frac{52}{40} p_1,$$

tj.: $(\sigma_{\text{ekv}})_{\text{max}} = (\sigma_{\text{ekv}}^I)_{\text{max}} = \frac{81}{40} p_1.$

Vrijednost dopuštenog unutarnjeg tlaka $p_{1 \text{ dop}}$ u sastavljenoj cijevi jest:

$$(\sigma_{\text{ekv}})_{\text{max}} \leq \sigma_{\text{dop}} \Rightarrow \frac{81}{40} p_1 \leq \sigma_{\text{dop}} \Rightarrow p_{1 \text{ dop}} \leq \frac{40}{81} \sigma_{\text{dop}} = \frac{40}{81} \cdot 280 = 138,27 \text{ MPa} = 1382,7 \text{ bar}.$$

3. Vrijednost prijeklopa δ u sastavljenoj cijevi kod zadanog tlaka p_d

Vrijednost dodirnog tlaka p_d na sastavu cijevi ($r = r_2$), kod opterećenja cijevi unutarnjim tlakom $p_1 = p_{1 \text{ dop}}$, prema zadanom uvjetu zadatka jest:

$$p_d = \frac{1}{8} p_{1 \text{ dop}} = \frac{138,27}{8} = 17,28 \text{ MPa}.$$

Vrijednost prijeklopa δ kod prisilnog sastavljanja cijevi u tom slučaju jest:

$$\delta = \frac{2 p_d}{E} \cdot r_2 \cdot \frac{r_2^2 \cdot (r_3^2 - r_1^2)}{(r_2^2 - r_1^2) \cdot (r_3^2 - r_2^2)} = 2 \cdot \frac{17,28}{2 \cdot 10^5} \cdot 40\sqrt{3} \cdot \frac{3 \cdot (6-1)}{(3-1) \cdot (6-3)} \cong 0,030 \text{ mm}.$$

Ova vrijednost odgovara steznom spoju H7/r6, gdje su za $d_N = 2r_2 \cong 140 \text{ mm}$ prema [tablici tolerancije prijeklopa](#) odstupanja promjera $-32/-79 \text{ }\mu\text{m}$.

4. Numeričke vrijednosti naprežanja, prijeklopa i radijalnih pomaka sastavljene cijevi kod zadanog unutarnjeg tlaka $p_1 = 130 \text{ MPa}$

Prema ranije dobivenim vrijednostima danim u tablici, izračunate su numeričke vrijednosti radijalnih i cirkularnih komponenti naprežanja u sastavljenoj cijevi kod opterećenja unutarnjim tlakom $p_1 = 130 \text{ MPa}$ te su dane u tablici (u MPa) i u grafičkom prikazu na slici 2.d).

Vrijednost dodirnog tlaka p_d na sastavu cijevi ($r = r_2$), kod opterećenja cijevi unutarnjim tlakom $p_1 = 130 \text{ MPa}$, je prema zadanom uvjetu zadatka:

$$p_d = \frac{1}{8} p_1 = \frac{130}{8} = 16,25 \text{ MPa}.$$

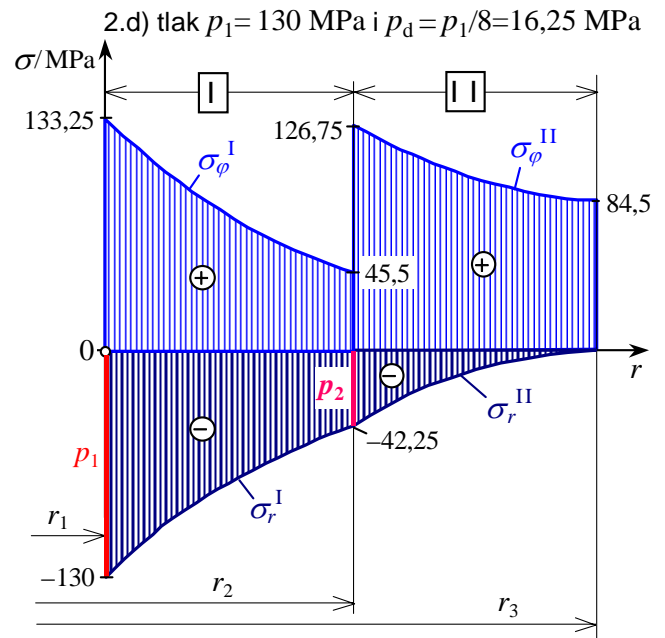
Vrijednost prijeklopa δ kod prisilnog sastavljanja cijevi u tom slučaju jest:

$$\delta = \frac{2p_d}{E} \cdot r_2 \cdot \frac{r_2^2 \cdot (r_3^2 - r_1^2)}{(r_2^2 - r_1^2) \cdot (r_3^2 - r_2^2)} = 2 \cdot \frac{16,25}{2 \cdot 10^5} \cdot 40\sqrt{3} \cdot \frac{3 \cdot (6-1)}{(3-1) \cdot (6-3)} = 0,028 \text{ mm}.$$

Ova vrijednost odgovara steznom spoju H7/r6, gdje su za $d_N = 2r_2 \cong 140 \text{ mm}$ prema [tablici tolerancije prijeklopa](#) odstupanja promjera $-32/-79 \text{ }\mu\text{m}$.

Vrijednosti radialnih i cirkularnih komponenti naprezanja u MPa.

Tlak oper.	Kom. napr.	Cijev (I)		Cijev (II)	
		r_1	r_2	r_2	r_3
a) samo p_d	σ'_r	0	-16,25	-16,25	0
	σ'_φ	-48,75	-32,5	48,75	32,5
b) samo p_1	σ''_r	-130	-26	-26	0
	σ''_φ	182	78	78	52
c) $p_1 + p_d$	σ_r	-130	-42,25	-42,25	0
	σ_φ	133,25	45,5	126,75	84,5



Radijalni pomaci površina sastavnih cijevi

Radijalni pomaci površina sastavnih cijevi mogu se odrediti jednostavnije kad se odredi tlak p_2 na dodiru sastavnih cijevi kod opterećenja sastavljene cijevi unutarnjim tlakom p_1 , slika 1.d). Vrijednost tlaka p_2 na površinama dodira sastavnih cijevi I i II sastavljene cijevi, prema [izrazu \(62\)](#) jest:

$$p_2 = |(\sigma_r)_{r=r_2}| = p_d - p_1 \cdot \frac{r_1^2}{r_3^2 - r_1^2} \cdot \left[1 - \frac{r_3^2}{r_2^2} \right] = p_1 \left[\frac{1}{8} - \frac{1}{6-1} \cdot \left(1 - \frac{6}{3} \right) \right] = \frac{13}{40} p_1 = \frac{13}{40} \cdot 130 = 42,25 \text{ MPa}.$$

Radijalni pomaci na unutarnjoj, dodirnoj i vanjskoj površini sastavljene cijevi, tj. povećanja polumjera sastavnih cijevi kod opterećenja cijevi unutarnjim tlakom p_1 su:

- za unutarnju cijev (I) prema [izrazima \(64a, 64b\)](#):

$$(u^1)_{r=r_1} = \frac{p_1 \cdot r_1}{E} \cdot \left(\frac{r_2^2 + r_1^2}{r_2^2 - r_1^2} + \nu \right) - \frac{p_2 \cdot 2r_1}{E} \cdot \frac{r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} = \frac{130 \cdot 40}{2 \cdot 10^5} \cdot \left[\frac{3+1}{3-1} + 0,3 - \frac{13}{40} \cdot \frac{2 \cdot 3}{3-1} \right] \cong 0,0345 \text{ mm},$$

$$(u^1)_{r=r_2} = \frac{p_1 \cdot r_1^2 \cdot 2r_2}{E \cdot (r_2^2 - r_1^2)} - \frac{p_2 \cdot r_2}{E} \cdot \left(\frac{r_2^2 + r_1^2}{r_2^2 - r_1^2} - \nu \right) = \frac{130 \cdot 40\sqrt{3}}{2 \cdot 10^5} \cdot \left[\frac{2 \cdot 1}{3-1} - \frac{13}{40} \cdot \left(\frac{3+1}{3-1} - 0,3 \right) \right] = 0,020 \text{ mm},$$

- za vanjsku cijev (II) prema [izrazima \(64c, 64d\)](#):

$$(u^{II})_{r=r_2} = \frac{p_2 \cdot r_2}{E} \cdot \left(\frac{r_3^2 + r_2^2}{r_3^2 - r_2^2} + \nu \right) = \frac{42,25 \cdot 40\sqrt{3}}{2 \cdot 10^5} \cdot \left[\frac{6+3}{6-3} + 0,3 \right] = 0,048 \text{ mm},$$

tj. vrijedi: $(u^{II})_{r=r_2} = (u^1)_{r=r_2} + \delta = 0,020 + 0,028 = 0,048 \text{ mm}$,

$$(u^{II})_{r=r_3} = \frac{p_2 \cdot 2r_3}{E} \cdot \frac{r_2^2}{r_3^2 - r_2^2} = \frac{42,25 \cdot 2 \cdot 40\sqrt{6}}{2 \cdot 10^5} \cdot \frac{3}{6-3} = 0,041 \text{ mm}.$$