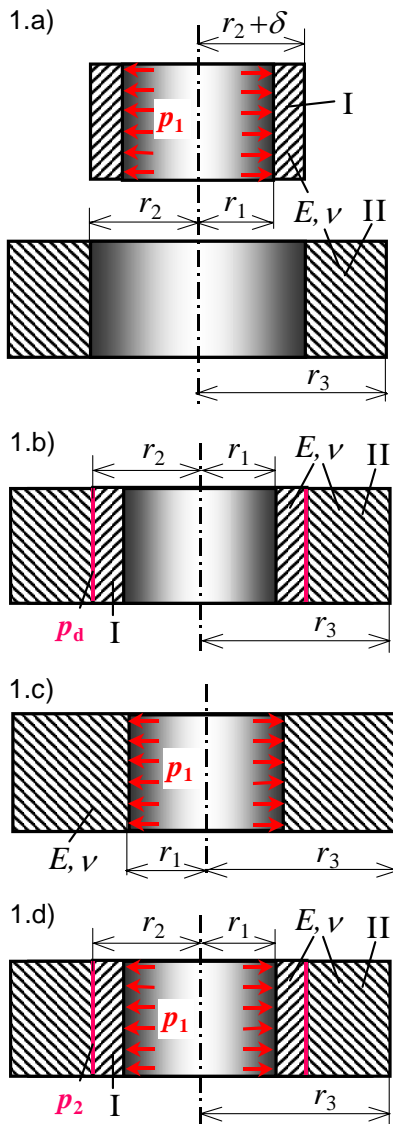


2. Seminarski zadatak: Sastavljena debela cijev opterećena unutarnjim tlakom



Sastavljena debela cijev sastoji se od unutarnje cijevi (I) polumjera r_1 i r_2 , te vanjske cijevi (II) polumjera r_2 i r_3 , slika 1. a). Cijev je opterećena jednolikim unutarnjim tlakom p_1 . Tlak na sastavu cijevi je p_d (nakon prisilnog sastavljanja, a prije opterećivanja cijevi), slika 1. b).

Treba odrediti:

1. vrijednosti radijalnih i cirkularnih napreznja σ_r i σ_φ , uz skice raspodjele napreznja po presjeku cijevi i to:
 - a) za unutarnju (I) i vanjsku cijev (II) opterećene na sastavu cijevi tlakom p_d , slika 1. b)
 - b) za cijev od jednog dijela, polumjera r_1 i r_3 te opterećenu unutarnjim tlakom p_1 , slika 1. c)
 - c) za sastavljenu cijev, polumjera r_1 , r_2 i r_3 opterećenu unutarnjim tlakom p_1 , slika 1. d), ako je zadano:

$$r_1, r_2 = r_1\sqrt{2}, r_3 = r_1\sqrt{6}, p_1, p_d = \frac{1}{7} p_1,$$

2. dopuštenu vrijednost unutarnjeg tlaka p_{1dop} sastavljene cijevi prema teoriji najvećeg posmičnog napreznja τ_{max} , ako je dopušteno napreznje materijala: $\sigma_{dop} = 340 \text{ MPa}$,

3. vrijednost prijeklopa δ na mjestu sastava cijevi kod poznatog dodirnog tlaka p_d , ako je zadano:

$$r_1 = 3 \text{ cm}, p_1 = p_{dop}, E = 200 \text{ GPa}, \nu = 0,3,$$

4. numeričke vrijednosti napreznja σ_r i σ_φ , uz skice raspodjele napreznja te pomake točaka površina sastavljene cijevi, ako je zadano:

$$r_1 = 30 \text{ mm}, r_2 = r_1\sqrt{2}, r_3 = r_1\sqrt{6}, p_d = \frac{1}{7} p_1, p_1 = 1750 \text{ bar}.$$

1. Vrijednosti radijalnih i cirkularnih napreznja u dijelovima cijevi

a) unutarnja (I) i vanjska cijev (II) opterećene na sastavu tlakom p_d , slika 1. b)

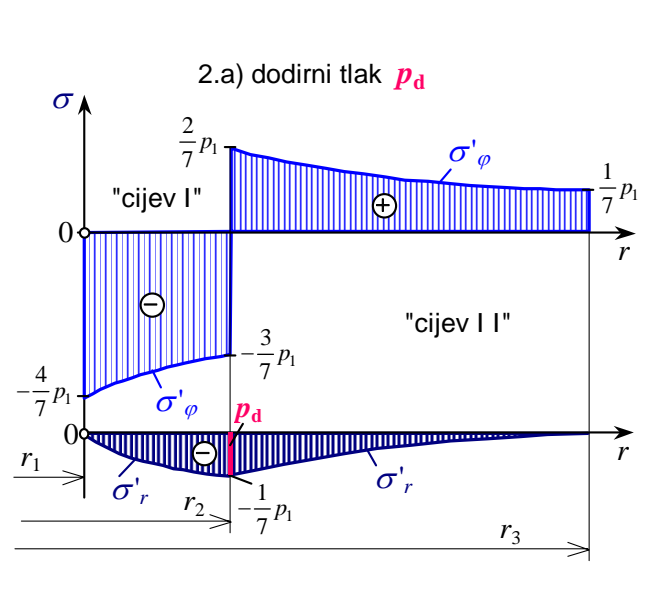
Vrijednosti radijalnih σ_r i cirkularnih napreznja σ_φ određuju se prema [izrazima \(59a\)](#) za unutarnju cijev (I), te prema [izrazima \(59b\)](#) za vanjsku cijev (II), a na slici 2. a) dana je raspodjela napreznja u presjecima cijevi nakon prisilnog spajanja:

- unutarnja cijev (I):

$$(\sigma'_r)_{r=r_1} = 0, (\sigma'_r)_{r=r_2} = -p_d = -\frac{1}{7} p_1,$$

$$(\sigma'_\varphi)_{r=r_1} = -p_d \cdot \frac{2r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} = -\frac{p_1}{7} \cdot \frac{2 \cdot 2}{2 - 1} = -\frac{4}{7} p_1,$$

$$(\sigma'_\varphi)_{r=r_2} = -p_d \cdot \frac{r_2^2 + r_1^2}{r_2^2 - r_1^2} = -\frac{p_1}{7} \cdot \frac{2 + 1}{2 - 1} = -\frac{3}{7} p_1,$$



- vanjska cijev (I I):

$$(\sigma'_r)_{r=r_2} = -p_d = -\frac{1}{7} p_1, \quad (\sigma'_r)_{r=r_3} = 0,$$

$$(\sigma'_\varphi)_{r=r_2} = p_d \cdot \frac{r_3^2 + r_2^2}{r_3^2 - r_2^2} = \frac{p_1}{7} \cdot \frac{6+2}{6-2} = \frac{2}{7} p_1, \quad (\sigma'_\varphi)_{r=r_3} = p_d \cdot \frac{2r_2^2}{r_3^2 - r_2^2} = \frac{p_1}{7} \cdot \frac{2 \cdot 2}{6-2} = \frac{1}{7} p_1.$$

b) cijev od jednog dijela (r_1, r_3), djeluje samo unutarnji tlak p_1 , slika 1.c)

Prema [izrazima \(60a\) i \(60b\)](#) vrijednosti naprezanja na unutarnjoj i vanjskoj površini debele cijevi opterećene unutarnjim tlakom p_1 su (prikaz naprezanja na slici 2.b):

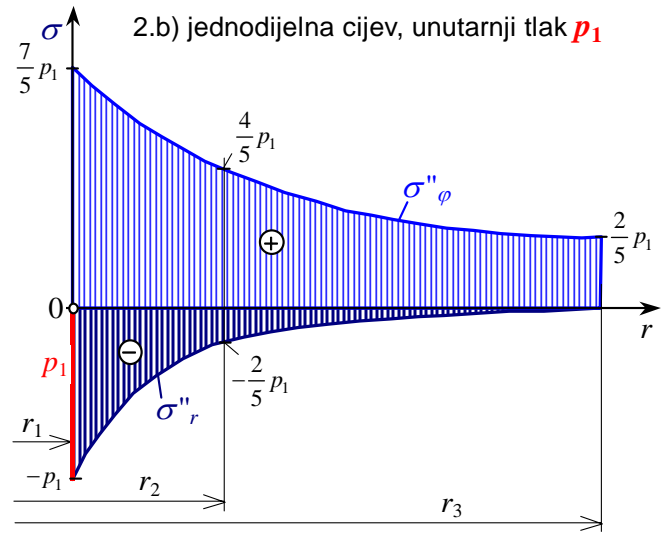
$$(\sigma''_r)_{r=r_1} = -p_1, \quad (\sigma''_r)_{r=r_3} = 0,$$

$$(\sigma''_r)_{r=r_2} = p_1 \cdot \frac{r_1^2}{r_3^2 - r_1^2} \cdot \left[1 - \frac{r_3^2}{r_2^2} \right] = -\frac{2}{5} p_1,$$

$$(\sigma''_\varphi)_{r=r_1} = p_1 \cdot \frac{r_3^2 + r_1^2}{r_3^2 - r_1^2} = p_1 \cdot \frac{6+1}{6-1} = \frac{7}{5} p_1,$$

$$(\sigma''_\varphi)_{r=r_2} = p_1 \cdot \frac{r_1^2}{r_3^2 - r_1^2} \cdot \left[1 + \frac{r_3^2}{r_2^2} \right] = \frac{4}{5} p_1,$$

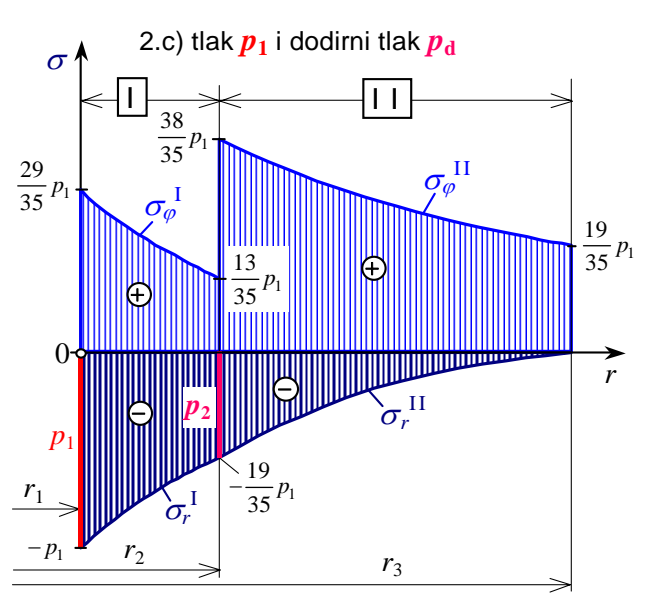
$$(\sigma''_\varphi)_{r=r_3} = p_1 \cdot \frac{2r_1^2}{r_3^2 - r_1^2} = p_1 \cdot \frac{2}{6-1} = \frac{2}{5} p_1.$$



c) za sastavljenu cijev opterećenu unutarnjim tlakom p_1 , slika 1.d)

Vrijednosti radialnih i cirkularnih naprezanja na unutarnjoj i vanjskoj površini debele cijevi opterećene unutarnjim tlakom p_1 mogu se izračunati prema [izrazima \(61a,b,c\)](#) ili odrediti primjenom metode superpozicije zbrajanjem odgovarajućih komponenti naprezanja iz rješenja pod 1.a) i 1.b). Rezultati su dani u tablici i grafički na slici 2.c):

| Tlak oper. | Kom. napr. | Cijev (I) | | Cijev (II) | |
|----------------|--------------------|---------------------|----------------------|----------------------|---------------------|
| | | r_1 | r_2 | r_2 | r_3 |
| a) samo p_d | σ'_r | 0 | $-\frac{1}{7} p_1$ | $-\frac{1}{7} p_1$ | 0 |
| | σ'_φ | $-\frac{4}{7} p_1$ | $-\frac{3}{7} p_1$ | $\frac{2}{7} p_1$ | $\frac{1}{7} p_1$ |
| b) samo p_1 | σ''_r | $-p_1$ | $-\frac{2}{5} p_1$ | $-\frac{2}{5} p_1$ | 0 |
| | σ''_φ | $\frac{7}{5} p_1$ | $\frac{4}{5} p_1$ | $\frac{4}{5} p_1$ | $\frac{2}{5} p_1$ |
| c) $p_1 + p_d$ | σ_r | $-p_1$ | $-\frac{19}{35} p_1$ | $-\frac{19}{35} p_1$ | 0 |
| | σ_φ | $\frac{29}{35} p_1$ | $\frac{13}{35} p_1$ | $\frac{38}{35} p_1$ | $\frac{19}{35} p_1$ |



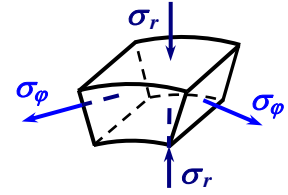
Iz tablice i slike 2.c) vidi se, da su se u sastavljenoj debeloj cijevi vrijednosti cirkularnih naprezanja smanjile u unutarnjoj cijevi, ali su se povećale u vanjskoj cijevi u odnosu na vrijednosti cirkularnih naprezanja u cijevi iz jednog dijela (slika 2.b), kod jednakog unutarnjeg tlaka p_1 u cijevi.

2. Vrijednost dopuštenog unutarnjeg tlaka $p_{1 \text{ dop}}$ u sastavljenoj cijevi

Najveća su naprežanja u točkama unutarnjih površina debelih cijevi (I) i (II), gdje vlada dvoosno stanje naprežanja, a iznosi glavnih naprežanja su (na slici elementa):

$$(I): \quad \sigma_1 = (\sigma_\varphi)_{r=r_1} = \frac{29}{35} p_1, \quad \sigma_2 = \sigma_x = 0, \quad \sigma_3 = (\sigma_r)_{r=r_1} = -p_1,$$

$$(II): \quad \sigma_1 = (\sigma_\varphi)_{r=r_2} = \frac{38}{35} p_1, \quad \sigma_2 = \sigma_x = 0, \quad \sigma_3 = (\sigma_r)_{r=r_2} = -\frac{19}{35} p_1.$$



Maksimalno ekvivalentno naprežanje prema teoriji najvećeg posmičnog naprežanja τ_{max} je u tim točkama cijevi:

$$(\sigma_{\text{ekv}}^I)_{\text{max}} = (\sigma_{\text{ekv}}^I)_{r=r_1} = \sigma_1 - \sigma_3 = \frac{29}{35} p_1 - (-p_1) = \frac{64}{35} p_1 \quad \text{i}$$

$$(\sigma_{\text{ekv}}^{II})_{\text{max}} = (\sigma_{\text{ekv}}^{II})_{r=r_2} = \sigma_1 - \sigma_3 = \frac{38}{35} p_1 - (-\frac{19}{35} p_1) = \frac{57}{35} p_1,$$

tj.: $(\sigma_{\text{ekv}})_{\text{max}} = (\sigma_{\text{ekv}}^I)_{\text{max}} = \frac{64}{35} p_1.$

Vrijednost dopuštenog unutarnjeg tlaka $p_{1 \text{ dop}}$ u sastavljenoj cijevi jest:

$$(\sigma_{\text{ekv}})_{\text{max}} \leq \sigma_{\text{dop}} \Rightarrow \frac{64}{35} p_1 \leq \sigma_{\text{dop}} \Rightarrow p_{1 \text{ dop}} \leq \frac{35}{64} \sigma_{\text{dop}} = \frac{35}{64} \cdot 340 = 185,94 \text{ MPa} = 1859,4 \text{ bar}.$$

3. Vrijednost prijeklopa δ u sastavljenoj cijevi kod zadanog tlaka p_d

Vrijednost dodirnog tlaka p_d na sastavu cijevi ($r = r_2$), kod opterećenja cijevi unutarnjim tlakom $p_1 = p_{1 \text{ dop}}$, prema zadanom uvjetu zadatka jest:

$$p_d = \frac{1}{7} p_{1 \text{ dop}} = \frac{185,94}{7} = 26,56 \text{ MPa}.$$

Vrijednost prijeklopa δ kod prisilnog sastavljanja cijevi u tom slučaju jest:

$$\delta = \frac{2p_d}{E} \cdot r_2 \cdot \frac{r_2^2 \cdot (r_3^2 - r_1^2)}{(r_2^2 - r_1^2) \cdot (r_3^2 - r_2^2)} = 2 \cdot \frac{26,56}{2 \cdot 10^5} \cdot 30\sqrt{2} \cdot \frac{2 \cdot (6-1)}{(2-1) \cdot (6-2)} = 0,028 \text{ mm}.$$

Ova vrijednost odgovara steznom spoju H8/s7, gdje su za $d_N = 2r_2 \cong 85 \text{ mm}$ prema [tablici tolerancije prijeklopa](#) odstupanja promjera $-29/-93 \text{ } \mu\text{m}$.

4. Numeričke vrijednosti naprežanja, prijeklopa i radijalnih pomaka sastavljene cijevi kod zadanog unutarnjeg tlaka $p_1 = 175 \text{ MPa}$

Prema ranije dobivenim vrijednostima danim u tablici, izračunate su numeričke vrijednosti radijalnih i cirkularnih komponenti naprežanja u sastavljenoj cijevi kod opterećenja unutarnjim tlakom $p_1 = 175 \text{ MPa}$ te su dane u tablici (u MPa) i u grafičkom prikazu na slici 2.d).

Vrijednost dodirnog tlaka p_d na sastavu cijevi ($r = r_2$), kod opterećenja cijevi unutarnjim radnim tlakom $p_1 = 175 \text{ MPa}$, je prema zadanom uvjetu zadatka:

$$p_d = \frac{1}{7} p_1 = \frac{175}{7} = 25 \text{ MPa}.$$

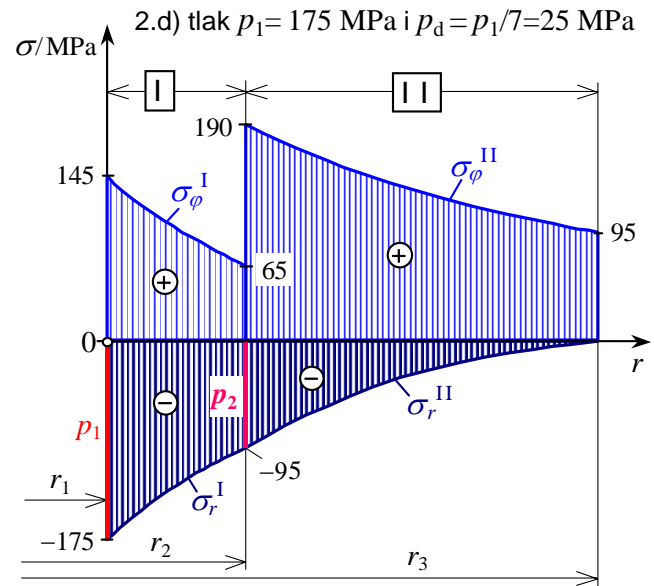
Vrijednost prijeklopa δ kod prisilnog sastavljanja cijevi u tom slučaju jest:

$$\delta = \frac{2p_d}{E} \cdot r_2 \cdot \frac{r_2^2 \cdot (r_3^2 - r_1^2)}{(r_2^2 - r_1^2) \cdot (r_3^2 - r_2^2)} = 2 \cdot \frac{25}{2 \cdot 10^5} \cdot 30\sqrt{2} \cdot \frac{2 \cdot (6-1)}{(2-1) \cdot (6-2)} = 0,0265 \text{ mm}.$$

Ova vrijednost odgovara steznom spoju H8/s7, gdje su za $d_N = 2r_2 \cong 85 \text{ mm}$ prema [tablici tolerancije prijeklopa](#) odstupanja promjera $-29/-93 \mu\text{m}$.

Vrijednosti radijalnih i cirkularnih komponenti naprezanja u MPa.

| Tlak oper. | Kom. napr. | Cijev (I) | | Cijev (II) | |
|----------------|--------------------|-----------|-------|------------|-------|
| | | r_1 | r_2 | r_2 | r_3 |
| a) samo p_d | σ'_r | 0 | -25 | -25 | 0 |
| | σ'_φ | -100 | -75 | 50 | 25 |
| b) samo p_1 | σ''_r | -175 | -70 | -70 | 0 |
| | σ''_φ | 245 | 140 | 140 | 70 |
| c) $p_1 + p_d$ | σ_r | -175 | -95 | -95 | 0 |
| | σ_φ | 145 | 65 | 190 | 95 |



Radijalni pomaci površina sastavnih cijevi

Radijalni pomaci površina sastavnih cijevi mogu se odrediti jednostavnije kad se odredi tlak p_2 na dodiru sastavnih cijevi kod opterećenja sastavljene cijevi unutarnjim tlakom p_1 , slika 1.d). Vrijednost tlaka p_2 na površinama dodira sastavnih cijevi I i II sastavljene cijevi, prema [izrazu \(62\)](#) jest:

$$p_2 = |(\sigma_r)_{r=r_2}| = p_d - p_1 \cdot \frac{r_1^2}{r_3^2 - r_1^2} \cdot \left[1 - \frac{r_3^2}{r_2^2} \right] = p_1 \left[\frac{1}{7} - \frac{1}{6-1} \cdot \left(1 - \frac{6}{2} \right) \right] = \frac{19}{35} p_1 = \frac{19}{35} \cdot 175 = 95 \text{ MPa}.$$

Radijalni pomaci na unutarnjoj, dodirnoj i vanjskoj površini sastavljene cijevi, tj. povećanja polumjera sastavnih cijevi kod opterećenja cijevi unutarnjim tlakom p_1 su:

- za unutarnju cijev (I) prema [izrazima \(64a, 64b\)](#):

$$(u^I)_{r=r_1} = \frac{p_1 \cdot r_1}{E} \cdot \left(\frac{r_2^2 + r_1^2}{r_2^2 - r_1^2} + \nu \right) - \frac{p_2 \cdot 2r_1}{E} \cdot \frac{r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} = \frac{175 \cdot 30}{2 \cdot 10^5} \cdot \left[\frac{2+1}{2-1} + 0,3 - \frac{19}{35} \cdot \frac{2 \cdot 2}{2-1} \right] \cong 0,030 \text{ mm},$$

$$(u^I)_{r=r_2} = \frac{p_1 \cdot r_1^2 \cdot 2r_2}{E \cdot (r_2^2 - r_1^2)} - \frac{p_2 \cdot r_2}{E} \cdot \left(\frac{r_2^2 + r_1^2}{r_2^2 - r_1^2} - \nu \right) = \frac{175 \cdot 30\sqrt{2}}{2 \cdot 10^5} \cdot \left[\frac{2 \cdot 1}{2-1} - \frac{19}{35} \cdot \left(\frac{2+1}{2-1} - 0,3 \right) \right] = 0,020 \text{ mm},$$

- za vanjsku cijev (II) prema [izrazima \(64c, 64d\)](#):

$$(u^{II})_{r=r_2} = \frac{p_2 \cdot r_2}{E} \cdot \left(\frac{r_3^2 + r_2^2}{r_3^2 - r_2^2} + \nu \right) = \frac{95 \cdot 30\sqrt{2}}{2 \cdot 10^5} \cdot \left[\frac{6+2}{6-2} + 0,3 \right] = 0,0465 \text{ mm},$$

tj. vrijedi: $(u^{II})_{r=r_2} = (u^I)_{r=r_2} + \delta = 0,020 + 0,0265 = 0,0465 \text{ mm}$,

$$(u^{II})_{r=r_3} = \frac{p_2 \cdot 2r_3}{E} \cdot \frac{r_2^2}{r_3^2 - r_2^2} = \frac{95 \cdot 2 \cdot 30\sqrt{6}}{2 \cdot 10^5} \cdot \frac{2}{6-2} = 0,035 \text{ mm}.$$