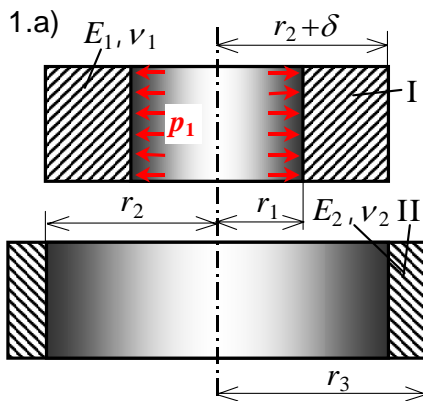


## 2. Primjer: Sastavljena debela cijev od različitih materijala opterećena unutarnjim tlakom

Sastavljena debela cijev sastoji se od unutarnje cijevi (I) polumjera  $r_1$  i  $r_2$ , izrađene od sivog lijeva, te čelične vanjske cijevi (II) polumjera  $r_2$  i  $r_3$ , slika 1.a). Kod sastavljanja cijevi preklop između cijevi bio je  $\delta$ . Nakon sastavljanja cijev je opterećena jednolikim unutarnjim tlakom  $p_1$ .

Treba odrediti:

1. vrijednosti radijalnih i cirkularnih napreznja  $\sigma_r$  i  $\sigma_\varphi$  za unutarnju (I) i vanjsku cijev (II), uz skice raspodjele napreznja po presjeku cijevi
2. faktore sigurnosti na čvrstoću sastavnih cijevi
3. iznose pomaka točaka površina sastavnih cijevi, tj. povećanja polumjera cijevi.



Zadano:

$$r_1 = 45 \text{ mm}, \quad r_2 = 2r_1 = 90 \text{ mm}, \quad r_3 = r_1\sqrt{6} \cong 110,23 \text{ mm},$$

$$\delta = 0,045 \text{ mm}, \quad p_1 = 700 \text{ bar},$$

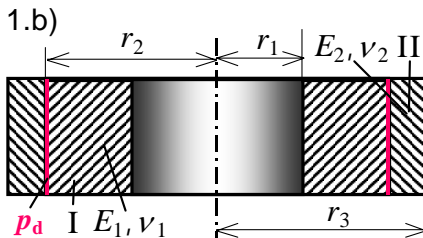
$$\text{cijev (I), sivi lijev: } R_{mV} = 200 \text{ MPa}, \quad R_{mT} = 700 \text{ MPa},$$

$$E_1 = 110 \text{ GPa}, \quad \nu_1 = 0,26,$$

$$\text{cijev (II), čelik: } R_m = 470 \text{ MPa}, \quad R_e = 225 \text{ MPa},$$

$$E_2 = 210 \text{ GPa}, \quad \nu_2 = 0,32.$$

**Rješenje:**



Dodirni tlak  $p_d$  kod poznatog preklopa  $\delta$  može se odrediti iz uvjeta radijalnih pomaka sastavnih cijevi na površini dodira cijevi  $r = r_2$ , (slika 1.b):

$$(u^{\text{II}})_{r=r_2} = (u^{\text{I}})_{r=r_2} + \delta.$$

Slijedi [izraz \(73\)](#) za izračunavanje tlaka  $p_d$  na mjestu dodira, kod poznatog preklopa  $\delta$ , nakon prisilnog sastavljanja cijevi (I) i (II), odnosno u jednostavnijem obliku [izrazi \(74\)](#) i [\(75\)](#). Uvrštavanjem zadanih vrijednosti dobiva se vrijednost tlaka  $p_d$  na mjestu dodira:

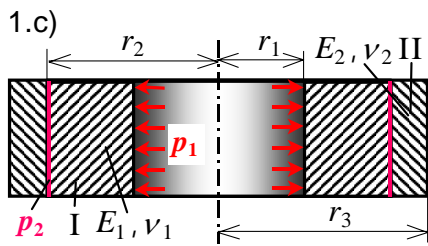
$$p_d = \frac{\delta}{r_2} \cdot \frac{1}{\frac{C_1}{E_1} + \frac{C_2}{E_2}} = \frac{0,045}{90} \cdot \frac{1}{\frac{1,4067}{110 \cdot 10^3} + \frac{5,32}{210 \cdot 10^3}} \cong 13,116 \text{ MPa},$$

gdje su konstante sastavnih cijevi  $C_1$  i  $C_2$  određene izrazima:

$$C_1 = \frac{r_2^2 + r_1^2}{r_2^2 - r_1^2} - \nu_1 = \frac{4+1}{4-1} - 0,26 = 1,4067, \quad C_2 = \frac{r_3^2 + r_2^2}{r_3^2 - r_2^2} + \nu_2 = \frac{6+4}{6-4} + 0,32 = 5,320.$$

### 1. Vrijednosti radijalnih i cirkularnih napreznja u sastavnim cijevima

Prema [izrazu \(78\)](#) tlak  $p_2$  na dodirnim površinama sastavnih cijevi (I) i (II), kod opterećenja sastavljene cijevi unutarnjim tlakom  $p_1$ , slika 1.c, jest:



$$\text{za } r = r_2 : p_2 = |(\sigma_r)_{r=r_2}| = p_d + \frac{p_1}{C_1 + C_2} \cdot \frac{E_1}{E_2} \cdot \frac{2r_1^2}{r_2^2 - r_1^2} =$$

$$= 13,116 + \frac{70}{1,4067 + 5,32 \cdot \frac{110}{210}} \cdot \frac{2 \cdot 1}{4 - 1} = 13,116 + 11,13 \cong 24,25 \text{ MPa} .$$

Vrijednosti radijalnih  $\sigma_r$  i cirkularnih naprezanja  $\sigma_\varphi$  u presjecima sastavnih cijevi određuju se prema [izrazima \(63a, b\)](#) za unutarnju cijev (I), te prema [izrazima \(63a, c\)](#) za vanjsku cijev (II), a na slici 2) dana je raspodjela naprezanja u presjecima cijevi kod opterećenja sastavljene cijevi unutarnjim tlakom  $p_1$ :

- unutarnja cijev (I):

$$(\sigma_r^I)_{r=r_1} = -p_1 = -70 \text{ MPa} ,$$

$$(\sigma_r^I)_{r=r_2} = -p_2 = -24,25 \text{ MPa} ,$$

$$(\sigma_\varphi^I)_{r=r_1} = p_1 \cdot \frac{r_2^2 + r_1^2}{r_2^2 - r_1^2} - p_2 \cdot \frac{2r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} \cong 52 \text{ MPa} ,$$

$$(\sigma_\varphi^I)_{r=r_2} = p_1 \cdot \frac{2r_1^2}{r_2^2 - r_1^2} - p_2 \cdot \frac{r_2^2 + r_1^2}{r_2^2 - r_1^2} \cong 6,26 \text{ MPa} ,$$

- vanjska cijev (II):

$$(\sigma_r^{II})_{r=r_2} = -p_2 = -24,25 \text{ MPa} , \quad (\sigma_r^{II})_{r=r_3} = 0 ,$$

$$(\sigma_\varphi^{II})_{r=r_2} = p_2 \cdot \frac{r_3^2 + r_2^2}{r_3^2 - r_2^2} = 24,25 \cdot \frac{6 + 4}{6 - 4} = 121,22 \text{ MPa} ,$$

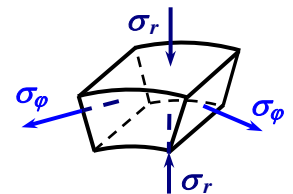
$$(\sigma_\varphi^{II})_{r=r_3} = p_2 \cdot \frac{2r_2^2}{r_3^2 - r_2^2} = 24,25 \cdot \frac{2 \cdot 4}{6 - 4} \cong 97,0 \text{ MPa} .$$

## 2. Faktori sigurnosti sastavnih cijevi

Najveća su naprezanja u točkama unutarnjih površina debelih cijevi (I) i (II), gdje vlada dvoosno stanje naprezanja, a iznosi glavnih naprezanja su (na slici elementa):

$$(I): \quad \sigma_1 = (\sigma_\varphi^I)_{r=r_1} = 52 \text{ MPa} , \quad \sigma_3 = (\sigma_r^I)_{r=r_1} = -70 \text{ MPa} ,$$

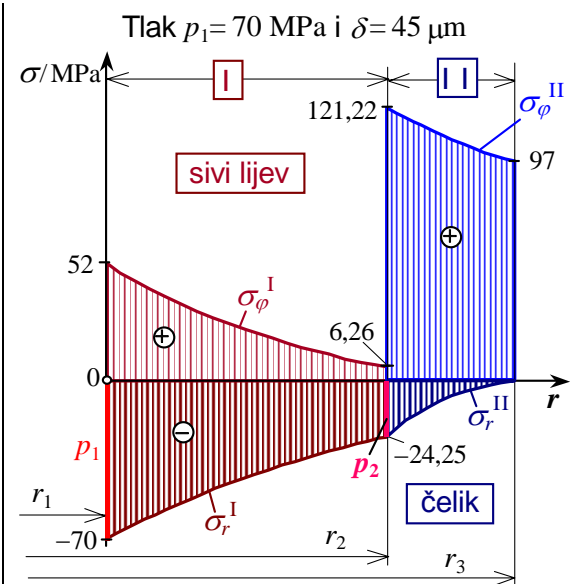
$$(II): \quad \sigma_1 = (\sigma_\varphi^{II})_{r=r_2} = 121,22 \text{ MPa} , \quad \sigma_3 = (\sigma_r^{II})_{r=r_2} = -24,25 \text{ MPa} .$$



Maksimalno ekvivalentno naprezanje prema teoriji najvećeg posmičnog naprezanja  $\tau_{\max}$  u tim točkama sastavnih cijevi jest:

$$(I): \quad \sigma_{\text{ekv}}^I = \sigma_1 - \sigma_3 = 52 - (-70) = 122 \text{ MPa} ,$$

$$(II): \quad \sigma_{\text{ekv}}^{II} = \sigma_1 - \sigma_3 = 121,22 - (-24,25) = 145,47 \text{ MPa} .$$



Slika 2. Raspodjela naprezanja, različiti materijali: sivi ljev – čelik

Faktori sigurnosti sastavnih cijevi u opterećenoj sastavljenoj cijevi su:

$$\text{za cijev (I), od sivog lijeva, na rasteznu čvrstoću: } S_m^I = \frac{R_{mv}}{\sigma_{ekv}^I} = \frac{200}{122} = 1,64,$$

$$\text{te za cijev (II), od čelika, na tečenje: } S_T^{II} = \frac{R_e}{\sigma_{ekv}^{II}} = \frac{225}{145,47} = 1,55.$$

Čvrstoća obje sastavne cijevi zadovoljava, jer je prema propisima:  $S_{\min} = 1,5$ .

### 3. Iznosi radijalnih pomaka točaka površina sastavnih cijevi

Radijalni pomaci na unutarnjoj, dodirnoj i vanjskoj površini sastavljene cijevi, tj. povećanja polumjera sastavnih cijevi kod opterećenja cijevi unutarnjim tlakom  $p_1$  su:

- za unutarnju cijev (I) prema [izrazima \(79a, 79b\)](#):

$$(u^I)_{r=r_1} = \frac{r_1}{E_1} \left[ p_1 \cdot \left( \frac{r_2^2 + r_1^2}{r_2^2 - r_1^2} + \nu_1 \right) - p_2 \cdot \frac{2 \cdot r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} \right] = \frac{45}{1,1 \cdot 10^5} \cdot \left[ 70 \cdot \left( \frac{4+1}{4-1} + 0,26 \right) - 24,25 \cdot \frac{2 \cdot 4}{4-1} \right] = 0,029 \text{ mm},$$

$$(u^I)_{r=r_2} = \frac{r_2}{E_1} \left[ \frac{p_1 \cdot 2r_1^2}{r_2^2 - r_1^2} - p_2 \cdot \left( \frac{r_2^2 + r_1^2}{r_2^2 - r_1^2} - \nu_1 \right) \right] = \frac{90}{1,1 \cdot 10^5} \cdot \left[ \frac{70 \cdot 2 \cdot 1}{4-1} - 24,25 \cdot \left( \frac{5}{3} - 0,26 \right) \right] = 0,010 \text{ mm},$$

- za vanjsku cijev (II) prema [izrazima \(79c, 79d\)](#):

$$(u^{II})_{r=r_2} = \frac{p_2 \cdot r_2}{E_2} \cdot \left( \frac{r_3^2 + r_2^2}{r_3^2 - r_2^2} + \nu_2 \right) = \frac{24,25 \cdot 90}{2,1 \cdot 10^5} \cdot \left[ \frac{6+4}{6-4} + 0,32 \right] = 0,055 \text{ mm},$$

tj. vrijedi:  $(u^{II})_{r=r_2} = (u^I)_{r=r_2} + \delta = 0,010 + 0,045 = 0,055 \text{ mm}$ ,

$$(u^{II})_{r=r_3} = \frac{p_2 \cdot 2r_3}{E_2} \cdot \frac{r_2^2}{r_3^2 - r_2^2} = \frac{24,25 \cdot 2 \cdot 45\sqrt{6}}{2,1 \cdot 10^5} \cdot \frac{4}{6-4} = 0,051 \text{ mm}.$$