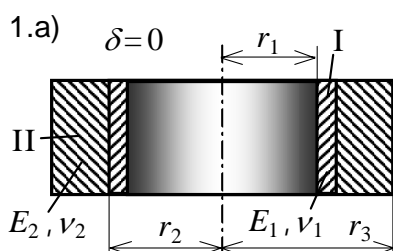


1. Primjer: Sastavljena debela cijev od različitih materijala, sastavljena bez početnog preklopa, opterećena unutarnjim tlakom

Sastavljena debela cijev sastoji se od mjedene unutarnje cijevi (I) polumjera r_1 i r_2 , te čelične vanjske cijevi (II) polumjera r_2 i r_3 , slika 1.a). Kod sastavljanja cijevi nije bilo preklopa između cijevi ($\delta=0$). Nakon sastavljanja cijev je opterećena jednolikim unutarnjim tlakom p_1 .

Treba odrediti:

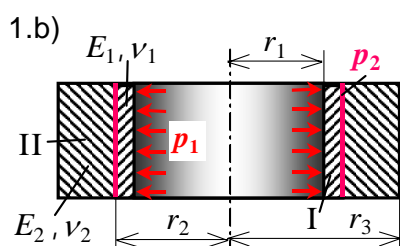
1. vrijednosti radialnih i cirkularnih naprezanja σ_r i σ_φ za unutarnju (I) i vanjsku cijev (II), uz skice raspodjele naprezanja po presjeku cijevi
2. faktore sigurnosti na tečenje sastavnih cijevi
3. iznose pomaka točaka površina sastavnih cijevi, tj. povećanja polumjera cijevi.



Zadano:

$r_1 = 5$ cm, $r_2 = 6$ cm, $r_3 = 9$ cm, $p_1 = 800$ bar, $\nu_1 = \nu_2 = 0,3$,
mjedena cijev (I): $R_{p0,2} = 220$ MPa, $E_1 = 125$ GPa,
čelična cijev (II): $R_e = 225$ MPa, $E_2 = 210$ GPa.

Rješenje:



Za sastavljenu cijev, nakon opterećivanja unutarnjim tlakom p_1 , tlak p_2 na dodirnim površinama sastavnih cijevi (I) i (II), (slika 1.b), može se odrediti iz jednakosti pomaka tih površina, tj. vrijedi:

$$(u^{\text{II}})_{r=r_2} = (u^{\text{I}})_{r=r_2} \text{ uz } (\delta=0).$$

Prema [izrazima \(79b\) i \(79c\)](#), uz zadane vrijednosti, slijedi :

$$\begin{aligned} (u^{\text{I}})_{r=r_2} &= \frac{2 p_1 \cdot r_1^2}{E_1} \cdot \frac{r_2}{r_2^2 - r_1^2} - p_2 \cdot \frac{r_2}{E_1} \cdot \left(\frac{r_2^2 + r_1^2}{r_2^2 - r_1^2} - \nu_1 \right) = \frac{p_1 \cdot r_2}{E_1} \cdot \frac{2 \cdot 5^2}{6^2 - 5^2} - p_2 \cdot \frac{r_2}{E_1} \cdot \left(\frac{6^2 + 5^2}{6^2 - 5^2} - 0,3 \right) = \\ &= \frac{6}{125 \cdot 10^3} \cdot \left[p_1 \cdot \frac{50}{11} - p_2 \cdot \left(\frac{61}{11} - 0,3 \right) \right], \end{aligned} \quad (\text{a})$$

$$(u^{\text{II}})_{r=r_2} = \frac{p_2 \cdot r_2}{E_2} \cdot \left(\frac{r_3^2 + r_2^2}{r_3^2 - r_2^2} + \nu_2 \right) = p_2 \cdot \frac{6}{210 \cdot 10^3} \cdot \left(\frac{9^2 + 6^2}{9^2 - 6^2} + 0,3 \right) = p_2 \cdot \frac{6}{210 \cdot 10^3} \cdot \left(\frac{117}{45} + 0,3 \right). \quad (\text{b})$$

Izjednačavanjem izraza (a) i (b), slijedi apsolutna vrijednost tlaka p_2 na dodirnim površinama sastavnih cijevi:

$$\begin{aligned} \frac{6}{125 \cdot 10^3} \cdot \left[p_1 \cdot \frac{50}{11} - p_2 \cdot \left(\frac{61}{11} - 0,3 \right) \right] &= p_2 \cdot \frac{6}{210 \cdot 10^3} \cdot \left(\frac{117}{45} + 0,3 \right) \cdot \frac{10^3}{6} \\ p_2 \cdot (0,01381 + 0,041964) &= p_1 \cdot 0,036364 \Rightarrow p_2 \cdot 0,055774 = p_1 \cdot 0,036364, \end{aligned}$$

$$p_2 = p_1 \cdot \frac{0,036364}{0,055774} \cong 0,065203 \cdot p_1 = 0,065203 \cdot 800 = 521,62 \text{ bar} \cong 52,16 \text{ MPa}.$$

1. Vrijednosti radijalnih i cirkularnih naprezanja u dijelovima sastavljene cijevi opterećene unutarnjim tlakom p_1 , slika 1.b)

Vrijednosti radijalnih i cirkularnih naprezanja σ_r i σ_φ na površinama unutarnje mje-dene (I) i vanjske čelične cijevi (II) kod opterećenja sastavljene cijevi unutarnjim tla-kom p_1 , mogu se izračunati prema izrazima (63a,b,c). Skice raspodjele naprezanja po presjeku cijevi dane su na slici 2.

Radijalne komponente naprezanja su:

$$(I) \text{ mjedena cijev: } (\sigma_r^I)_{r=r_1} = -p_1 = -80 \text{ MPa ,}$$

$$(\sigma_r^I)_{r=r_2} = -p_2 = -52,16 \text{ MPa ,}$$

(II) čelična cijev:

$$(\sigma_r^{II})_{r=r_2} = -p_2 = -52,16 \text{ MPa , } (\sigma_r^{II})_{r=r_3} = 0 .$$

Cirkularne komponente naprezanja su:

(I) mjedena cijev:

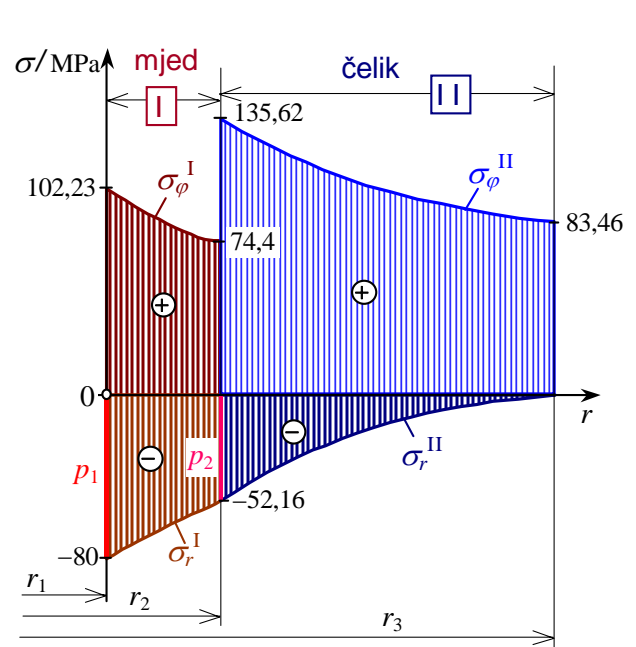
$$\begin{aligned} (\sigma_\varphi^I)_{r=r_1} &= p_1 \cdot \frac{r_2^2 + r_1^2}{r_2^2 - r_1^2} - p_2 \cdot \frac{2r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} = \\ &= 80 \cdot \frac{6^2 + 5^2}{6^2 - 5^2} - 52,16 \cdot \frac{2 \cdot 6^2}{6^2 - 5^2} = 102,23 \text{ MPa ,} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\sigma_\varphi^I)_{r=r_2} &= p_1 \cdot \frac{2r_1^2}{r_2^2 - r_1^2} - p_2 \cdot \frac{r_2^2 + r_1^2}{r_2^2 - r_1^2} = \\ &= 80 \cdot \frac{2 \cdot 5^2}{6^2 - 5^2} - 52,16 \cdot \frac{6^2 + 5^2}{6^2 - 5^2} = 74,40 \text{ MPa .} \end{aligned}$$

(II) čelična cijev:

$$(\sigma_\varphi^{II})_{r=r_2} = p_2 \cdot \frac{r_3^2 + r_2^2}{r_3^2 - r_2^2} = 52,16 \cdot \frac{9^2 + 6^2}{9^2 - 6^2} = 135,62 \text{ MPa ,}$$

$$(\sigma_\varphi^{II})_{r=r_3} = p_2 \cdot \frac{2r_2^2}{r_3^2 - r_2^2} = 52,16 \cdot \frac{2 \cdot 6^2}{9^2 - 6^2} = 83,46 \text{ MPa .}$$



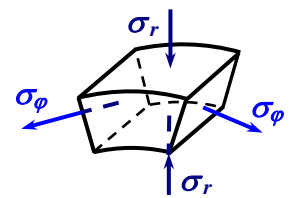
Slika 2. Skice raspodjele radijalnih i cirkularnih naprezanja u stijenka sastavnih cijevi

2. Faktori sigurnosti na tečenje sastavnih cijevi

Najveća su naprezanja u točkama unutarnjih površina debelih cijevi (I) i (II), gdje vlada dvoosno stanje naprezanja, a iznosi glavnih naprezanja su (na slici elementa):

$$(I): \sigma_1 = (\sigma_\varphi^I)_{r=r_1} = 102,23 \text{ MPa , } \sigma_3 = (\sigma_r^I)_{r=r_1} = -80 \text{ MPa ,}$$

$$(II): \sigma_1 = (\sigma_\varphi^{II})_{r=r_2} = 135,62 \text{ MPa , } \sigma_3 = (\sigma_r^{II})_{r=r_2} = -52,16 \text{ MPa .}$$



Maksimalno ekvivalentno naprezanje prema teoriji najvećeg posmičnog naprezanja τ_{\max} u tim točkama sastavnih cijevi jest:

$$(I): \sigma_{\text{ekv}}^I = \sigma_1 - \sigma_3 = 102,23 - (-80) = 182,23 \text{ MPa ,}$$

$$(II): \sigma_{\text{ekv}}^{II} = \sigma_1 - \sigma_3 = 135,62 - (-52,16) = 187,78 \text{ MPa .}$$

Faktori sigurnosti na tečenje sastavnih cijevi u opterećenoj sastavljenoj cijevi su:

$$\text{za cijev (I): } S_T^I = \frac{R_{p0,2}}{\sigma_{ekv}^I} = \frac{220}{182,23} = 1,21$$

$$\text{te za cijev (II): } S_T^{II} = \frac{R_e}{\sigma_{ekv}^{II}} = \frac{225}{187,78} = 1,20.$$

3. Numeričke vrijednosti radijalnih pomaka površina sastavnih cijevi kod opterećenja sastavljene cijevi unutarnjim tlakom $p_1 = 80 \text{ MPa}$

Radijalni pomaci na unutarnjoj, dodirnoj i vanjskoj površini sastavljene cijevi, tj. povećanja polumjera sastavnih cijevi kod opterećenja cijevi unutarnjim tlakom p_1 su:

- za unutarnju mjedenu cijev (I) prema [izrazima \(79a, 79b\)](#):

$$\begin{aligned} (u^I)_{r=r_1} &= \frac{p_1 \cdot r_1}{E_1} \cdot \left(\frac{r_2^2 + r_1^2}{r_2^2 - r_1^2} + \nu_1 \right) - p_2 \cdot \frac{2r_1}{E_1} \cdot \frac{r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} = \\ &= \frac{50}{125000} \cdot \left[80 \cdot \left(\frac{6^2 + 5^2}{6^2 - 5^2} + 0,3 \right) - 52,16 \cdot \frac{2 \cdot 6^2}{6^2 - 5^2} \right] = 0,051 \text{ mm}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (u^I)_{r=r_2} &= p_1 \cdot \frac{2r_2}{E_1} \cdot \frac{r_1^2}{r_2^2 - r_1^2} - p_2 \cdot \frac{r_2}{E_1} \cdot \left(\frac{r_2^2 + r_1^2}{r_2^2 - r_1^2} - \nu_1 \right) = \\ &= \frac{60}{125000} \cdot \left[80 \cdot \frac{2 \cdot 5^2}{6^2 - 5^2} - 52,16 \cdot \left(\frac{6^2 + 5^2}{6^2 - 5^2} - 0,3 \right) \right] = 0,043 \text{ mm} \end{aligned}$$

- za vanjsku čeličnu cijev (II) prema [izrazima \(79c, 79d\)](#):

$$(u^{II})_{r=r_2} = \frac{p_2 \cdot r_2}{E_2} \cdot \left(\frac{r_3^2 + r_2^2}{r_3^2 - r_2^2} + \nu_2 \right) = \frac{52,16 \cdot 60}{210000} \cdot \left(\frac{9^2 + 6^2}{9^2 - 6^2} + 0,3 \right) = 0,043 \text{ mm} = (u^I)_{r=r_2},$$

$$(u^{II})_{r=r_3} = \frac{p_2 \cdot r_3}{E_2} \cdot \frac{2r_2^2}{r_3^2 - r_2^2} = \frac{52,16 \cdot 90}{210000} \cdot \frac{2 \cdot 6^2}{9^2 - 6^2} = 0,036 \text{ mm}.$$