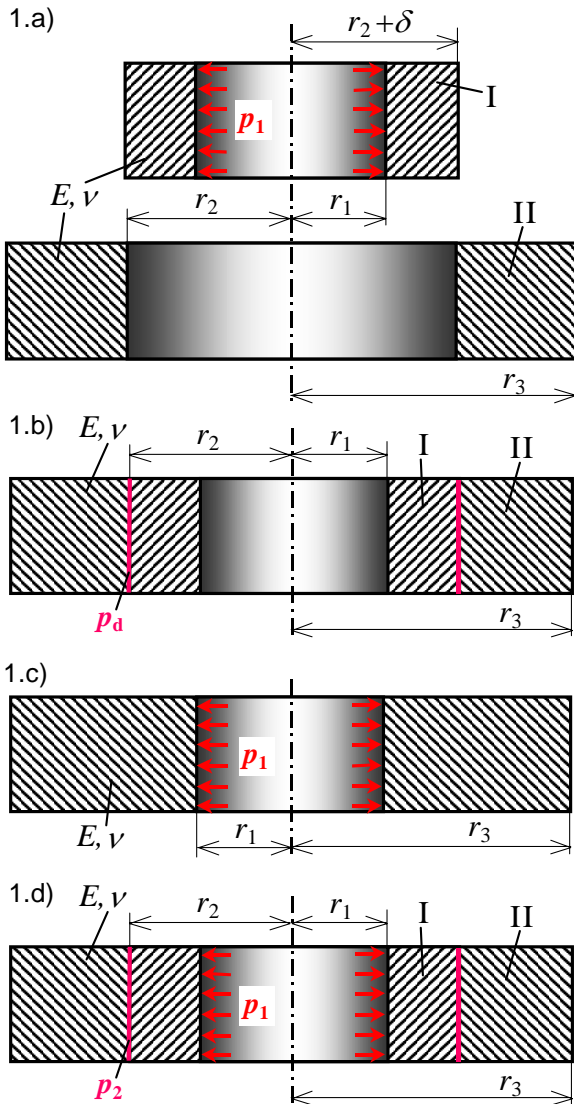


### 3. Primjer: Sastavljena debela cijev opterećena unutarnjim tlakom



Sastavljena debela cijev sastoji se od unutarnje cijevi (I) polumjera  $r_1$  i  $r_2$ , te vanjske cijevi (II) polumjera  $r_2$  i  $r_3$ , slika 1.a). Cijev je opterećena jednolikim unutarnjim tlakom  $p_1$ . Tlak na sastavu cijevi je  $p_a$  (nakon prisilnog sastavljanja, a prije opterećivanja cijevi), slika 1.b).

Treba odrediti:

- vrijednosti polumjera  $r_2$  i  $r_3$  sastavljene cijevi prema teoriji najvećeg posmičnog naprezanja  $\tau_{\max}$ , ako je granica rastezanja materijala  $R_e = 600$  MPa i minimalni faktor sigurnosti cijevi  $s_{\min} = 2$ , za slučaj optimalnog prijeklopa  $\delta$  na mjestu sastava cijevi te tlak dodira cijevi  $p_a$ , slika 1.a), ako je zadano:  
 $r_1 = 5$  cm,  $p_1 = 2000$  bar,  $E = 200$  GPa,  $\nu = 0,3$ ,
- vrijednosti radijalnih i cirkularnih naprezanja  $\sigma_r$  i  $\sigma_\varphi$ , uz skice raspodjele naprezanja po presjeku cijevi i to:
  - za cijev od jednog dijela, polumjera  $r_1$  i  $r_3$  te opterećenu unutarnjim tlakom  $p_1$ , slika 1.c)
  - za sastavljenu cijev, polumjera  $r_1$ ,  $r_2$  i  $r_3$  opterećenu unutarnjim tlakom  $p_1$ , slika 1.d),
- vrijednosti pomaka točaka površina cijevi (povećanja polumjera cijevi), slika 1.d).

#### 1. Vrijednosti polumjera dijelova cijevi

Za optimalni prijeklop, ekvivalentno naprezanje prema teoriji najvećeg posmičnog naprezanja  $\tau_{\max}$  jest:

$$\sigma_{\text{ekv}} = \sigma_1 - \sigma_3 = p_1 \cdot \frac{r_3}{r_3 - r_1} \leq \frac{R_e}{s_{\min}} \Rightarrow \frac{r_3}{r_3 - r_1} \leq \frac{R_e}{p_1 \cdot s_{\min}} = \frac{600}{200 \cdot 2} = 1,5,$$

te slijedi vanjski polumjer cijevi (II):

$$r_3 = 3 \cdot r_1 = 3 \cdot 50 = 150 \text{ mm}.$$

Polumjer sastava cijevi je u slučaju optimalnog prijeklopa, prema [Gadolinovom uvjetu](#):

$$r_2 = \sqrt{r_1 \cdot r_3} = r_1 \sqrt{3} = 50 \sqrt{3} \cong 86,6 \text{ mm}.$$

Vrijednost prijeklopa  $\delta$  kod prisilnog sastavljanja cijevi odgovara vrijednosti optimalnog prijeklopa, tj.:

$$\delta = \delta_{\text{opt}} = \frac{p_1}{E} \cdot r_2 = \frac{200}{2 \cdot 10^5} \cdot 86,6 = 0,0866 \text{ mm}.$$

Ova vrijednost odgovara steznom spoju H8/u8, gdje su za  $d_N = 2r_2 \cong 174$  mm prema [tablici tolerancije prijeklopa](#) odstupanja promjera  $-166/-254$   $\mu\text{m}$ .

U tom je slučaju vrijednost dodirnog tlaka  $p_d$  na sastavu cijevi ( $r = r_2$ ), slika 1.b):

$$p_d = \frac{p_1}{2} \cdot \frac{r_3 - r_1}{r_3 + r_1} = \frac{200}{2} \cdot \frac{150 - 50}{150 + 50} = 50 \text{ MPa} .$$

## 2. Vrijednosti radijalnih i cirkularnih napreznja u debeloj cijevi

### a) cijev od jednog dijela ( $r_1, r_3$ ), djeluje samo unutarnji tlak $p_1$ , slika 1.c)

Prema [izrazima \(60a\) i \(60b\)](#) vrijednosti napreznja na unutarnjoj i vanjskoj površini debele cijevi opterećene unutarnjim tlakom  $p_1$  su (grafički prikaz napreznja na slici):

$$(\sigma_r)_{r=r_1} = -p_1 = -200 \text{ MPa} , (\sigma_r)_{r=r_2} = p_1 \cdot \frac{r_1^2}{r_3^2 - r_1^2} \cdot \left[ 1 - \frac{r_3^2}{r_2^2} \right] = -\frac{1}{4} p_1 = -50 \text{ MPa} , (\sigma_r)_{r=r_3} = 0 ,$$

$$(\sigma_\varphi)_{r=r_1} = p_1 \cdot \frac{r_3^2 + r_1^2}{r_3^2 - r_1^2} = p_1 \cdot \frac{3^2 + 1}{3^2 - 1} = \frac{5}{4} p_1 = 250 \text{ MPa} ,$$

$$(\sigma_\varphi)_{r=r_2} = p_1 \cdot \frac{r_1^2}{r_3^2 - r_1^2} \cdot \left[ 1 + \frac{r_3^2}{r_2^2} \right] = p_1 \cdot \frac{1}{3^2 - 1} \cdot \left[ 1 + \frac{3^2}{3} \right] = p_1 \cdot \frac{1}{8} \cdot 4 = \frac{p_1}{2} = 100 \text{ MPa} ,$$

$$(\sigma_\varphi)_{r=r_3} = p_1 \cdot \frac{2r_1^2}{r_3^2 - r_1^2} = p_1 \cdot \frac{2}{3^2 - 1} = \frac{1}{4} p_1 = 50 \text{ MPa} .$$

### b) za sastavljenu cijev opterećenu unutarnjim tlakom $p_1$ , slika 1.d)

Vrijednosti radijalnih i cirkularnih napreznja na unutarnjoj i vanjskoj površini sastavnih dijelova debele cijevi opterećene unutarnjim tlakom  $p_1 = 210 \text{ MPa}$  izračunate su prema [izrazima \(63a,b,c\)](#) i grafički prikazane na slici raspodjele napeznja.

Vrijednost tlaka  $p_2$  na površinama dodira sastavnih cijevi (I) i (II) kod opterećenja sastavljene cijevi unutarnjim tlakom  $p_1$ , prema [izrazu \(62\)](#) jest:

$$p_2 = |(\sigma_r)_{r=r_2}| = p_d - p_1 \cdot \frac{r_1^2}{r_3^2 - r_1^2} \cdot \left[ 1 - \frac{r_3^2}{r_2^2} \right] = 50 - 200 \cdot \frac{5^2}{15^2 - 5^2} \cdot \left[ 1 - \frac{3^2}{3} \right] = 50 + 50 = 100 \text{ MPa} .$$

- radijalne komponente napreznja su:

$$(\sigma_r^I)_{r=r_1} = -p_1 = -200 \text{ MPa} , (\sigma_r^I)_{r=r_2} = (\sigma_r^{II})_{r=r_2} = -p_2 = -100 \text{ MPa} , (\sigma_r^{II})_{r=r_3} = 0 .$$

- cirkularne komponente napreznja za unutarnju cijev (I) su:

$$(\sigma_\varphi^I)_{r=r_1} = p_1 \cdot \frac{r_2^2 + r_1^2}{r_2^2 - r_1^2} - p_2 \cdot \frac{2r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} = 200 \cdot \frac{3+1}{3-1} - 100 \cdot \frac{2 \cdot 3}{3-1} = 400 - 300 = 100 \text{ MPa} ,$$

$$(\sigma_\varphi^I)_{r=r_2} = p_1 \cdot \frac{2r_1^2}{r_2^2 - r_1^2} - p_2 \cdot \frac{r_2^2 + r_1^2}{r_2^2 - r_1^2} = 200 \cdot \frac{2 \cdot 1}{3-1} - 100 \cdot \frac{3+1}{3-1} = 200 - 200 = 0 ,$$

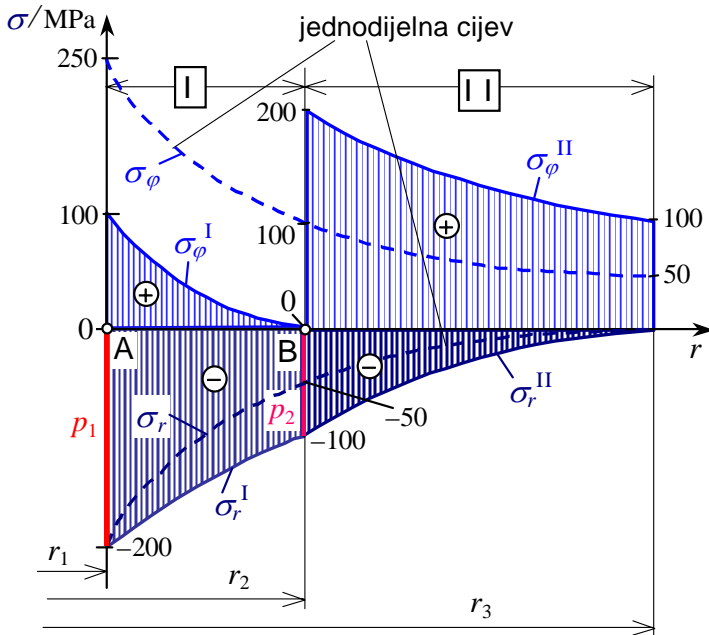
- cirkularne komponente napreznja za vanjsku cijev (II) su:

$$(\sigma_\varphi^{II})_{r=r_2} = p_2 \cdot \frac{r_3^2 + r_2^2}{r_3^2 - r_2^2} = 100 \cdot \frac{3^2 + 3}{3^2 - 3} = 100 \cdot 2 = 200 \text{ MPa} ,$$

$$(\sigma_\varphi^{II})_{r=r_3} = p_2 \cdot \frac{2r_2^2}{r_3^2 - r_2^2} = 100 \cdot \frac{2 \cdot 3}{3^2 - 3} = 100 \cdot 1 = 100 \text{ MPa} .$$

Maksimalno ekvivalentno naprezanje prema teoriji najvećeg posmičnog naprezanja  $\tau_{\max}$ , jednako je za obje sastavne cijevi:

$$\sigma_{\text{ekv}}^I = \sigma_1 - \sigma_3 = (\sigma_\varphi)_{r_1} - (\sigma_r)_{r_1} = 100 + 200 = 300 \text{ MPa} = \sigma_{\text{ekv}}^{\text{II}}$$



Prikaz raspodjele vrijednosti radijalnih i cirkularnih naprezanja:

- - - - za jednodijelnu cijev ( $r_1, r_3$ ) kod opterećenja unutarnjim tlakom  $p_1$ ,
- — za sastavljenu cijev (I) i (II) kod opterećenja sastavljene cijevi unutarnjim tlakom  $p_1 = 200 \text{ MPa}$ .

### 3. Numeričke vrijednosti radijalnih pomaka površina dijelova sastavljene cijevi kod zadanog unutarnjeg tlaka $p_1 = 200 \text{ MPa}$

Radijalni pomaci na unutarnjoj, dodirnoj i vanjskoj površini sastavljene cijevi, tj. povećanja polumjera sastavnih cijevi (I) i (II) kod opterećenja sastavljene cijevi unutarnjim tlakom  $p_1$  su:

- za unutarnju cijev (I) prema [izrazima \(64a, 64b\)](#):

$$(u^I)_{r=r_1} = \frac{p_1 \cdot r_1}{E} \cdot \left( \frac{r_2^2 + r_1^2}{r_2^2 - r_1^2} + \nu \right) - \frac{p_2 \cdot 2r_1}{E} \cdot \frac{r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} = \frac{50}{2 \cdot 10^5} \cdot [200 \cdot (2 + 0,3) - 100 \cdot 3] = 0,040 \text{ mm} ,$$

$$(u^I)_{r=r_2} = \frac{p_1 \cdot r_1^2 \cdot 2r_2}{E \cdot (r_2^2 - r_1^2)} - \frac{p_2 \cdot r_2}{E} \cdot \left( \frac{r_2^2 + r_1^2}{r_2^2 - r_1^2} - \nu \right) = \frac{50\sqrt{3}}{2 \cdot 10^5} \cdot \left[ 2 \cdot 200 \cdot \frac{1}{2} - 100 \cdot (2 - 0,3) \right] = 0,013 \text{ mm} ,$$

- za vanjsku cijev (II) prema [izrazima \(64c, 64d\)](#):

$$(u^{\text{II}})_{r=r_2} = \frac{p_2 \cdot r_2}{E} \cdot \left( \frac{r_3^2 + r_2^2}{r_3^2 - r_2^2} + \nu \right) = \frac{100 \cdot 50\sqrt{3}}{2 \cdot 10^5} \cdot (2 + 0,3) = 0,0996 \text{ mm} ,$$

tj. vrijedi:  $(u^{\text{II}})_{r=r_2} = (u^I)_{r=r_2} + \delta = 0,013 + 0,0866 = 0,0996 \text{ mm} ,$

$$(u^{\text{II}})_{r=r_3} = p_2 \cdot \frac{2r_3}{E} \cdot \frac{r_2^2}{r_3^2 - r_2^2} = 100 \cdot \frac{2 \cdot 150}{2 \cdot 10^5} \cdot \frac{3}{3^2 - 3} = 0,075 \text{ mm} .$$