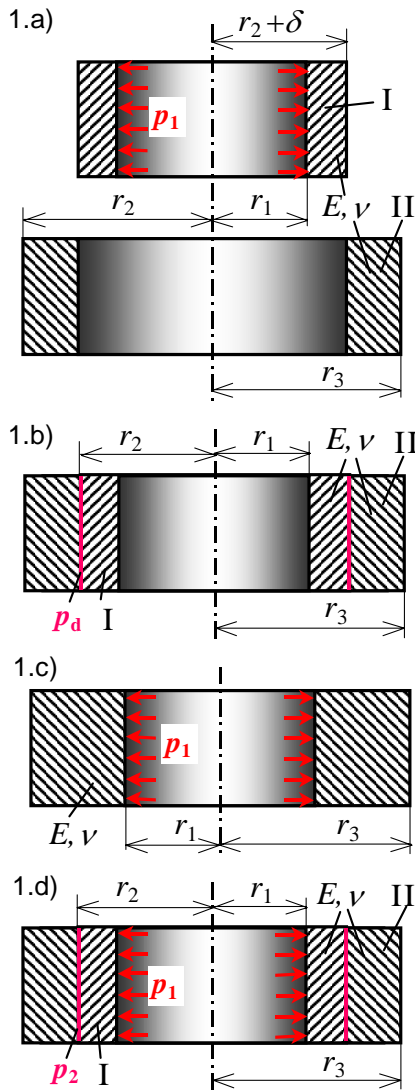


2. Primjer: Sastavljena debela cijev opterećena unutarnjim tlakom



Sastavljena debela cijev sastoji se od unutarnje cijevi (I) polumjera r_1 i r_2 , te vanjske cijevi (II) polumjera r_2 i r_3 , slika 1. a). Cijev je opterećena jednolikim unutarnjim tlakom p_1 . Tlak na sastavu cijevi je p_d (nakon prisilnog sastavljanja, a prije opterećivanja cijevi), slika 1. b).

Treba odrediti:

1. vrijednosti radijalnih i cirkularnih naprezanja σ_r i σ_φ , uz skice raspodjele naprezanja po presjeku cijevi i to:
 - a) za unutarnju (I) i vanjsku cijev (II) opterećene na sastavu cijevi tlakom p_d , slika 1. b)
 - b) za cijev od jednog dijela, polumjera r_1 i r_3 te opterećenu unutarnjim tlakom p_1 , slika 1. c)
 - c) za sastavljenu cijev, polumjera r_1 , r_2 i r_3 opterećenu unutarnjim tlakom p_1 , slika 1. d), ako je zadano:

$$r_1, \quad r_2 = r_1\sqrt{2}, \quad r_3 = 2r_1, \quad p_1, \quad p_d = \frac{1}{6} p_1,$$

2. dopuštenu vrijednost unutarnjeg tlaka p_{1dop} sastavljene cijevi prema teoriji najvećeg posmičnog naprezanja τ_{max} , ako je dopušteno naprezanje materijala: $\sigma_{dop} = 420 \text{ MPa}$,

3. vrijednost prijeloma δ na mjestu sastava cijevi kod poznatog dodirnog tlaka p_d , ako je zadano:

$$r_1 = 2,5 \text{ cm}, \quad p_1 = p_{dop}, \quad E = 210 \text{ GPa}, \quad \nu = 0,3,$$

4. numeričke vrijednosti naprezanja σ_r i σ_φ , uz skice raspodjele naprezanja te pomake točaka površina cijevi, ako je zadano:

$$r_1 = 25 \text{ mm}, \quad r_2 = r_1\sqrt{2}, \quad r_3 = 2r_1, \quad p_d = \frac{1}{6} p_1, \quad p_1 = 210 \text{ MPa}.$$

1. Vrijednosti radijalnih i cirkularnih naprezanja u dijelovima cijevi

a) unutarnja (I) i vanjska cijev (II) opterećene na sastavu tlakom p_d , slika 1. b)

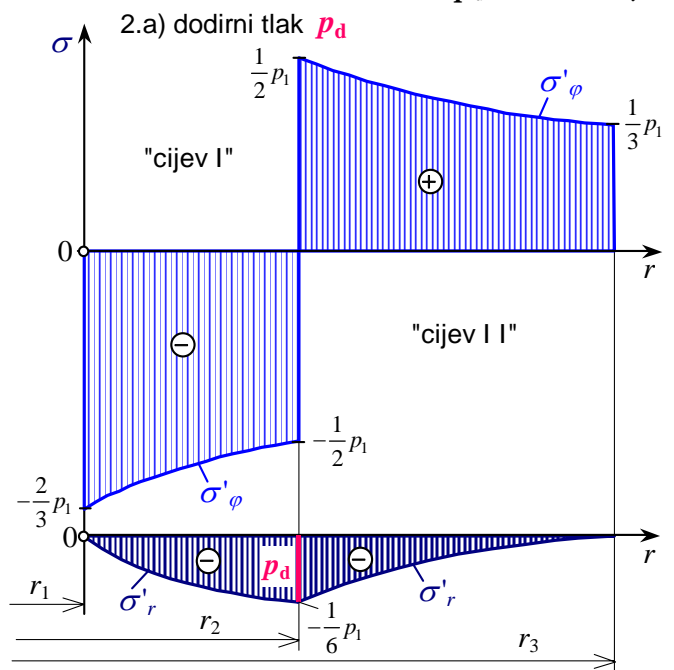
Vrijednosti radijalnih σ_r i cirkularnih naprezanja σ_φ određuju se prema [izrazima \(59a\)](#) za unutarnju cijev (I), te prema [izrazima \(59b\)](#) za vanjsku cijev (II), a na slici 2. a) dana je raspodjela naprezanja u presjecima cijevi nakon prisilnog spajanja:

- unutarnja cijev (I):

$$(\sigma'_r)_{r=r_1} = 0, \quad (\sigma'_r)_{r=r_2} = -p_d = -\frac{1}{6} p_1,$$

$$(\sigma'_\varphi)_{r=r_1} = -p_d \cdot \frac{2r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} = -\frac{p_1}{6} \cdot \frac{2 \cdot 2}{2 - 1} = -\frac{2}{3} p_1,$$

$$(\sigma'_\varphi)_{r=r_2} = -p_d \cdot \frac{r_2^2 + r_1^2}{r_2^2 - r_1^2} = -\frac{p_1}{6} \cdot \frac{2 + 1}{2 - 1} = -\frac{1}{2} p_1,$$



- vanjska cijev (I I):

$$(\sigma'_r)_{r=r_2} = -p_d = -\frac{1}{6} p_1, \quad (\sigma'_r)_{r=r_3} = 0,$$

$$(\sigma'_\varphi)_{r=r_2} = p_d \cdot \frac{r_3^2 + r_2^2}{r_3^2 - r_2^2} = \frac{p_1}{6} \cdot \frac{2^2 + 2}{2^2 - 2} = \frac{1}{2} p_1, \quad (\sigma'_\varphi)_{r=r_3} = p_d \cdot \frac{2r_2^2}{r_3^2 - r_2^2} = \frac{p_1}{6} \cdot \frac{2 \cdot 2}{2^2 - 2} = \frac{1}{3} p_1.$$

b) cijev od jednog dijela (r_1, r_3), djeluje samo unutarnji tlak p_1 , slika 1.c)

Prema [izrazima \(60a\) i \(60b\)](#) vrijednosti naprezanja na unutarnjoj i vanjskoj površini debele cijevi opterećene unutarnjim tlakom p_1 su (prikaz naprezanja na slici 2.b):

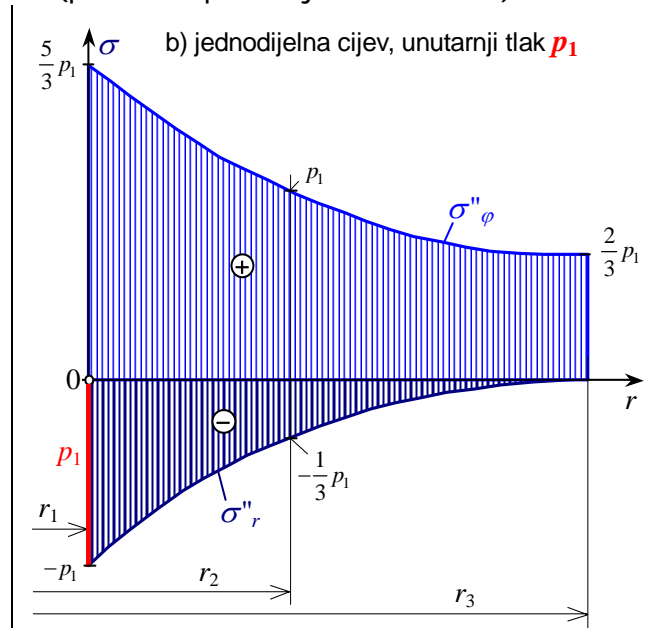
$$(\sigma''_r)_{r=r_1} = -p_1, \quad (\sigma''_r)_{r=r_3} = 0,$$

$$(\sigma''_r)_{r=r_2} = p_1 \cdot \frac{r_1^2}{r_3^2 - r_1^2} \cdot \left[1 - \frac{r_3^2}{r_2^2} \right] = -\frac{1}{3} p_1,$$

$$(\sigma''_\varphi)_{r=r_1} = p_1 \cdot \frac{r_3^2 + r_1^2}{r_3^2 - r_1^2} = p_1 \cdot \frac{2^2 + 1}{2^2 - 1} = \frac{5}{3} p_1,$$

$$(\sigma''_\varphi)_{r=r_2} = p_1 \cdot \frac{r_1^2}{r_3^2 - r_1^2} \cdot \left[1 + \frac{r_3^2}{r_2^2} \right] = p_1 \cdot \frac{1}{3} \cdot 3 = p_1,$$

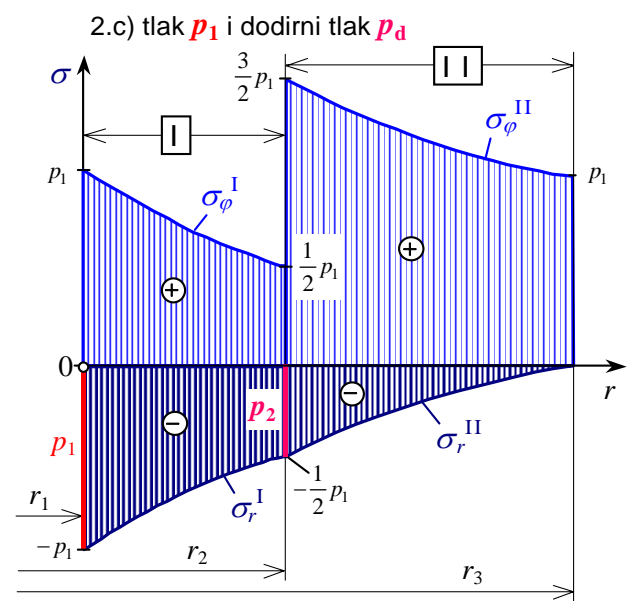
$$(\sigma''_\varphi)_{r=r_3} = p_1 \cdot \frac{2r_1^2}{r_3^2 - r_1^2} = p_1 \cdot \frac{2}{2^2 - 1} = \frac{2}{3} p_1.$$



c) za sastavljenu cijev opterećenu unutarnjim tlakom p_1 , slika 1.d)

Vrijednosti radijalnih i cirkularnih naprezanja na unutarnjoj i vanjskoj površini debele cijevi opterećene unutarnjim tlakom p_1 mogu se izračunati prema [izrazima \(61a,b,c\)](#) ili odrediti primjenom metode superpozicije zbrajanjem odgovarajućih komponenti naprezanja iz rješenja pod 1.a) i 1.b). Rezultati su dani u tablici i grafički na slici 2.c):

Tlak oper.	Kom. napr.	Cijev (I)		Cijev (II)	
		r_1	r_2	r_2	r_3
a) samo p_d	σ'_r	0	$-\frac{1}{6} p_1$	$-\frac{1}{6} p_1$	0
	σ'_φ	$-\frac{2}{3} p_1$	$-\frac{1}{2} p_1$	$\frac{1}{2} p_1$	$\frac{1}{3} p_1$
b) samo p_1	σ''_r	$-p_1$	$-\frac{1}{3} p_1$	$-\frac{1}{3} p_1$	0
	σ''_φ	$\frac{5}{3} p_1$	p_1	p_1	$\frac{2}{3} p_1$
c) $p_1 + p_d$	σ_r	$-p_1$	$-\frac{1}{2} p_1$	$-\frac{1}{2} p_1$	0
	σ_φ	p_1	$\frac{1}{2} p_1$	$\frac{3}{2} p_1$	p_1



Iz tablice i slike 2.c) vidi se, da su se u sastavljenoj debele cijevi vrijednosti cirkularnih

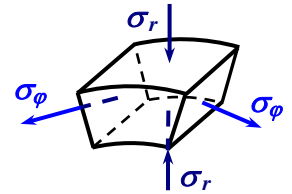
naprezanja smanjile u unutarnjoj cijevi, ali su se povećale u vanjskoj cijevi u odnosu na vrijednosti cirkularnih naprezanja u cijevi iz jednog dijela (slika 2.b), kod jednakog unutarnjeg tlaka p_1 u cijevi.

2. Vrijednost dopuštenog unutarnjeg tlaka $p_{1\text{dop}}$ u sastavljenoj cijevi

Najveća su naprezanja u točkama unutarnjih površina debelih cijevi (I) i (II), gdje vlada dvoosno stanje naprezanja, a iznosi glavnih naprezanja su (na slici elementa):

$$(I): \sigma_1 = (\sigma_\varphi)_{r=r_1} = p_1, \quad \sigma_2 = \sigma_x = 0, \quad \sigma_3 = (\sigma_r)_{r=r_1} = -p_1,$$

$$(II): \sigma_1 = (\sigma_\varphi)_{r=r_2} = \frac{3}{2} p_1, \quad \sigma_2 = \sigma_x = 0, \quad \sigma_3 = (\sigma_r)_{r=r_2} = -\frac{1}{2} p_1.$$



Maksimalno ekvivalentno naprezanje prema teoriji najvećeg posmičnog naprezanja τ_{max} jednako je u tim točkama za obje cijevi:

$$\sigma_{\text{ekv}}^I = \sigma_1 - \sigma_3 = p_1 - (-p_1) = 2p_1 \quad \text{i} \quad \sigma_{\text{ekv}}^{II} = \sigma_1 - \sigma_3 = \frac{3}{2} p_1 - (-\frac{1}{2} p_1) = 2p_1,$$

$$\text{tj.: } (\sigma_{\text{ekv}})_{\text{max}} = (\sigma_{\text{ekv}}^I)_{\text{max}} = (\sigma_{\text{ekv}}^{II})_{\text{max}} = 2p_1.$$

Vrijednost dopuštenog unutarnjeg tlaka u sastavljenoj cijevi jest:

$$(\sigma_{\text{ekv}})_{\text{max}} \leq \sigma_{\text{dop}} \Rightarrow 2p_1 \leq \sigma_{\text{dop}} \Rightarrow p_{1\text{dop}} \leq \frac{1}{2} \sigma_{\text{dop}} = \frac{1}{2} \cdot 420 = 210 \text{ MPa} = 2100 \text{ bar}.$$

3. Vrijednost prijeklopa δ u sastavljenoj cijevi kod zadanog tlaka p_d

Vidljivo je, da zadane vrijednosti polumjera dijelova cijevi u ovom primjeru ispunjavaju uvjet polumjera, tzv. Gadolinov uvjet:

$$r_2 = \sqrt{r_1 \cdot r_3} = \sqrt{r_1 \cdot 2r_1} = r_1 \sqrt{2},$$

te su tada vrijednosti ekvivalentnih naprezanja minimalne.

U tom je slučaju optimalna vrijednost dodirnog tlaka p_d na sastavu cijevi ($r = r_2$), kod opterećenja unutarnjim radnim tlakom p_1 :

$$p_d = \frac{p_1}{2} \cdot \frac{r_3 - r_1}{r_3 + r_1} = \frac{p_1}{2} \cdot \frac{2 - 1}{2 + 1} = \frac{1}{6} p_1,$$

kako je i zadano u primjeru.

Vrijednost dodirnog tlaka p_d na sastavu cijevi ($r = r_2$), kod opterećenja cijevi unutarnjim radnim tlakom $p_1 = p_{1\text{dop}} = 210 \text{ MPa}$, prema zadanom uvjetu zadatka jest:

$$p_d = \frac{1}{6} p_1 = \frac{210}{6} = 35 \text{ MPa}.$$

Vrijednost prijeklopa δ kod prisilnog sastavljanja cijevi u tom slučaju odgovara vrijednosti optimalnog prijeklopa, tj.:

$$\delta = \delta_{\text{opt}} = \frac{p_1}{E} \cdot r_2 = \frac{210}{2,1 \cdot 10^5} \cdot 25\sqrt{2} = 0,0354 \text{ mm}.$$

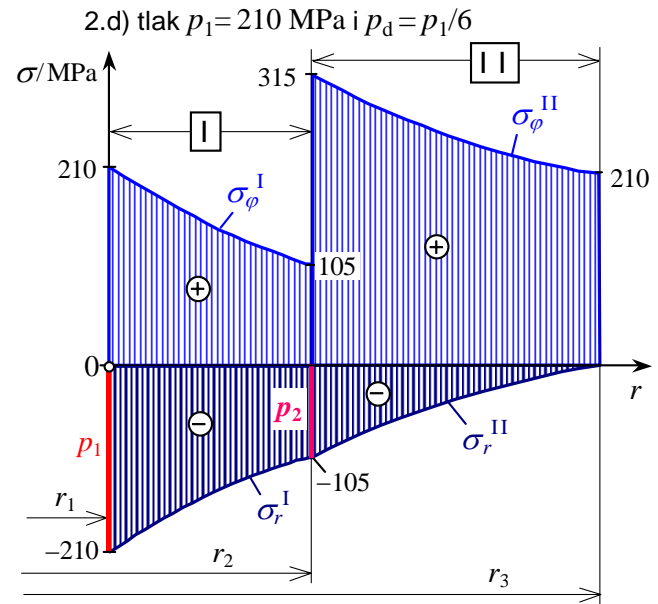
Ova vrijednost odgovara steznom spoju H7/u8, gdje su za $d_N = 2r_2 \cong 71 \text{ mm}$ prema [tablici tolerancije prijeklopa](#) odstupanja promjera $-70/-134 \text{ }\mu\text{m}$.

4. Numeričke vrijednosti naprežanja, prijeklopa i radijalnih pomaka sastavljene cijevi kod zadanog unutarnjeg tlaka $p_1 = 210$ MPa

Prema ranije dobivenim vrijednostima danim u tablici, izračunate su numeričke vrijednosti radijalnih i cirkularnih komponenti naprežanja u sastavljenoj cijevi kod opterećenja unutarnjim tlakom $p_1 = 210$ MPa te su dane u tablici (u MPa) i u grafičkom prikazu na slici 2.d).

Vrijednosti radijalnih i cirkularnih komponenti naprežanja u MPa.

Tlak oper.	Kom. napr.	Cijev (I)		Cijev (II)	
		r_1	r_2	r_2	r_3
a) samo p_d	σ'_r	0	-35	-35	0
	σ'_φ	-140	-105	105	70
b) samo p_1	σ''_r	-210	-70	-70	0
	σ''_φ	350	210	210	140
c) $p_1 + p_d$	σ_r	-210	-105	-105	0
	σ_φ	210	105	315	210



Radijalni pomaci površina sastavnih cijevi

Radijalni pomaci površina sastavnih cijevi mogu se odrediti jednostavnije kad se odredi tlak p_2 na dodiru sastavnih cijevi kod opterećenja sastavljene cijevi unutarnjim tlakom p_1 , slika 1.d). Vrijednost tlaka p_2 na površinama dodira sastavnih cijevi I i II sastavljene cijevi, prema [izrazu \(62\)](#) jest:

$$p_2 = |(\sigma_r)_{r=r_2}| = p_d - p_1 \cdot \frac{r_1^2}{r_3^2 - r_1^2} \cdot \left[1 - \frac{r_3^2}{r_2^2} \right] = p_1 \left[\frac{1}{6} - \frac{1}{2^2 - 1} \cdot \left(1 - \frac{2^2}{2} \right) \right] = \frac{1}{2} p_1 = \frac{210}{2} = 105 \text{ MPa} .$$

Radijalni pomaci na unutarnjoj, dodirnoj i vanjskoj površini sastavljene cijevi, tj. povećanja polumjera sastavnih cijevi kod opterećenja cijevi unutarnjim tlakom p_1 su:

- za unutarnju cijev (I) prema [izrazima \(64a, 64b\)](#):

$$(u^1)_{r=r_1} = \frac{p_1 \cdot r_1}{E} \cdot \left(\frac{r_2^2 + r_1^2}{r_2^2 - r_1^2} + \nu \right) - \frac{p_2 \cdot 2r_1}{E} \cdot \frac{r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} = \frac{210 \cdot 25}{2,1 \cdot 10^5} \cdot \left[\frac{2+1}{2-1} + 0,3 - \frac{1}{2} \cdot \frac{2 \cdot 2}{2-1} \right] = 0,0325 \text{ mm} ,$$

$$(u^1)_{r=r_2} = \frac{p_1 \cdot r_1^2 \cdot 2r_2}{E \cdot (r_2^2 - r_1^2)} - \frac{p_2 \cdot r_2}{E} \cdot \left(\frac{r_2^2 + r_1^2}{r_2^2 - r_1^2} - \nu \right) = \frac{210 \cdot 25 \sqrt{2}}{2,1 \cdot 10^5} \cdot \left[\frac{2 \cdot 1}{2-1} - \frac{1}{2} \cdot (3 - 0,3) \right] = 0,023 \text{ mm} ,$$

- za vanjsku cijev (II) prema [izrazima \(64c, 64d\)](#):

$$(u^{II})_{r=r_2} = \frac{p_2 \cdot r_2}{E} \cdot \left(\frac{r_3^2 + r_2^2}{r_3^2 - r_2^2} + \nu \right) = \frac{105 \cdot 25 \sqrt{2}}{2,1 \cdot 10^5} \cdot \left[\frac{2^2 + 2}{2^2 - 2} + 0,3 \right] = 0,0584 \text{ mm} ,$$

tj. vrijedi: $(u^{II})_{r=r_2} = (u^1)_{r=r_2} + \delta = 0,023 + 0,0354 = 0,0584 \text{ mm} ,$

$$(u^{II})_{r=r_3} = \frac{p_2 \cdot 2r_3}{E} \cdot \frac{r_2^2}{r_3^2 - r_2^2} = \frac{105 \cdot 2 \cdot 50}{2,1 \cdot 10^5} \cdot \frac{2}{2^2 - 2} = 0,050 \text{ mm} .$$