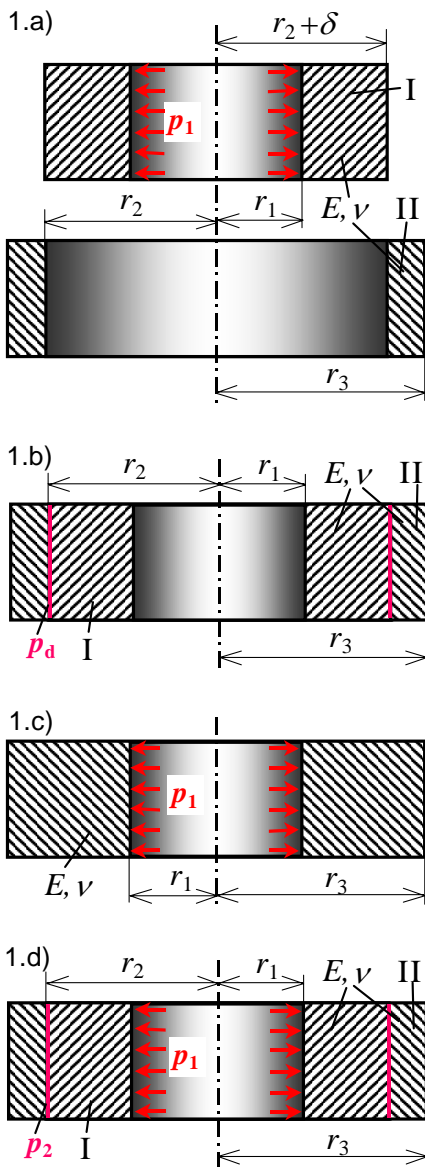


1. Primjer: Sastavljena debela cijev opterećena unutarnjim tlakom



Sastavljena debela cijev sastoji se od unutarnje cijevi (I) polumjera r_1 i r_2 , te vanjske cijevi (II) polumjera r_2 i r_3 , slika 1.a). Cijev je opterećena jednolikim unutarnjim tlakom p_1 . Tlak na sastavu cijevi je p_d (nakon prisilnog sastavljanja, a prije opterećivanja cijevi unutarnjim tlakom p_1).

Treba odrediti:

1. vrijednosti radijalnih i cirkularnih naprezanja σ_r i σ_φ , uz skice raspodjele naprezanja po poprečnom presjeku cijevi i to:

- a) za unutarnju (I) i vanjsku cijev (II) opterećene na sastavu cijevi tlakom p_d , slika 1.b)
- b) za cijev od jednog dijela, polumjera r_1 i r_3 te opterećenu unutarnjim tlakom p_1 , slika 1.c)
- c) za sastavljenu cijev, polumjera r_1 , r_2 i r_3 opterećenu unutarnjim tlakom p_1 , slika 1.d), ako je zadano:

$$r_1, r_2 = 2r_1, r_3 = r_1\sqrt{6}, p_1, p_d = \frac{1}{9} p_1,$$

2. odrediti dopuštenu vrijednost unutarnjeg tlaka p_{1dop} sastavljene cijevi prema teoriji najvećeg posmičnog naprezanja τ_{max} , ako je dopušteno naprezanje materijala: $\sigma_{dop} = 290 \text{ MPa}$,

3. odrediti vrijednost prijeklopa δ na mjestu sastava cijevi kod poznatog dodirnog tlaka p_d , ako je zadano:

$$r_1 = 4,5 \text{ cm}, p_1 = p_{dop}, E = 200 \text{ GPa}, \nu = 0,3,$$

4. odrediti numeričke vrijednosti naprezanja σ_r i σ_φ , uz skice raspodjele naprezanja te pomake točaka površina cijevi, ako je zadano:

$$r_1 = 45 \text{ mm}, r_2 = 2r_1, r_3 = r_1\sqrt{6}, p_d = \frac{1}{9} p_1, p_1 = 135 \text{ MPa}.$$

1. Vrijednosti radijalnih i cirkularnih naprezanja u dijelovima cijevi

a) za unutarnju (I) i vanjsku cijev (II) opterećene na sastavu tlakom p_d , slika 1.b)

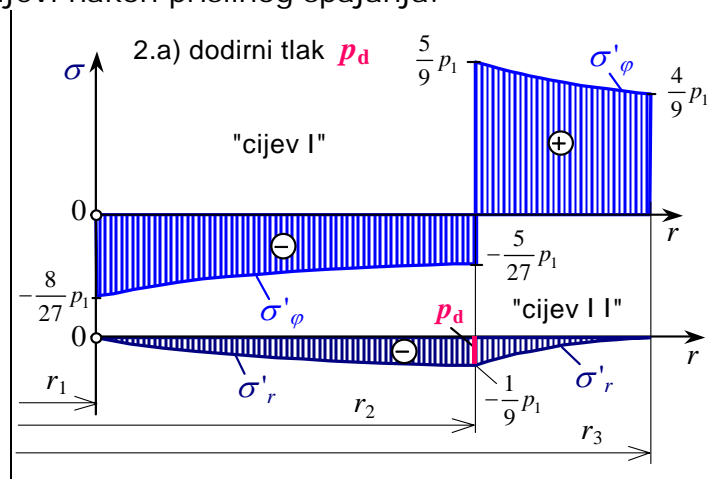
Vrijednosti radijalnih σ_r i cirkularnih naprezanja σ_φ određuju se prema [izrazima \(59a\)](#) za unutarnju cijev (I), odnosno prema [izrazima \(59b\)](#) za vanjsku cijev (II), a na slici 2.a) dana je raspodjela naprezanja u dijelovima cijevi nakon prisilnog spajanja:

- unutarnja cijev (I):

$$(\sigma'_r)_{r=r_1} = 0, (\sigma'_r)_{r=r_2} = -p_d = -\frac{1}{9} p_1,$$

$$(\sigma'_\varphi)_{r=r_1} = -\frac{2p_d \cdot r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} = -\frac{p_1}{9} \cdot \frac{2 \cdot 2^2}{2^2 - 1} = -\frac{8}{27} p_1,$$

$$(\sigma'_\varphi)_{r=r_2} = -\frac{p_d \cdot (r_2^2 + r_1^2)}{r_2^2 - r_1^2} = -\frac{p_1}{9} \cdot \frac{2^2 + 1}{2^2 - 1} = -\frac{5}{27} p_1,$$



- vanjska cijev (II):

$$(\sigma'_r)_{r=r_2} = -p_d = -\frac{1}{9} p_1, \quad (\sigma'_r)_{r=r_3} = 0,$$

$$(\sigma'_\varphi)_{r=r_2} = p_d \cdot \frac{r_3^2 + r_2^2}{r_3^2 - r_2^2} = \frac{p_1}{9} \cdot \frac{6 + 2^2}{6 - 2^2} = \frac{5}{9} p_1, \quad (\sigma'_\varphi)_{r=r_3} = p_d \cdot \frac{2r_2^2}{r_3^2 - r_2^2} = \frac{p_1}{9} \cdot \frac{2 \cdot 2^2}{6 - 2^2} = \frac{4}{9} p_1.$$

b) cijev od jednog dijela (r₁, r₃), djeluje samo unutarnji tlak p₁, slika 1.c)

Prema [izrazima \(60a\) i \(60b\)](#) vrijednosti naprezanja na unutarnjoj i vanjskoj površini debele cijevi opterećene unutarnjim tlakom p₁ su (prikaz na slici 2.b):

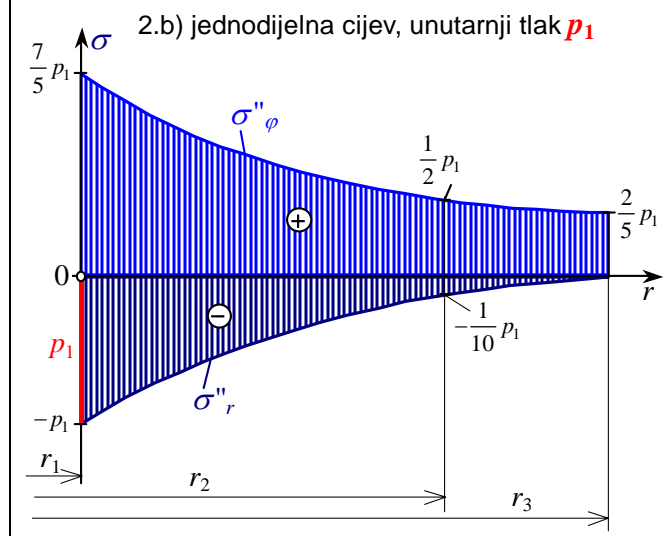
$$(\sigma''_r)_{r=r_1} = -p_1, \quad (\sigma''_r)_{r=r_3} = 0,$$

$$(\sigma''_r)_{r=r_2} = p_1 \cdot \frac{r_1^2}{r_3^2 - r_1^2} \cdot \left[1 - \frac{r_3^2}{r_2^2} \right] = -\frac{1}{10} p_1,$$

$$(\sigma''_\varphi)_{r=r_1} = p_1 \cdot \frac{r_3^2 + r_1^2}{r_3^2 - r_1^2} = p_1 \cdot \frac{6 + 1}{6 - 1} = \frac{7}{5} p_1,$$

$$(\sigma''_\varphi)_{r=r_2} = p_1 \cdot \frac{r_1^2}{r_3^2 - r_1^2} \cdot \left[1 + \frac{r_3^2}{r_2^2} \right] = p_1 \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{5}{2} = \frac{1}{2} p_1,$$

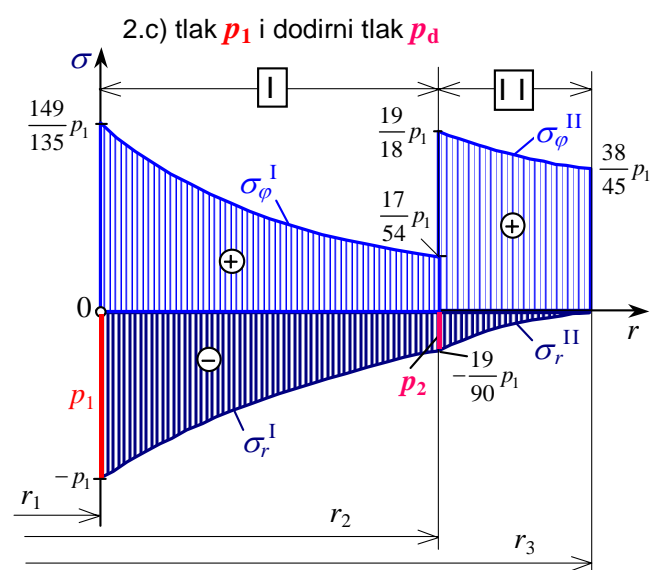
$$(\sigma''_\varphi)_{r=r_3} = p_1 \cdot \frac{2r_1^2}{r_3^2 - r_1^2} = p_1 \cdot \frac{2}{6 - 1} = \frac{2}{5} p_1.$$



c) za sastavljenu cijev opterećenu unutarnjim tlakom p₁, slika 1.d)

Vrijednosti radijalnih i cirkularnih naprezanja na unutarnjoj i vanjskoj površini debele cijevi opterećene unutarnjim tlakom p₁ mogu se izračunati prema [izrazima \(61a,b,c\)](#) ili odrediti primjenom metode superpozicije zbrajanjem odgovarajućih komponenti naprezanja iz rješenja pod 1.a) i 1.b). Rezultati su dani u tablici i grafički na slici 2.c):

Tlak oper.	Kom. napr.	Cijev (I)		Cijev (II)	
		r ₁	r ₂	r ₂	r ₃
a) samo p _d	σ' _r	0	-1/9 p ₁	-1/9 p ₁	0
	σ' _φ	-8/27 p ₁	-5/27 p ₁	5/9 p ₁	4/9 p ₁
b) samo p ₁	σ'' _r	-p ₁	-1/10 p ₁	-1/10 p ₁	0
	σ'' _φ	7/5 p ₁	1/2 p ₁	1/2 p ₁	2/5 p ₁
c) p ₁ + p _d	σ _r	-p ₁	-19/90 p ₁	-19/90 p ₁	0
	σ _φ	149/135 p ₁	17/54 p ₁	19/18 p ₁	38/45 p ₁

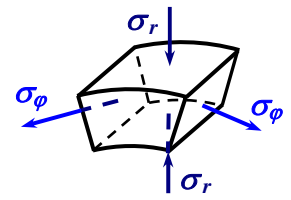


Iz tablice i slike 2.c) vidi se, da su se vrijednosti cirkularnih naprezanja smanjile u unutarnjoj cijevi, ali su se povećale u vanjskoj cijevi u odnosu na vrijednosti naprezanja u cijevi iz jednog dijela (slika 2.b), kod jednakog unutarnjeg tlaka p₁ u cijevi.

2. Vrijednost dopuštenog unutarnjeg tlaka $p_{1 \text{ dop}}$ u sastavljenoj cijevi

Najveća su naprezanja u točkama unutarnje površine debele cijevi (I), gdje vlada dvoosno stanje naprezanja, a iznosi glavnih naprezanja su (na slici elementa):

$$\sigma_1 = (\sigma_\varphi)_{r=r_1} = \frac{149}{135} p_1, \quad \sigma_2 = \sigma_x = 0, \quad \sigma_3 = (\sigma_r)_{r=r_1} = -p_1.$$



Maksimalno ekvivalentno naprezanje je prema teoriji najvećeg posmičnog naprezanja τ_{max} :

$$\sigma_{\text{ekv}} = \sigma_1 - \sigma_3 = \frac{149}{135} p_1 - (-p_1) = \frac{284}{135} p_1.$$

Vrijednost dopuštenog unutarnjeg tlaka u sastavljenoj cijevi jest:

$$(\sigma_{\text{ekv}})_{\text{max}} \leq \sigma_{\text{dop}} \Rightarrow \frac{284}{135} p_1 \leq \sigma_{\text{dop}} \Rightarrow p_{1 \text{ dop}} \leq \frac{135}{284} \sigma_{\text{dop}} = \frac{135}{284} \cdot 290 = 137,85 \text{ MPa} = 1378,5 \text{ bar}.$$

3. Vrijednost prijeklopa δ u sastavljenoj cijevi kod zadanog tlaka p_d

Vrijednost dodirnog tlaka p_d na sastavu cijevi ($r = r_2$), kod opterećenja cijevi unutarnjim radnim tlakom $p_1 = p_{1 \text{ dop}}$, prema zadanom uvjetu zadatka jest:

$$p_d = \frac{1}{9} p_1 = \frac{137,85}{9} \cong 15,317 \text{ MPa}.$$

Vrijednost prijeklopa δ kod prisilnog sastavljanja cijevi u tom slučaju jest:

$$\delta = \frac{2p_d}{E} \cdot r_2 \cdot \frac{r_2^2 \cdot (r_3^2 - r_1^2)}{(r_2^2 - r_1^2) \cdot (r_3^2 - r_2^2)} = 2 \cdot \frac{15,317}{2 \cdot 10^5} \cdot 90 \cdot \frac{2^2 \cdot (6-1)}{(2^2 - 1) \cdot (6-2^2)} = 0,046 \text{ mm}.$$

Ova vrijednost odgovara steznom spoju H7/u7, gdje su za $d_N = 2r_2 = 90 \text{ mm}$ prema tablici tolerancije prijeklopa odstupanja promjera $-99/-149 \text{ }\mu\text{m}$.

4. Numeričke vrijednosti naprezanja, prijeklopa i radijalnih pomaka sastavljene cijevi kod zadanog unutarnjeg tlaka $p_1 = 135 \text{ MPa}$

Prema ranije dobivenim vrijednostima danim u tablici, izračunate su numeričke vrijednosti radijalnih i cirkularnih komponenti naprezanja za unutarnji tlak $p_1 = 135 \text{ MPa}$ i dane u tablici (u MPa) te u grafičkom prikazu na slici 2.d).

Vrijednost dodirnog tlaka p_d na sastavu cijevi ($r = r_2$), kod opterećenja cijevi unutarnjim radnim tlakom $p_1 = 135 \text{ MPa}$, je prema zadanom uvjetu zadatka:

$$p_d = \frac{1}{9} p_1 = \frac{135}{9} = 15 \text{ MPa}.$$

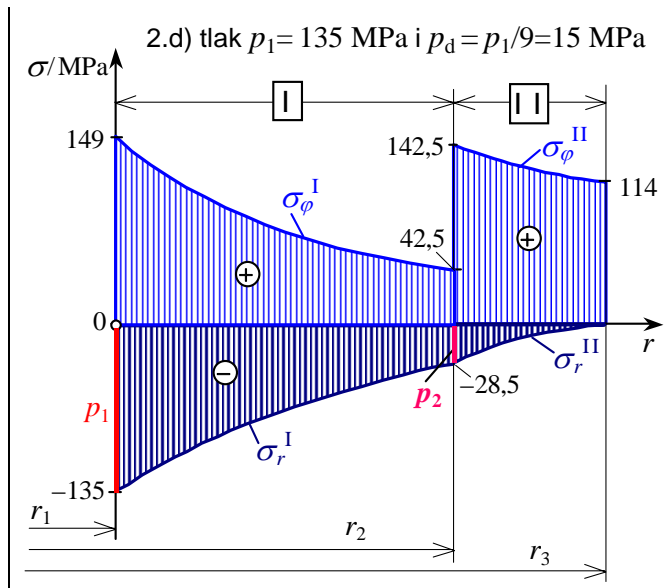
Vrijednost prijeklopa δ kod prisilnog sastavljanja cijevi u tom slučaju jest:

$$\delta = \frac{2p_d}{E} \cdot r_2 \cdot \frac{r_2^2 \cdot (r_3^2 - r_1^2)}{(r_2^2 - r_1^2) \cdot (r_3^2 - r_2^2)} = 2 \cdot \frac{15}{2 \cdot 10^5} \cdot 90 \cdot \frac{2^2 \cdot (6-1)}{(2^2 - 1) \cdot (6-2^2)} = 0,045 \text{ mm}.$$

Ova vrijednost odgovara steznom spoju H7/s6, gdje su za $d_N = 2r_2 = 90 \text{ mm}$ prema [tablici tolerancije prijeklopa](#) odstupanja promjera $-77/-124 \text{ }\mu\text{m}$.

Vrijednosti radijalnih i cirkularnih komponenti naprezanja u MPa.

Tlak opter.	Kom. napr.	Cijev (I)		Cijev (II)	
		r_1	r_2	r_2	r_3
a) samo p_d	σ'_r	0	-15	-15	0
	σ'_φ	-40	-40	75	60
b) samo p_1	σ''_r	-135	-13,5	-13,5	0
	σ''_φ	189	67,5	67,5	54
c) $p_1 + p_d$	σ_r	-135	-28,5	-28,5	0
	σ_φ	149	42,5	142,5	114



Radijalni pomaci površina sastavnih cijevi

Radijalni pomaci površina sastavnih cijevi mogu se odrediti jednostavnije kad se odredi tlak p_2 na dodiru sastavnih cijevi kod opterećenja cijevi unutarnjim tlakom p_1 , slika 1.d). Vrijednost tlaka p_2 na površinama dodira sastavnih cijevi I i II sastavljene cijevi, prema [izrazu \(62\)](#) jest:

$$p_2 = |(\sigma_r)_{r=r_2}| = p_d - p_1 \cdot \frac{r_1^2}{r_3^2 - r_1^2} \cdot \left[1 - \frac{r_3^2}{r_2^2} \right] = p_1 \left[\frac{1}{9} - \frac{1}{6-1} \cdot \left(1 - \frac{6}{2^2} \right) \right] = \frac{19}{90} p_1 = \frac{19}{90} \cdot 135 = 28,5 \text{ MPa}$$

Radijalni pomaci na unutarnjoj, dodirnoj i vanjskoj površini sastavljene cijevi, tj. povećanja polumjera sastavnih cijevi kod opterećenja unutarnjim tlakom p_1 su:

- za unutarnju cijev (I) prema [izrazima \(64a, 64b\)](#):

$$(u^I)_{r=r_1} = \frac{p_1 \cdot r_1}{E} \cdot \left(\frac{r_1^2 + r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} + \nu \right) - p_2 \cdot \frac{2r_1}{E} \cdot \frac{r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} = \frac{135 \cdot 45}{2 \cdot 10^5} \cdot \left[\frac{1+2^2}{2^2-1} + 0,3 - \frac{19}{90} \cdot \frac{2 \cdot 2^2}{2^2-1} \right] = 0,0426 \text{ mm},$$

$$(u^I)_{r=r_2} = \frac{2p_1 \cdot r_1^2 \cdot r_2}{E \cdot (r_2^2 - r_1^2)} - p_2 \cdot \frac{r_2}{E} \cdot \left(\frac{r_2^2 + r_1^2}{r_2^2 - r_1^2} - \nu \right) = \frac{135 \cdot 90}{2 \cdot 10^5} \cdot \left[\frac{2 \cdot 1}{2^2-1} - \frac{19}{90} \cdot \left(\frac{2^2+1}{2^2-1} - 0,3 \right) \right] = 0,023 \text{ mm};$$

- za vanjsku cijev (II) prema [izrazima \(64c, 64d\)](#):

$$(u^{II})_{r=r_2} = \frac{p_2 \cdot r_2}{E} \cdot \left(\frac{r_3^2 + r_2^2}{r_3^2 - r_2^2} + \nu \right) = \frac{28,5 \cdot 90}{2 \cdot 10^5} \cdot \left[\frac{6+2^2}{6-2^2} + 0,3 \right] = 0,068 \text{ mm},$$

tj. vrijedi: $(u^{II})_{r=r_2} = (u^I)_{r=r_2} + \delta = 0,023 + 0,045 = 0,068 \text{ mm}$,

$$(u^{II})_{r=r_3} = p_2 \cdot \frac{2r_3}{E} \cdot \frac{r_2^2}{r_3^2 - r_2^2} = \frac{28,5 \cdot 2 \cdot 45 \sqrt{6}}{2 \cdot 10^5} \cdot \frac{2^2}{6-2^2} = 0,0628 \text{ mm}.$$