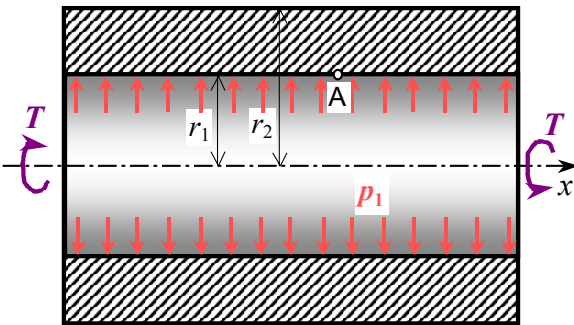


**5. Primjer:** Otvorena debela cijev opterećena unutarnjim tlakom i na uvijanje

Čelična otvorena debela cijev istodobno je opterećena unutarnjim tlakom  $p_1 = 600$  bar i na uvijanje momentom  $T = 2\pi r_1^3 \cdot p_1$ , (slike a1 i a2).

a1)



Značajke materijala su:  $E = 200$  GPa,  $\nu = 0,3$ .

Treba odrediti:

- radialne i cirkularne komponente naprezanja na unutarnjoj i vanjskoj površini cijevi
- glavna naprezanja u točki A cijevi, analitički i grafički (Mohrova kružnica naprezanja)
- provjeriti čvrstoću cijevi primjenom teorije čvrstoće  $\tau_{max}$  i HMM, ako se zahtijeva  $s_{min} = 1,3$ .

Zadano:  $r_1 = 50$  mm,  $r_2 = r_1\sqrt{3}$ ,  $\sigma_{dop} = 250$  MPa.

**a) Naprezanja u cijevi od unutarnjeg tlaka  $p_1$**

Prema [izrazima \(35\)](#), vrijednosti su naprezanja na unutarnjoj površini otvorene debele cijevi, tj. za  $r = r_1$  (slika b), a uzdužno naprezanje u presjeku je  $\sigma_x = 0$ :

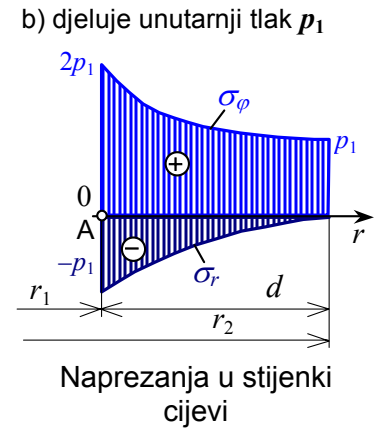
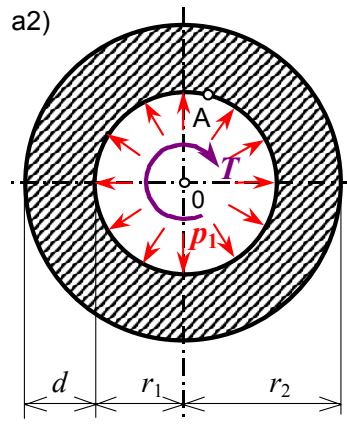
$$(\sigma_r)_{r=r_1} = -p_1 = -60 \text{ MPa},$$

$$(\sigma_\phi)_{r=r_1} = p_1 \cdot \frac{r_2^2 + r_1^2}{r_2^2 - r_1^2} = 2 p_1 = 120 \text{ MPa}.$$

Na vanjskoj površini cijevi,  $r = r_2$ , vrijednosti naprezanja su:

$$(\sigma_r)_{r=r_2} = 0,$$

$$(\sigma_\phi)_{r=r_2} = \frac{2p_1 \cdot r_1^2}{r_2^2 - r_1^2} = p_1 = 60 \text{ MPa}.$$



**b) Posmična naprezanja u poprečnom presjeku cijevi od uvijanja**

Drugi polarni moment površine presjeka cijevi, slika a2, jest:

$$I_p = \frac{r_2^4 \cdot \pi}{2} - \frac{r_1^4 \cdot \pi}{2} = 4\pi \cdot r_1^4 = 4 \cdot \pi \cdot 5^4 = 7854 \text{ cm}^4.$$

Posmično naprezanje u poprečnom presjeku od uvijanja:

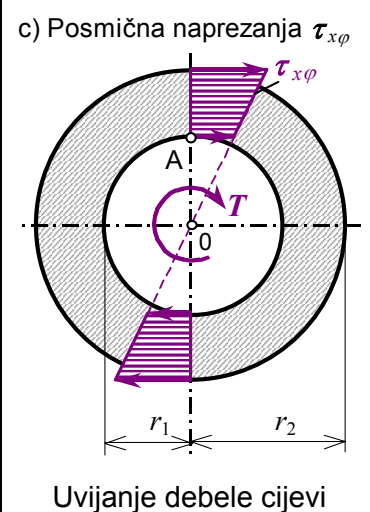
$$\tau_{x\phi} = \frac{T}{I_p} \cdot r = \frac{2\pi r_1^3 \cdot p_1}{4\pi \cdot r_1^4} \cdot r = \frac{p_1}{2r_1} \cdot r,$$

za  $r = r_1$ :

$$(\tau_{x\phi})_A = \frac{p_1}{2r_1} \cdot r_1 = \frac{p_1}{2} = 30 \text{ MPa},$$

za  $r = r_2$ :

$$(\tau_{x\phi})_{max} = \frac{p_1}{2r_1} \cdot r_2 = \frac{\sqrt{3}}{2} p_1 \cong 52 \text{ MPa}. \text{ Prikaz je dan na slici c).}$$



Iznos momenta uvijanja koji djeluje na debelu cijev jest:

$$T = 2\pi r_1^3 \cdot p_1 = 2 \cdot \pi \cdot 5^3 \cdot 60 = 47124 \text{ N}\cdot\text{m}.$$

### c) Glavna naprezanja u točki A poprečnog presjeka debele cijevi

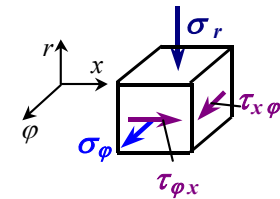
U točki A debele cijevi, tj. za  $r = r_1$  djeluju naprezanja, slika d):

$$(\sigma_r)_A = -p_1 = -60 \text{ MPa},$$

$$(\sigma_\varphi)_A = 2 p_1 = 120 \text{ MPa},$$

$$(\tau_{x\varphi})_A = \frac{p_1}{2} = 30 \text{ MPa}.$$

d) Naprezanja za element A debele cijevi



U točki A unutarnje površine cilindra vlada troosno stanje naprezanja, a iznosi glavnih naprezanja su, uz grafičko rješenje pomoću Mohrove kružnice naprezanja (slika e):

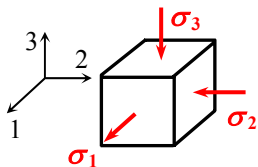
$$\sigma_3 = (\sigma_r)_{r=r_1} = -p_1 = -60 \text{ MPa}.$$

$$\begin{aligned} \sigma_{1,2} &= \frac{(\sigma_\varphi)_A}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{(\sigma_\varphi)_A}{2}\right)^2 + (\tau_{x\varphi})^2} \\ &= p_1 \pm \sqrt{p_1^2 + \left(\frac{p_1}{2}\right)^2} = p_1 \cdot \left(1 \pm \frac{\sqrt{5}}{2}\right), \end{aligned}$$

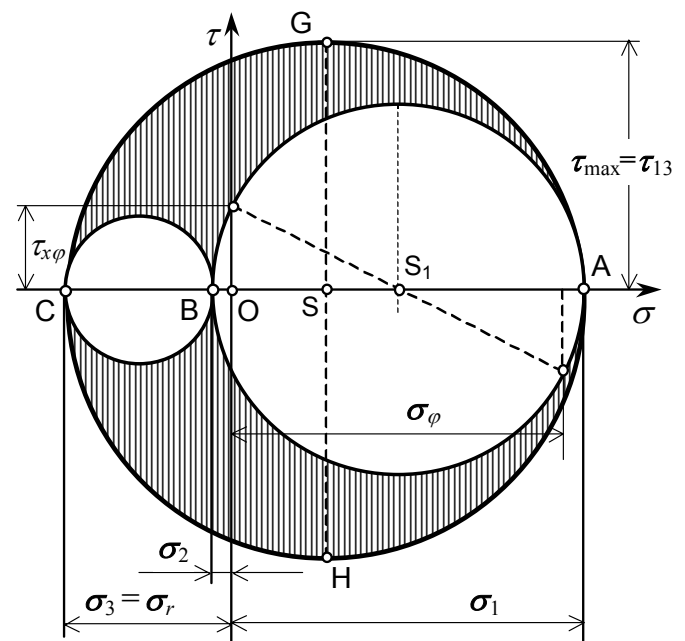
$$\sigma_1 = p_1 \cdot \left(1 + \frac{\sqrt{5}}{2}\right) \cong 2,12 p_1 \cong 127 \text{ MPa},$$

$$\sigma_2 = p_1 \cdot \left(1 - \frac{\sqrt{5}}{2}\right) \cong -0,12 p_1 \cong -7 \text{ MPa}.$$

f) Glavna naprezanja za element A debele cijevi



e) Mohrova kružnica naprezanja za element A cijevi



Ekvivalentno naprezanje je prema teoriji najvećeg posmičnog naprezanja  $\tau_{\max}$ :

$$\sigma_{\text{ekv}} = \sigma_1 - \sigma_3 = 3,12 p_1 = 187,1 \text{ MPa} < \sigma_{\text{dop}} \Rightarrow p_{1\text{max}} = \frac{\sigma_{\text{dop}}}{3,12} = \frac{250}{3,12} \cong 80 \text{ MPa} > p_1 = 60 \text{ MPa}.$$

Ekvivalentno naprezanje je prema energijskoj teoriji HMH:

$$\sigma_{\text{ekv}} = \sqrt{\sigma_1^2 - \sigma_1 \cdot \sigma_3 + \sigma_3^2} = \sqrt{127^2 - 127 \cdot (-60) + (-60)^2} = 165,5 \text{ MPa}.$$

d) Faktor sigurnosti otvorene debele cijevi kod zadanog opterećenja (slika a) jest:

$$s = \frac{\sigma_{\text{dop}}}{(\sigma_{\text{ekv}})_{\text{max}}} = \frac{250}{187,1} = 1,34 > s_{\text{min}} \rightarrow \text{zadovoljava!}$$

e) Radijalni pomaci točkaka na unutarnjoj i vanjskoj površini otvorene cijevi su:

$$(u)_{r=r_1} = \frac{p_1 \cdot r_1}{E} \cdot \left( \frac{r_1^2 + r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} + \nu \right) = \frac{60 \cdot 50}{2 \cdot 10^5} \cdot \left( \frac{r_1^2 + 3r_1^2}{3r_1^2 - r_1^2} + 0,3 \right) = 0,035 \text{ mm},$$

$$(u)_{r=r_2} = \frac{2p_1 \cdot r_1^2 \cdot r_2}{E \cdot (r_2^2 - r_1^2)} = \frac{2 \cdot 60 \cdot 50 \sqrt{3}}{2 \cdot 10^5} \cdot \frac{r_1^2}{3r_1^2 - r_1^2} = 0,026 \text{ mm}.$$