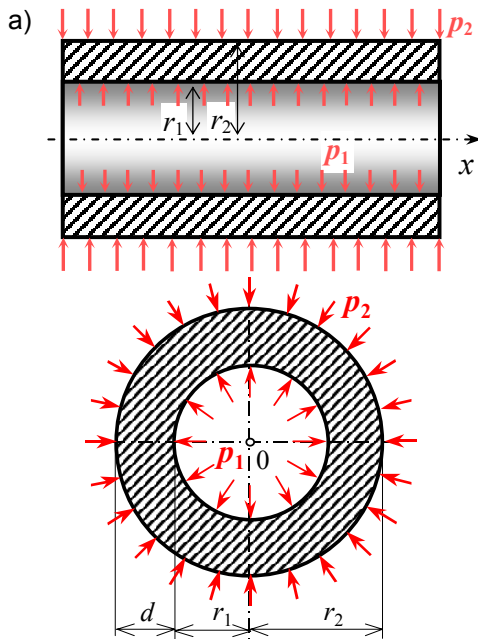


#### 4. Primjer: Otvorena debelostjena posuda opterećena unutarnjim i vanjskim tlakom



Otvorena čelična debelostjena posuda opterećena je istodobno unutarnjim tlakom  $p_1$  i vanjskim tlakom  $p_2$  (slika a).

Metodom superpozicije treba odrediti:

- radijalne i cirkularne komponente naprezanja na unutarnjoj i vanjskoj površini cilindra debelostjene posude, uz grafičke prikaze raspodjele u stijenci
- faktor sigurnosti posude primjenom teorije čvrstoće  $\tau_{\max}$  i HMM
- radijalne pomake točaka unutarnje i vanjske površine cilindra debelostjene posude.

Zadano:  $p_1 = p$ ,  $p_2 = 2p$ ,  $p = 50$  bar,  $r_1 = 50$  mm,  
 $r_2 = r_1\sqrt{3}$ ,  $\sigma_{\text{dop}} = 280$  MPa,  $s_{\min} = 1,3$ ,  
 $E = 200$  GPa,  $\nu = 0,3$ .

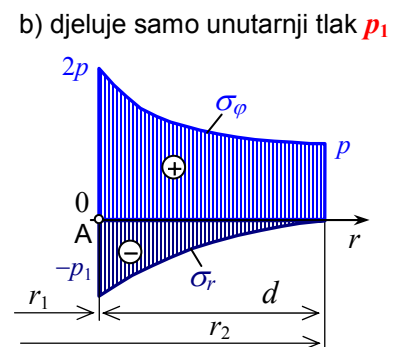
##### a) Djeluje samo unutarnji tlak $p_1$

Prema [izrazima \(35a\) i \(35b\)](#) vrijednosti naprezanja na unutarnjoj i vanjskoj površini cilindra debelostjene posude opterećene unutarnjim tlakom  $p_1$  su (prikaz na slici b):

$$(\sigma'_r)_{r=r_1} = -p_1 = -p = -50 \text{ MPa}, \quad (\sigma'_r)_{r=r_2} = 0,$$

$$(\sigma'_\varphi)_{r=r_1} = p_1 \cdot \frac{r_2^2 + r_1^2}{r_2^2 - r_1^2} = p \cdot \frac{3r_1^2 + r_1^2}{3r_1^2 - r_1^2} = 2p = 100 \text{ MPa},$$

$$(\sigma'_\varphi)_{r=r_2} = p_1 \cdot \frac{2r_1^2}{r_2^2 - r_1^2} = p \cdot \frac{2 \cdot r_1^2}{3r_1^2 - r_1^2} = p = 50 \text{ MPa}.$$



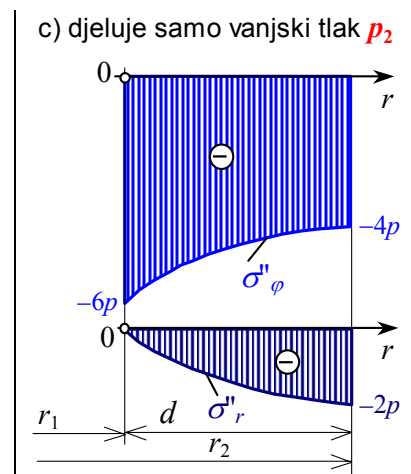
##### b) Djeluje samo vanjski tlak $p_2$

Prema [izrazima \(50a\) i \(50b\)](#) vrijednosti naprezanja na unutarnjoj i vanjskoj površini cilindra debelostjene posude opterećene vanjskim tlakom  $p_2$  su (grafički prikaz na slici c):

$$(\sigma''_r)_{r=r_1} = 0, \quad (\sigma''_r)_{r=r_2} = -p_2 = -2p = -100 \text{ MPa},$$

$$(\sigma''_\varphi)_{r=r_1} = -p_2 \cdot \frac{2r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} = -2p \cdot \frac{2 \cdot 3r_1^2}{3r_1^2 - r_1^2} = -6p = -300 \text{ MPa},$$

$$(\sigma''_\varphi)_{r=r_2} = -p_2 \cdot \frac{r_2^2 + r_1^2}{r_2^2 - r_1^2} = -2p \cdot \frac{3r_1^2 + r_1^2}{3r_1^2 - r_1^2} = -4p = -200 \text{ MPa}.$$



##### c) Istodobno djeluju unutarnji tlak $p_1$ i vanjski tlak $p_2$

Metodom superpozicije, vrijednosti komponenta naprezanja na unutarnjoj i vanjskoj površini cilindra kod istodobnog djelovanja unutarnjeg i vanjskog tlaka na otvorenu debelostjenu posudu, su (grafički prikaz na slici d):

$$(\sigma_r)_{r=r_1} = (\sigma'_r)_{r=r_1} + (\sigma''_r)_{r=r_1} = -p + 0 = -p = -50 \text{ MPa},$$

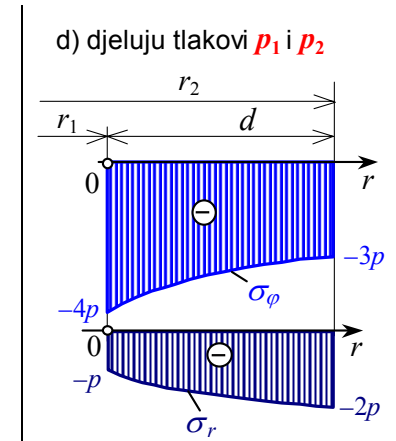
$$(\sigma_\varphi)_{r=r_1} = (\sigma'_\varphi)_{r=r_1} + (\sigma''_\varphi)_{r=r_1} = 2p - 6p = -4p = -200 \text{ MPa},$$

$$(\sigma_r)_{r=r_2} = (\sigma'_r)_{r=r_2} + (\sigma''_r)_{r=r_2} = 0 - 2p = -2p = -100 \text{ MPa},$$

$$(\sigma_\varphi)_{r=r_2} = (\sigma'_\varphi)_{r=r_2} + (\sigma''_\varphi)_{r=r_2} = p - 4p = -3p = -150 \text{ MPa}.$$

Tlakovi na površine debelostjene posude su:

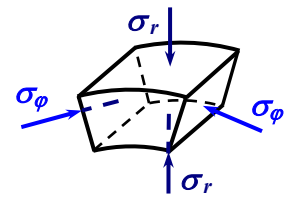
$$p_1 = p = 500 \text{ bar}, \quad p_2 = 2p = 1000 \text{ bar}.$$



### d) Faktor sigurnosti cilindra posude

Najveća su naprezanja u točkama unutarnje površine cilindra gdje vlada dvoosno stanje naprezanja, a iznosi glavnih naprezanja su (na slici elementa):

$$\sigma_1 = \sigma_x = 0, \quad \sigma_2 = (\sigma_r)_{r=r_1} = -p, \quad \sigma_3 = (\sigma_\varphi)_{r=r_1} = -4p.$$



Ekvivalentno naprezanje je prema teoriji najvećeg posmičnog naprezanja  $\tau_{\max}$ :

$$\sigma_{\text{ekv}} = \sigma_1 - \sigma_3 = 0 - (-4p) = 4p = 4 \cdot 50 = 200 \text{ MPa} < \sigma_{\text{dop}}.$$

Ekvivalentno naprezanje je prema energijskoj teoriji HMH:

$$\sigma_{\text{ekv}} = \sqrt{\sigma_2^2 - \sigma_2 \cdot \sigma_3 + \sigma_3^2} = \sqrt{(-p)^2 - (-p) \cdot (-4p) + (-4p)^2} = p\sqrt{13} = 50 \cdot \sqrt{13} \cong 180 \text{ MPa} < \sigma_{\text{dop}}$$

Faktor sigurnosti cilindra otvorene debelostjene posude (slika a) jest:

$$s = \frac{\sigma_{\text{dop}}}{(\sigma_{\text{ekv}})_{\text{max}}} = \frac{280}{200} = 1,4 > s_{\text{min}} \rightarrow \text{zadovoljava!}$$

### e) Radijalni pomaci površina cilindra posude

Radijalni pomak točke na unutarnjoj površini cilindra otvorene debelostjene posude, tj. za  $r = r_1$  je prema [izrazu \(31\)](#) i nakon sređivanja ( $\sigma_x = 0$ ) iznosi:

$$\begin{aligned} (u)_{r=r_1} &= \frac{r_1}{E} \cdot \left[ (1-\nu) \cdot \frac{p_1 \cdot r_1^2 - p_2 \cdot r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} + (1+\nu) \cdot \frac{(p_1 - p_2) \cdot r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} \right] = \\ &= \frac{p \cdot r_1}{E} \cdot (\nu - 4) = \frac{50 \cdot 50}{2 \cdot 10^5} \cdot (0,3 - 4) = -0,046 \text{ mm}. \end{aligned}$$

Radijalni je pomak točke na vanjskoj površini cilindra zatvorene debelostjene posude, tj. za  $r = r_2$  prema izrazu (31) i nakon sređivanja ( $\sigma_x = 0$ ) iznosi:

$$\begin{aligned} (u)_{r=r_2} &= \frac{r_2}{E} \cdot \left[ (1-\nu) \cdot \frac{p_1 \cdot r_1^2 - p_2 \cdot r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} + (1+\nu) \cdot \frac{(p_1 - p_2) \cdot r_1^2}{r_2^2 - r_1^2} \right] = \\ &= \frac{p \cdot r_2}{E} \cdot (2\nu - 3) = \frac{50 \cdot 50 \sqrt{3}}{2 \cdot 10^5} \cdot (2 \cdot 0,3 - 3) = -0,052 \text{ mm}. \end{aligned}$$