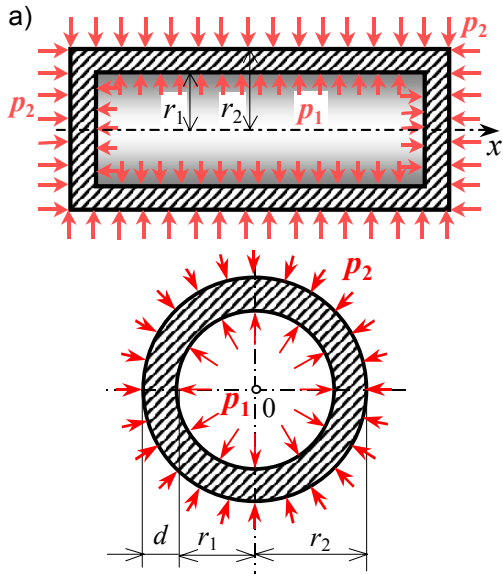


3. Primjer: Zatvorena debelostjena posuda opterećena unutarnjim i vanjskim tlakom



Zatvorena čelična debelostjena posuda opterećena je istodobno unutarnjim tlakom p_1 i vanjskim tlakom p_2 (slika a).

Metodom superpozicije treba odrediti:

- radijalne i cirkularne komponente naprezanja na unutarnjoj i vanjskoj površini cilindra debelostjene posude, uz grafičke prikaze raspodjele u stijenci
- dopuštenu vrijednost tlakova primjenom teorije čvrstoće τ_{\max}
- radijalne pomake točaka unutarnje i vanjske površine cilindra debelostjene posude.

Zadano: $p_1 = 2p$, $p_2 = p/2$, $r_1 = 60$ mm, $r_2 = r_1\sqrt{2}$,
 $\sigma_{\text{dop}} = 240$ MPa, $E = 200$ GPa, $\nu = 0,3$.

a) Djeluje samo unutarnji tlak p_1

Prema izrazima (35a) i (35b) vrijednosti naprezanja na unutarnjoj i vanjskoj površini cilindra debelostjene posude opterećene unutarnjim tlakom p_1 su (prikaz na slici b):

$$(\sigma'_r)_{r=r_1} = -p_1 = -2p,$$

$$(\sigma'_\varphi)_{r=r_1} = p_1 \cdot \frac{r_2^2 + r_1^2}{r_2^2 - r_1^2} = 2p \cdot \frac{2r_1^2 + r_1^2}{2r_1^2 - r_1^2} = 6p,$$

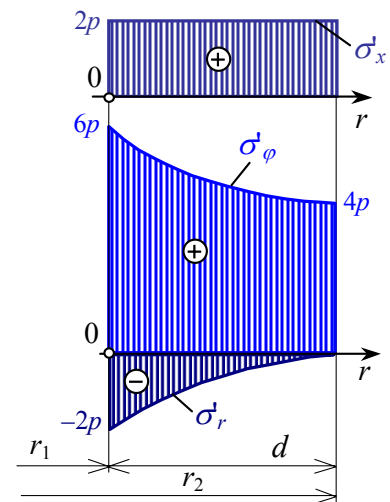
$$(\sigma'_r)_{r=r_2} = 0,$$

$$(\sigma'_\varphi)_{r=r_2} = \frac{2p_1 \cdot r_1^2}{r_2^2 - r_1^2} = 2p \cdot \frac{2 \cdot r_1^2}{2r_1^2 - r_1^2} = 4p.$$

Uzdugo naprezanje u presjeku cilindra je:

$$\sigma'_x = \frac{p_1 \cdot r_1^2}{r_2^2 - r_1^2} = 2p \cdot \frac{r_1^2}{2r_1^2 - r_1^2} = 2p = \text{konst.}$$

b) djeluje samo unutarnji tlak p_1



b) Djeluje samo vanjski tlak p_2

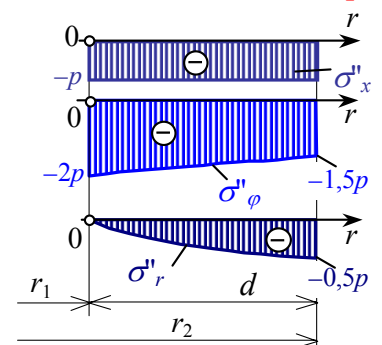
Prema izrazima (50a) i (50b) vrijednosti naprezanja na unutarnjoj i vanjskoj površini cilindra debelostjene posude opterećene vanjskim tlakom p_2 su (grafički prikaz na slici c):

$$(\sigma''_r)_{r=r_1} = 0, \quad (\sigma''_r)_{r=r_2} = -p_2 = -\frac{p}{2},$$

$$(\sigma''_\varphi)_{r=r_1} = -p_2 \cdot \frac{2r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} = -\frac{p}{2} \cdot \frac{2 \cdot 2r_1^2}{2r_1^2 - r_1^2} = -2p,$$

$$(\sigma''_\varphi)_{r=r_2} = -p_2 \cdot \frac{r_2^2 + r_1^2}{r_2^2 - r_1^2} = -\frac{p}{2} \cdot \frac{2r_1^2 + r_1^2}{2r_1^2 - r_1^2} = -\frac{3}{2}p.$$

c) djeluje samo vanjski tlak p_2



Uzdružno naprezanje u presjeku cilindra posude jest:

$$\sigma''_x = -p_2 \cdot \frac{r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} = -\frac{p}{2} \cdot \frac{2r_1^2}{2r_1^2 - r_1^2} = -p = \text{konst.}$$

c) Istodobno djeluju unutarnji tlak p_1 i vanjski tlak p_2

Metodom superpozicije, vrijednosti komponenta naprezanja na unutarnjoj i vanjskoj površini cilindra kod istodobnog djelovanja unutarnjeg i vanjskog tlaka na zatvorenu debelostjenu posudu, su (grafički prikaz na slici d):

$$(\sigma_r)_{r=r_1} = (\sigma'_r)_{r=r_1} + (\sigma''_r)_{r=r_1} = -2p + 0 = -2p,$$

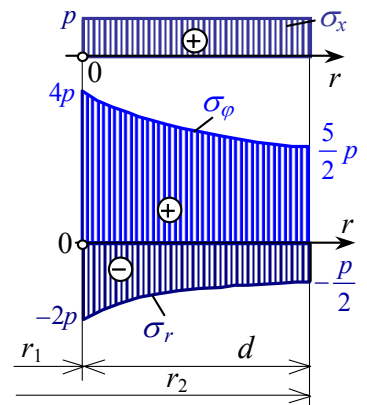
$$(\sigma_\varphi)_{r=r_1} = (\sigma'_\varphi)_{r=r_1} + (\sigma''_\varphi)_{r=r_1} = 6p - 2p = 4p,$$

$$(\sigma_r)_{r=r_2} = (\sigma'_r)_{r=r_2} + (\sigma''_r)_{r=r_2} = 0 - \frac{p}{2} = -\frac{p}{2},$$

$$(\sigma_\varphi)_{r=r_2} = (\sigma'_\varphi)_{r=r_2} + (\sigma''_\varphi)_{r=r_2} = 4p - \frac{3}{2}p = \frac{5}{2}p,$$

$$\sigma_x = \sigma'_x + \sigma''_x = 2p - p = p = \text{konst.}$$

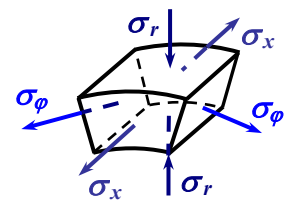
d) djeluju tlakovi p_1 i p_2



d) Dopuštena vrijednost tlakova p_1 i p_2

Najveća su naprezanja u točkama unutarnje površine cilindra gdje vlada troosno stanje naprezanja, a iznosi glavnih naprezanja su (na slici elementa):

$$\sigma_1 = (\sigma_\varphi)_{r=r_1} = 4p, \quad \sigma_2 = \sigma_x = p, \quad \sigma_3 = (\sigma_r)_{r=r_1} = -2p.$$



Ekvivalentno naprezanje je prema teoriji najvećeg posmičnog naprezanja τ_{\max} :

$$\sigma_{\text{ekv}} = \sigma_1 - \sigma_3 = 4p - (-2p) = 6p.$$

Ekvivalentno naprezanje je prema energijskoj teoriji HMM:

$$\sigma_{\text{ekv}} = \sqrt{\frac{1}{2}[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]} = \sqrt{\frac{1}{2}[(4p - p)^2 + (p - (-2p))^2 + (-2p - 4p)^2]} = p\sqrt{27}$$

Vrijednost dopuštenog tlaka jest:

$$p = \frac{\sigma_{\text{dop}}}{(\sigma_{\text{ekv}})_{\text{max}}} = \frac{240}{6} = 40 \text{ MPa} = 400 \text{ bar}, \rightarrow p_1 = 2p = 800 \text{ bar}, \quad p_2 = \frac{p}{2} = 200 \text{ bar}.$$

Radijalni pomak točke na unutarnjoj površini cilindra zatvorene debelostjene posude, tj. za $r = r_1$ iznosi prema izrazu (31a) i nakon sređivanja:

$$(u)_{r=r_1} = \frac{r_1}{E} \cdot \left[(1 - 2\nu) \cdot \sigma_x + (1 + \nu) \cdot \frac{(p_1 - p_2) \cdot r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} \right] =$$

$$= \frac{r_1 \cdot p}{E} \cdot (4 + \nu) = \frac{60 \cdot 40}{2 \cdot 10^5} \cdot (4 + 0,3) = 0,052 \text{ mm},$$

odnosno radijalni je pomak točke na vanjskoj površini cilindra zatvorene debelostjene posude, tj. za $r = r_2$ prema izrazu (31b) i nakon sređivanja:

$$\begin{aligned}(u)_{r=r_2} &= \frac{r_2}{E} \cdot \left[(1 - 2\nu) \cdot \sigma_x + (1 + \nu) \cdot \frac{(p_1 - p_2) \cdot r_1^2}{r_2^2 - r_1^2} \right] = \\ &= \frac{r_2 \cdot p}{2E} \cdot (5 - \nu) = \frac{60\sqrt{2} \cdot 40}{2 \cdot 2 \cdot 10^5} \cdot (5 - 0,3) = 0,040 \text{ mm.}\end{aligned}$$