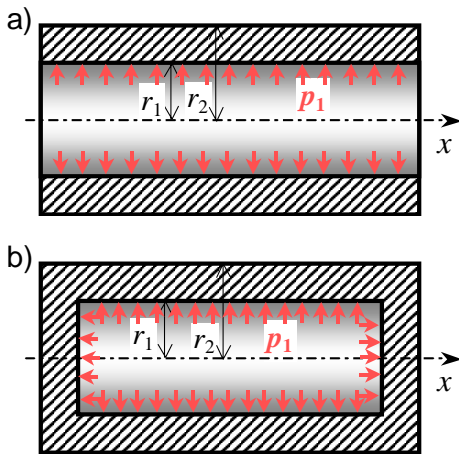


**2. Primjer:** Debelostjena posuda opterećena unutarnjim tlakom  $p_1$



Treba usporediti sigurnost čelične otvorene (slika a) i zatvorene (slika b) debljine posude, koje su opterećene unutarnjim tlakom  $p_1 = 700 \text{ bar}$ . Proračune izraditi primjenom teorija čvrstoće  $\tau_{\max}$  i HMH.

Također za obje posude treba odrediti:

- radijalne i cirkularne komponente naprezanja na unutarnjoj i vanjskoj površini cilindra debljine posude, uz grafičke prikaze raspodjele u stijenki
- radijalne pomake točaka unutarnje i vanjske površine cilindra debljine posude.

Zadano:  $r_1 = 300 \text{ mm}$ ,  $r_2 = 500 \text{ mm}$ ,  $R_e = 380 \text{ MPa}$ ,  
 $s_{\min} = 1,5$ ,  $E = 200 \text{ GPa}$ ,  $\nu = 0,3$ .

**a) Otvorena debljine posuda (slika a)**

Prema [izrazima \(35a\)](#), najveće su vrijednosti naprezanja na unutarnjoj površini cilindra debljine posude, tj. za  $r = r_1$  (slika b), a uzdužno naprezanje u presjeku je  $\sigma_x = 0$ :

$$(\sigma_r)_{r=r_1} = -p_1 = -70 \text{ MPa},$$

$$(\sigma_\varphi)_{r=r_1} = p_1 \cdot \frac{r_2^2 + r_1^2}{r_2^2 - r_1^2} = 70 \cdot \frac{5^2 + 3^2}{5^2 - 3^2} = 148,75 \text{ MPa}.$$

Na vanjskoj površini cilindra,  $r = r_2$ , vrijednosti naprezanja su:

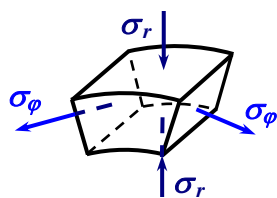
$$(\sigma_r)_{r=r_2} = 0,$$

$$(\sigma_\varphi)_{r=r_2} = \frac{2p_1 \cdot r_1^2}{r_2^2 - r_1^2} = 70 \cdot \frac{2 \cdot 3^2}{5^2 - 3^2} = 78,75 \text{ MPa}.$$

U točkama unutarnje površine cilindra vlada dvoosno stanje naprezanja, a iznosi glavnih naprezanja su (na slici elementa):

$$\sigma_1 = (\sigma_\varphi)_{r=r_1} = 148,75 \text{ MPa}, \quad \sigma_2 = \sigma_x = 0,$$

$$\sigma_3 = (\sigma_r)_{r=r_1} = -70 \text{ MPa}.$$

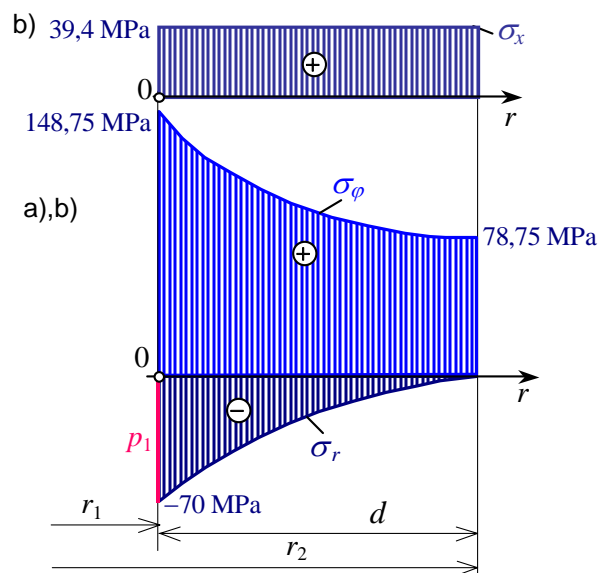


Ekvivalentno naprezanje je prema **teoriji najvećeg posmičnog naprezanja**  $\tau_{\max}$ :

$$\sigma_{\text{ekv}} = \sigma_1 - \sigma_3 = 148,75 - (-70) = 218,75 \text{ MPa}.$$

Ekvivalentno naprezanje je prema **energijskoj teoriji HMH**:

$$\sigma_{\text{ekv}} = \sqrt{\sigma_1^2 - \sigma_1 \cdot \sigma_3 + \sigma_3^2} = \sqrt{148,75^2 - 148,75 \cdot (-70) + (-70)^2} = 193,49 \text{ MPa}.$$



Naprezanja u stijenki cilindara a) i b)

Faktor sigurnosti na tečenje cilindra otvorene debljine posude (slika a) jest:

$$s = \frac{R_e}{(\sigma_{\text{ekv}})_{\max}} = \frac{380}{218,75} = 1,74 > s_{\min}.$$

Radijalni pomak točke na unutarnjoj površini (povećanje unutarnjeg polumjera) cilindra otvorene debelostjene posude, tj. za  $r = r_1$  iznosi prema [izrazu \(37a\)](#):

$$(u)_{r=r_1} = \frac{p_1 \cdot r_1}{E} \cdot \left( \frac{r_1^2 + r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} + \nu \right) = \frac{70 \cdot 300}{2 \cdot 10^5} \cdot \left( \frac{5^2 + 3^2}{5^2 - 3^2} + 0,3 \right) = 0,255 \text{ mm},$$

odnosno radijalni je pomak točke na vanjskoj površini cilindra otvorene debelostjene posude (povećanje vanjskog polumjera), tj. za  $r = r_2$  prema [izrazu \(37b\)](#):

$$(u)_{r=r_2} = \frac{2p_1 \cdot r_1^2 \cdot r_2}{E \cdot (r_2^2 - r_1^2)} = \frac{2 \cdot 70 \cdot 500}{2 \cdot 10^5} \cdot \frac{3^2}{5^2 - 3^2} = 0,197 \text{ mm}.$$

## b) Zatvorena debelostjena posuda (slika b)

Prema [izrazima \(35b\)](#), vrijednosti su radijalne i cirkularne komponente naprezanja na unutarnjoj i vanjskoj površini cilindra zatvorene debelostjene posude jednake onima kod otvorene posude (slika b), tj.:

$$(\sigma_r)_{r=r_1} = -p_1 = -70 \text{ MPa}, \quad (\sigma_\varphi)_{r=r_1} = p_1 \cdot \frac{r_2^2 + r_1^2}{r_2^2 - r_1^2} = 70 \cdot \frac{5^2 + 3^2}{5^2 - 3^2} = 148,75 \text{ MPa},$$

$$(\sigma_r)_{r=r_2} = 0, \quad (\sigma_\varphi)_{r=r_2} = \frac{2p_1 \cdot r_1^2}{r_2^2 - r_1^2} = 70 \cdot \frac{2 \cdot 3^2}{5^2 - 3^2} = 78,75 \text{ MPa}.$$

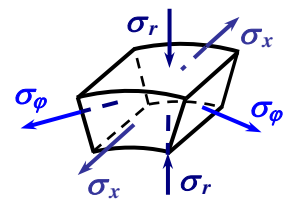
Iznos uzdužnog naprezanja u presjeku je konstantan (slika b) te je prema [izrazu \(34\)](#):

$$\sigma_x = \frac{p_1 \cdot r_1^2}{r_2^2 - r_1^2} = 70 \cdot \frac{3^2}{5^2 - 3^2} = 39,375 \text{ MPa}.$$

U točkama unutarnje površine cilindra vlada troosno stanje naprezanja, a iznosi glavnih naprezanja su (na slici elementa):

$$\sigma_1 = (\sigma_\varphi)_{r=r_1} = 148,75 \text{ MPa}, \quad \sigma_2 = \sigma_x = 39,375 \text{ MPa},$$

$$\sigma_3 = (\sigma_r)_{r=r_1} = -70 \text{ MPa}.$$



Ekvivalentno naprezanje je prema **teoriji najvećeg posmičnog naprezanja**  $\tau_{\max}$ :

$$\sigma_{\text{ekv}} = \sigma_1 - \sigma_3 = 148,75 - (-70) = 218,75 \text{ MPa}.$$

Ekvivalentno naprezanje je prema **energijskoj teoriji HMM**:

$$\begin{aligned} \sigma_{\text{ekv}} &= \sqrt{\frac{1}{2} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]} = \\ &= \sqrt{\frac{1}{2} [(148,75 - 39,375)^2 + (39,375 - (-70))^2 + (-70 - 148,75)^2]} = 189,44 \text{ MPa}. \end{aligned}$$

Faktor sigurnosti na tečenje cilindra zatvorene debelostjene posude (slika b) jednak je onom za otvorenu debelostjenu posudu (slika a), tj.:

$$s = \frac{R_e}{(\sigma_{\text{ekv}})_{\max}} = \frac{380}{218,75} = 1,74 > s_{\min}.$$

Grafički prikazi raspodjele naprezanja  $\sigma_x$ ,  $\sigma_r$  i  $\sigma_\varphi$  u stijenki cilindra dani su na slici b).

Radijalni pomak točke na unutarnjoj površini (povećanje unutarnjeg polumjera) cilindra zatvorene debelostjene posude, tj. za  $r = r_1$ , prema [izrazu \(37a\)](#) jest:

$$(u)_{r=r_1} = \frac{r_1}{E} \cdot \left[ p_1 \cdot \left( \frac{r_1^2 + r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} + \nu \right) - \nu \cdot \sigma_x \right] = \frac{300}{2 \cdot 10^5} \cdot \left[ 70 \cdot \left( \frac{5^2 + 3^2}{5^2 - 3^2} + 0,3 \right) - 0,3 \cdot 39,375 \right] = 0,237 \text{ mm},$$

odnosno radijalni je pomak na vanjskoj površini (povećanje vanjskog polumjera) cilindra zatvorene debelostjene posude, tj. za  $r = r_2$ , prema [izrazu \(37b\)](#):

$$(u)_{r=r_2} = \frac{r_2}{E} \cdot \left( p_1 \cdot \frac{2r_1^2}{r_2^2 - r_1^2} - \nu \cdot \sigma_x \right) = \frac{500}{2 \cdot 10^5} \cdot \left( 70 \cdot \frac{2 \cdot 3^2}{5^2 - 3^2} - 0,3 \cdot 39,375 \right) = 0,167 \text{ mm}.$$