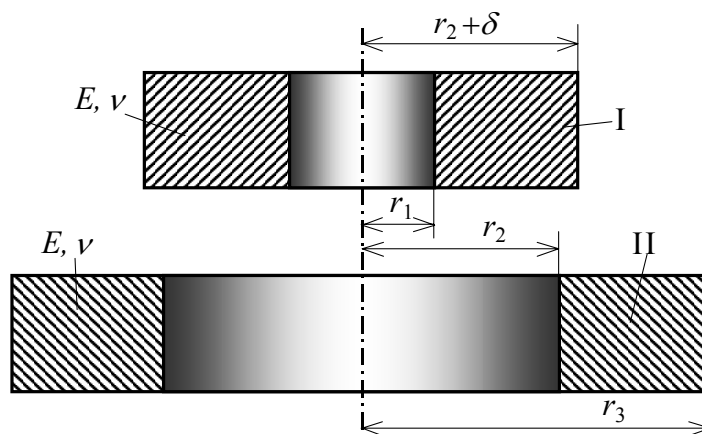


NAPREZANJA I POMACI U SASTAVLJENIM CIJEVIMA

Ranije je pokazano, [izraz \(41b\)](#), da je za cijev beskonačno velike debljine ($r_2 \Rightarrow \infty$) prema teoriji čvrstoće τ_{\max} , najveći dopušteni tlak ograničen čvrstoćom materijala cijevi, tj.: $p_{\text{ldop}} = \sigma_{\text{dop}} / 2$. U praksi je omjer polumjera debele cijevi $r_2 / r_1 \leq 2$, te se za veće tlakove rabe sastavljene cijevi.

Sastavljena cijev sastoji se od dvije cijevi, unutarnje (I) i vanjske (II), (slika 9).

Prvo se razmatra primjer u kojem su obje cijevi izrađene od istog materijala ($E_1 = E_2 = E$, $\nu_1 = \nu_2 = \nu$).



Slika 9. Sastavni dijelovi složene debele cijevi

Ako se vanjska cijev (II) ugrije i navuče na unutarnju (I) cijev, nakon hlađenja se na mjestu dodira stvara tlak p_d . Taj tlak izaziva tlačno cirkularno naprezanje u unutarnjoj i vlačno cirkularno naprezanje u vanjskoj cijevi (slika 10.a).

Dodirni tlak p_d kod poznatog preklopa δ može se odrediti iz uvjeta radijalnih pomaka sastavnih cijevi na površini dodira cijevi, tj. za $r = r_2$ i kada nema vanjskog opterećenja:

$$-(u^I)_{r=r_2} + (u^{II})_{r=r_2} = \delta, \quad (56)$$

pri čemu je za unutarnju cijev (I) radijalni pomak za $r = r_2$ i tlak $p_2 = p_d$ određen prema [izrazu \(47b\)](#), uz osno naprezanje $\sigma_x = 0$ i oznaku $k_1 = r_1 / r_2$:

$$(u^I)_{r=r_2} = -p_d \cdot \frac{r_2}{E} \cdot \left(\frac{r_2^2 + r_1^2}{r_2^2 - r_1^2} - \nu \right) = -p_d \cdot \frac{r_2}{E} \cdot \left(\frac{1 + k_1^2}{1 - k_1^2} - \nu \right). \quad (57a)$$

Za vanjsku cijev (II), radijalni pomak za $r = r_2$ i tlak $p_1 = p_d$ određen je prema [izrazu \(32a\)](#), uz osno naprezanje $\sigma_x = 0$ i oznaku $k_2 = r_2 / r_3$:

$$(u^{II})_{r=r_2} = \frac{p_d \cdot r_2}{E} \cdot \left(\frac{r_2^2 + r_3^2}{r_3^2 - r_2^2} + \nu \right) = \frac{p_d \cdot r_2}{E} \cdot \left(\frac{1 + k_2^2}{1 - k_2^2} + \nu \right). \quad (57b)$$

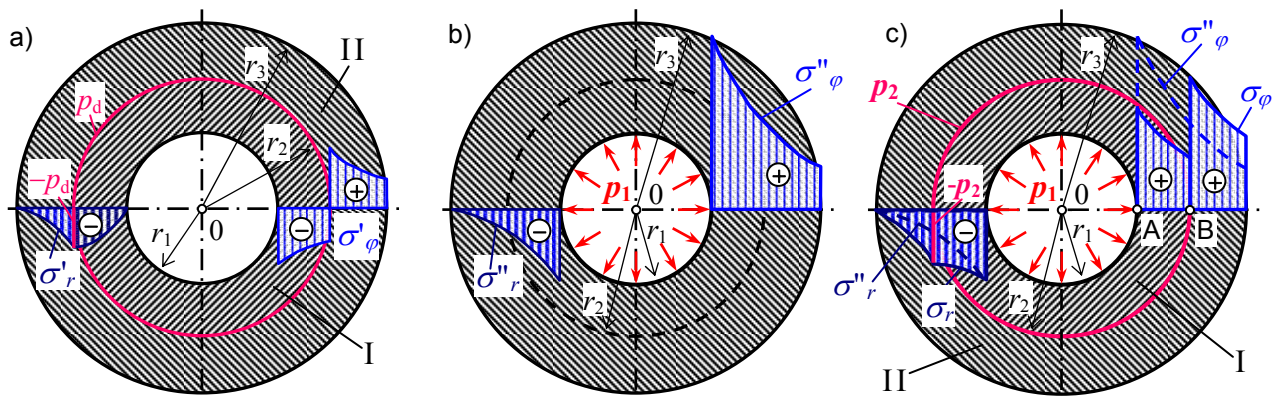
Uvrštavanjem izraza (57a) i (57b) u jedn. (56), slijedi izraz za izračunavanje tlaka p_d na mjestu dodira, nakon prisilnog sastavljanja cijevi, uz $k_1 = r_1 / r_2$ i $k_2 = r_2 / r_3$:

$$p_d = \frac{\delta \cdot E}{2r_2^3} \cdot \frac{(r_3^2 - r_2^2)(r_2^2 - r_1^2)}{r_3^2 - r_1^2} \quad \text{ili} \quad p_d = \frac{\delta \cdot E}{r_2} \cdot \frac{1}{\frac{1 + k_1^2}{1 - k_1^2} + \frac{1 + k_2^2}{1 - k_2^2}}. \quad (58)$$

Raspodjela naprezanja σ'_r i σ'_φ u sastavljenoj cijevi pod djelovanjem dodirnog tlaka p_d prikazana je na slici 10.a), a vrijednosti komponenti naprezanja određene su izrazima (59a) i (59b).

Raspodjela naprezanja σ''_r i σ''_φ u jednodijelnoj cijevi, čije se dimenzije podudaraju s unutarnjim (r_1) i vanjskim (r_3) polumjerom sastavljene cijevi; pod djelovanjem unutarnjeg tlaka p_1 prikazana je na slici 10.b), a vrijednosti komponenti naprezanja određene su izrazima (60a) i (60b).

Rezultirajuća naprezanja σ_r i σ_φ u sastavljenoj cijevi pod djelovanjem unutarnjeg tlaka p_1 određena su primjenom principa superpozicije zbrajanjem odgovarajućih vrijednosti komponenti naprezanja za dodirni tlak p_d (primjer na slici 10.a) i za tlak p_1 (slika 10.b). Rezultirajuće vrijednosti komponenti naprezanja u sastavljenoj cijevi određene su izrazima (61a), (61b), (61c), a prikazane su na slici 10.c).



Slika 10. Raspodjela radijalnih i cirkularnih naprezanja u sastavljenoj cijevi:

a) samo od dodirnog tlaka p_d ; b) samo od unutarnjeg tlaka p_1 ;

c) sastavljena cijev s dodirnim tlakom p_d i opterećena unutarnjim tlakom p_1

Vrijednosti radijalnih i cirkularnih naprezanja u sastavljenoj cijevi su na površinama unutarnje (I) i vanjske (II) debele cijevi:

a) kod sastavljene cijevi s vrijednosti dodirnog tlakom p_d na polumjeru r_2 (slika 10.a):

$$\left. \begin{aligned} \text{- unutarnja cijev (I): } & (\sigma'_r)_{r=r_1} = 0, (\sigma'_r)_{r=r_2} = -p_d, \\ & (\sigma'_\varphi)_{r=r_1} = -p_d \cdot \frac{2r_2^2}{r_2^2 - r_1^2}, (\sigma'_\varphi)_{r=r_2} = -p_d \cdot \frac{r_2^2 + r_1^2}{r_2^2 - r_1^2}, \end{aligned} \right\} \quad (59a)$$

$$\left. \begin{aligned} \text{- vanjska cijev (II): } & (\sigma'_r)_{r=r_2} = -p_d, (\sigma'_r)_{r=r_3} = 0, \\ & (\sigma'_\varphi)_{r=r_2} = p_d \cdot \frac{r_3^2 + r_2^2}{r_3^2 - r_2^2}, (\sigma'_\varphi)_{r=r_3} = p_d \cdot \frac{2r_2^2}{r_3^2 - r_2^2}, \end{aligned} \right\} \quad (59b)$$

b) kod opterećenja jednodijelne cijevi (r_1, r_3) samo unutarnjim tlakom p_1 (slika 10.b):

$$(\sigma''_r)_{r=r_1} = -p_1, (\sigma''_\varphi)_{r=r_1} = p_1 \cdot \frac{r_3^2 + r_1^2}{r_3^2 - r_1^2}, \quad (60a)$$

$$\left. \begin{aligned} (\sigma''_r)_{r=r_2} &= p_1 \cdot \frac{r_1^2}{r_3^2 - r_1^2} \cdot \left[1 - \frac{r_3^2}{r_2^2} \right], (\sigma''_\varphi)_{r=r_2} = p_1 \cdot \frac{r_1^2}{r_3^2 - r_1^2} \cdot \left[1 + \frac{r_3^2}{r_2^2} \right], \\ (\sigma''_r)_{r=r_3} &= 0, (\sigma''_\varphi)_{r=r_3} = p_1 \cdot \frac{2r_1^2}{r_3^2 - r_1^2}. \end{aligned} \right\} \quad (60b)$$

c) kod sastavljene cijevi s dodirnim tlakom p_d na polumjeru r_2 i opterećenja unutarnjim tlakom p_1 (slika 10.c):

- radialne komponente naprezanja su:

$$\left. \begin{aligned} \text{za } r = r_1 : \sigma_r &= (\sigma'_r)_{r=r_1} + (\sigma''_r)_{r=r_1} = -p_1, \\ \text{za } r = r_2 : \sigma_r &= (\sigma'_r)_{r=r_2} + (\sigma''_r)_{r=r_2} = -p_d + p_1 \cdot \frac{r_1^2}{r_3^2 - r_1^2} \cdot \left[1 - \frac{r_3^2}{r_2^2} \right], \\ \text{za } r = r_3 : \sigma_r &= (\sigma'_r)_{r=r_3} + (\sigma''_r)_{r=r_3} = 0, \end{aligned} \right\} \quad (61a)$$

- cirkularne komponente naprezanja su:

- unutarnja cijev (I):

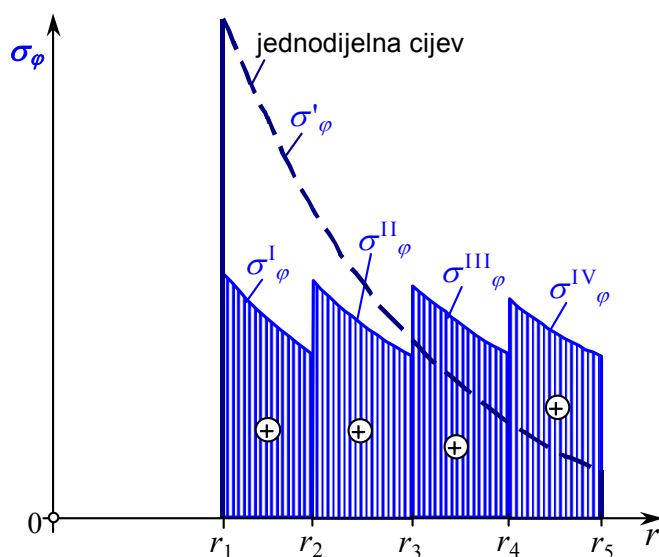
$$\left. \begin{aligned} \text{za } r = r_1 : \sigma_\varphi &= (\sigma'_\varphi)_{r=r_1} + (\sigma''_\varphi)_{r=r_1} = -p_d \cdot \frac{2r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} + p_1 \cdot \frac{r_3^2 + r_1^2}{r_3^2 - r_1^2}, \\ \text{za } r = r_2 : \sigma_\varphi &= (\sigma'_\varphi)_{r=r_2} + (\sigma''_\varphi)_{r=r_2} = -p_d \cdot \frac{r_2^2 + r_1^2}{r_2^2 - r_1^2} + p_1 \cdot \frac{r_1^2}{r_3^2 - r_1^2} \cdot \left[1 + \frac{r_3^2}{r_2^2} \right], \end{aligned} \right\} \quad (61b)$$

- vanjska cijev (II):

$$\left. \begin{aligned} \text{za } r = r_2 : \sigma_\varphi &= (\sigma'_\varphi)_{r=r_2} + (\sigma''_\varphi)_{r=r_2} = p_d \cdot \frac{r_3^2 + r_2^2}{r_3^2 - r_2^2} + p_1 \cdot \frac{r_1^2}{r_3^2 - r_1^2} \cdot \left[1 + \frac{r_3^2}{r_2^2} \right], \\ \text{za } r = r_3 : \sigma_\varphi &= (\sigma'_\varphi)_{r=r_3} + (\sigma''_\varphi)_{r=r_3} = p_d \cdot \frac{2r_2^2}{r_3^2 - r_2^2} + p_1 \cdot \frac{2r_1^2}{r_3^2 - r_1^2}. \end{aligned} \right\} \quad (61c)$$

Iz slike 10.c) vidi se, da su se vrijednosti cirkularnih naprezanja smanjile u unutarnjoj cijevi, ali su se povećale u vanjskoj cijevi u odnosu na vrijednosti naprezanja u cijevi iz jednog dijela, kod jednakog unutarnjeg tlaka p_1 u cijevi. Pravilnim izborom vrijednosti preklopa δ može se dobiti jednoličnija raspodjela maksimalnih naprezanja u obje cijevi.

U praksi se rabi i izrada sastavljene cijevi od više cijevi s preklopima, slika 11, da bi se postigla što jednoličnija raspodjela cirkularnih naprezanja u cijevima, a time i bolje iskorištenje sa stanovišta čvrstoće materijala cijevi.

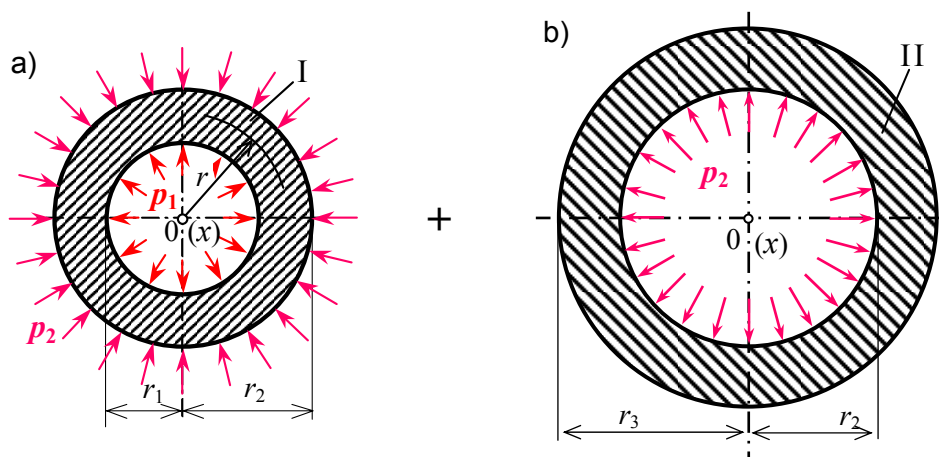


Slika 11. Raspodjela cirkularnih naprezanja u sastavljenoj cijevi od četiri cijevi u usporedbi s cirkularnim naprezanjima u jednodijelnoj cijevi (r_1, r_5), kod opterećenja jednakim unutarnjim tlakom p_1

Izrazi za određivanje vrijednosti radijalnih i cirkularnih naprežanja u sastavljenoj cijevi na površinama unutarnje (I) i vanjske (II) sastavne cijevi su (61a, 61b i 61c), slika 10.c. Oni se mogu pisati jednostavnije u obliku ranije danih [izraza \(25\), \(26\) i \(35a\), \(35b\)](#), kad se odredi tlak p_2 na dodiru sastavnih cijevi, slika 12.

Izraz za određivanje vrijednosti tlaka p_2 na površinama dodira sastavnih cijevi I i II sastavljene cijevi jest:

$$\text{za } r = r_2 : p_2 = |(\sigma_r)_{r=r_2}| = p_d - p_1 \cdot \frac{r_1^2}{r_3^2 - r_1^2} \cdot \left[1 - \frac{r_3^2}{r_2^2} \right] \quad (62)$$



Slika 12. Opterećenja tlakovima sastavne cijevi I (slika a) i cijevi II (slika b), sastavljene cijevi opterećene unutarnjim tlakom p_1 (slika 10.c)

Slijede izrazi za određivanje vrijednosti radijalnih i cirkularnih naprežanja na površinama unutarnje (I) i vanjske (II) sastavne cijevi, uz prikaz raspodjele na slici 10.c:

- radijalne komponente naprežanja su:

$$(\sigma_r)_{r=r_1} = -p_1, \quad (\sigma_r^I)_{r=r_2} = (\sigma_r^{II})_{r=r_2} = -p_2, \quad (\sigma_r)_{r=r_3} = 0. \quad (63a)$$

- cirkularne komponente naprežanja za unutarnju cijev (I) su:

$$(\sigma_\varphi)_{r=r_1} = p_1 \cdot \frac{r_2^2 + r_1^2}{r_2^2 - r_1^2} - p_2 \cdot \frac{2r_2^2}{r_2^2 - r_1^2}, \quad (\sigma_\varphi^I)_{r=r_2} = p_1 \cdot \frac{2r_1^2}{r_2^2 - r_1^2} - p_2 \cdot \frac{r_2^2 + r_1^2}{r_2^2 - r_1^2}; \quad (63b)$$

- cirkularne komponente naprežanja za vanjsku cijev (II) su:

$$(\sigma_\varphi^{II})_{r=r_2} = p_2 \cdot \frac{r_3^2 + r_2^2}{r_3^2 - r_2^2}, \quad (\sigma_\varphi)_{r=r_3} = p_2 \cdot \frac{2r_2^2}{r_3^2 - r_2^2}. \quad (63c)$$

Radijalni pomaci na unutarnjoj, dodirnoj i vanjskoj površini sastavljene cijevi, tj. povećanja polumjera sastavnih cijevi kod opterećenja unutarnjim tlakom p_1 su:

- za unutarnju cijev (I):

$$(u^I)_{r=r_1} = \frac{p_1 \cdot r_1}{E} \cdot \left(\frac{r_1^2 + r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} + \nu \right) - p_2 \cdot \frac{2r_1}{E} \cdot \frac{r_2^2}{r_2^2 - r_1^2}, \quad (64a)$$

$$(u^I)_{r=r_2} = \frac{2p_1 \cdot r_1^2 \cdot r_2}{E \cdot (r_2^2 - r_1^2)} - p_2 \cdot \frac{r_2}{E} \cdot \left(\frac{r_2^2 + r_1^2}{r_2^2 - r_1^2} - \nu \right); \quad (64b)$$

- za vanjsku cijev (II):

$$(u^{II})_{r=r_2} = \frac{p_2 \cdot r_2}{E} \cdot \left(\frac{r_3^2 + r_2^2}{r_3^2 - r_2^2} + \nu \right), \text{ tj. vrijedi: } (u^{II})_{r=r_2} = (u^I)_{r=r_2} + \delta, \quad (64c)$$

$$(u^{II})_{r=r_3} = p_2 \cdot \frac{2r_3}{E} \cdot \frac{r_2^2}{r_3^2 - r_2^2}. \quad (64d)$$

ODREĐIVANJE OPTIMALNOG PREKLOPA SASTAVLJENE CIJEVI

Iz uvjeta jednakosti ekvivalentnog naprezanja u točki A i točki B prema teoriji najvećih posmičnih naprezanja (τ_{\max}): $(\sigma_{\text{ekv}})_A = (\sigma_{\text{ekv}})_B = \sigma_1 - \sigma_3$, slika 10.c), može se odrediti vrijednost **optimalnog preklopa** kod sastavljanja cijevi, kad su zadane dimenzije sastavnih cijevi (od istog materijala) i iznos je radnog tlaka p_1 u cijevi:

$$\delta_{\text{opt}} = \frac{2p_1}{E} \cdot \frac{r_2 \cdot r_3^2 \cdot (r_2^2 - r_1^2)}{r_3^2 \cdot (r_2^2 - r_1^2) + r_2^2 \cdot (r_3^2 - r_2^2)}. \quad (65)$$

Kod optimalnog preklopa sastavljene cijevi, vrijednost ekvivalentnog naprezanja u sastavnim cijevima jest:

$$\sigma_{\text{ekv}} = \frac{2p_1 \cdot r_3^2}{r_3^2 - r_1^2} \cdot \left[1 - \frac{1}{\frac{r_3^2}{r_3^2 - r_2^2} + \frac{r_2^2}{r_2^2 - r_1^2}} \right]. \quad (66)$$

To će naprezanje (66) imati minimalnu vrijednost, ako je ispunjen uvjet polumjera:

$$r'_2 = \sqrt{r_1 \cdot r_3}, \quad (67)$$

a tada je vrijednost minimalnog ekvivalentnog naprezanja u cijevima:

$$(\sigma'_{\text{ekv}})_{\min} = p_1 \cdot \frac{r_3}{r_3 - r_1} \text{ (to je tzv. Gadolinov uvjet)}. \quad (68)$$

U tom je slučaju optimalna vrijednost dodirnog tlaka na sastavu cijevi ($r = r'_2$), kod opterećenja unutarnjim radnim tlakom p_1 :

$$p'_d = \frac{p_1}{2} \cdot \frac{r_3 - r_1}{r_3 + r_1}, \quad (69)$$

a vrijednost optimalnog preklopa u tom je slučaju:

$$\delta'_{\text{opt}} = \frac{p_1 \cdot r'_2}{E}. \quad (70)$$

[Numerički primjeri](#) sa sastavljenim cijevima dani su u riješenim primjerima i seminar-skim zadacima iz ovog područja.