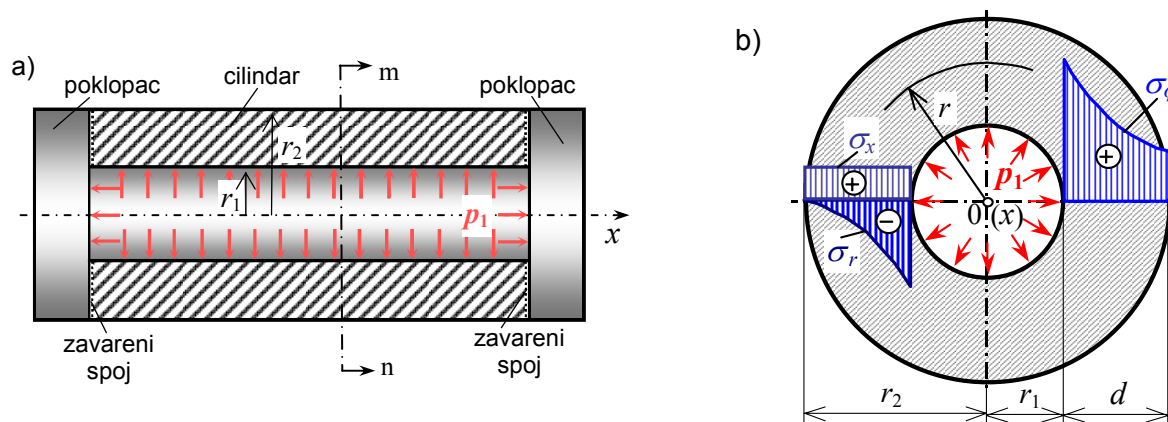


NAPREZANJA I POMACI DEBELOSTJENE POSUDE ILI CIJEVI /NASTAVAK/**2. Debelostjena posuda opterećena unutarnjim tlakom p_1**

Debelostjena posuda ili cijev opterećena samo unutarnjim tlakom p_1 prikazana je na slici 6.a) i b).



Slika 6. Debelostjena posuda opterećena unutarnjim tlakom p_1

Lamé-ovi izrazi (25), (26) i (28) za komponente napreznja u stijenki posude jesu:

$$\sigma_r = p_1 \cdot \frac{r_1^2}{r_2^2 - r_1^2} \left[1 - \left(\frac{r_2}{r} \right)^2 \right], \quad (32)$$

$$\sigma_\varphi = p_1 \cdot \frac{r_1^2}{r_2^2 - r_1^2} \left[1 + \left(\frac{r_2}{r} \right)^2 \right]. \quad (33)$$

$$\sigma_x = p_1 \cdot \frac{r_1^2}{r_2^2 - r_1^2} = \text{konst.} \quad \text{ili} \quad \sigma_x = 0 \quad (\text{otvorena cijev}). \quad (34)$$

Iz izraza (32) i (33) vidljivo je da su promjene vrijednosti napreznja σ_r i σ_φ u stijenki posude prema zakonu hiperbole 2. stupnja, prikaz na slici 6.b). Radijalna napreznja σ_r su u cijelom presjeku tlačna, a cirkularna napreznja σ_φ su vlačna.

Najveće vrijednosti napreznja su na unutarnjoj površini debelostjene posude ili debele cijevi, tj. za $r = r_1$ (slika 6.b), uz oznaku ($k = r_1/r_2$):

$$(\sigma_r)_{r=r_1} = -p_1, \quad (\sigma_\varphi)_{r=r_1} = p_1 \cdot \frac{r_2^2 + r_1^2}{r_2^2 - r_1^2} = p_1 \cdot \frac{1+k^2}{1-k^2}, \quad \sigma_x = \frac{p_1 \cdot r_1^2}{r_2^2 - r_1^2} = p_1 \cdot \frac{k^2}{1-k^2}, \quad (35a)$$

a napreznja na vanjskoj površini debelostjene posude ili debele cijevi, tj. za $r = r_2$ (slika 6.b), uz oznaku ($k = r_1/r_2$) su:

$$(\sigma_r)_{r=r_2} = 0, \quad (\sigma_\varphi)_{r=r_2} = p_1 \cdot \frac{2r_1^2}{r_2^2 - r_1^2} = p_1 \cdot \frac{2k^2}{1-k^2}, \quad \sigma_x = \frac{p_1 \cdot r_1^2}{r_2^2 - r_1^2} = p_1 \cdot \frac{k^2}{1-k^2}. \quad (35b)$$

Sve točke stijenke posude imaju radijalni pomak, koji je prema (26) određen izrazom:

$$u = \frac{p_1 \cdot r_1^2}{E \cdot (r_2^2 - r_1^2)} \cdot \left[(1-\nu) \cdot r + (1+\nu) \cdot \frac{r_2^2}{r} \right] - \frac{\nu}{E} \cdot \sigma_x \cdot r. \quad (36)$$

Radijalni pomak na unutarnjoj površini (povećanje unutarnjeg polumjera) zatvorene debelostjene posude, tj. za $r = r_1$, iznosi:

$$(u)_{r=r_1} = \frac{p_1 \cdot r_1}{E} \cdot \left(\frac{r_1^2 + r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} + \nu \right) - \frac{\nu}{E} \cdot \sigma_x \cdot r_1 = \frac{p_1 \cdot r_1}{E} \cdot \left(\frac{1+k^2}{1-k^2} + \nu \right) - \frac{\nu}{E} \cdot \sigma_x \cdot r_1, \quad (37a)$$

odnosno radijalni je pomak na vanjskoj površini zatvorene debelostjene posude (povećanje vanjskog polumjera), tj. za $r = r_2$:

$$(u)_{r=r_2} = \frac{2p_1 \cdot r_1^2 \cdot r_2}{E \cdot (r_2^2 - r_1^2)} - \frac{\nu}{E} \cdot \sigma_x \cdot r_2 = \frac{p_1 \cdot r_2}{E} \cdot \frac{2k^2}{1-k^2} - \frac{\nu}{E} \cdot \sigma_x \cdot r_2. \quad (37b)$$

Za otvorenu debelu cijev, član s naprezanjem σ_x otpada, jer je $\sigma_x = 0$.

Uvjet čvrstoće debelostjene posude opterećene unutarnjim tlakom p_1

Najveća su naprezanja na unutarnjoj površini cilindra, tj. za $r = r_1$, slika 6.b. U toj točki vlada troosno stanje naprezanja, a iznosi glavnih naprezanja su:

$$\sigma_\varphi = p_1 \cdot \frac{r_2^2 + r_1^2}{r_2^2 - r_1^2} = \sigma_1, \quad \sigma_x = p_1 \cdot \frac{r_1^2}{r_2^2 - r_1^2} = \sigma_2, \quad \sigma_r = -p_1 = \sigma_3. \quad (38)$$

Ako je materijal debelostjene posude (debele cijevi) linearno elastičan, mogu se primijeniti teorije čvrstoće za duktilne materijale i to: teorija najvećih posmičnih naprezanja ([teorija \$\tau_{\max}\$](#)), odnosno teorija najveće gustoće distorzijske energije deformiranja (kraće, [teorija HMM](#)).

Uvjet čvrstoće debelostjene posude je, da ne smije doći do plastičnih deformacija, tj.:

$$\sigma_{\text{ekv}} \leq \sigma_{\text{dop}}, \quad (39)$$

pri čemu je dopušteno naprezanje materijala σ_{dop} određeno propisima ili se može ići do granice rastezanja: $\sigma_{\text{dop}} \leq R_e$.

Ekvivalentno naprezanje, prema **teoriji najvećeg posmičnog naprezanja** jest:

$$\sigma_{\text{ekv}} = \sigma_1 - \sigma_3 = (\sigma_\varphi - \sigma_r)_{r=r_1} = \frac{2p_1}{1 - (r_1/r_2)^2} = \frac{2p_1}{1 - k^2} \leq \sigma_{\text{dop}}, \quad (40)$$

odnosno dopušteni tlak $p_{1\text{dop}}$ u debelostjenoj posudi jest:

$$p_{1\text{dop}} = \frac{\sigma_{\text{dop}}}{2} \cdot \left[1 - \left(\frac{r_1}{r_2} \right)^2 \right] = \frac{\sigma_{\text{dop}}}{2} \cdot (1 - k^2). \quad (41a)$$

Za $r_2 \Rightarrow \infty$ ($k \Rightarrow 0$) je najveći dopušteni tlak: $p_{1\text{dop}} = \sigma_{\text{dop}} / 2$. (41b)

U praksi je omjer $r_2 / r_1 \leq 2$, a za veće tlakove rabe se sastavljene cijevi.

Prema **energijskoj teoriji HMM**, ekvivalentno naprezanje jest:

$$\sigma_{\text{ekv}} = \sqrt{\frac{1}{2} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]} = \sqrt{\frac{1}{2} [(\sigma_\varphi - \sigma_x)^2 + (\sigma_x - \sigma_r)^2 + (\sigma_r - \sigma_\varphi)^2]}, \quad (42)$$

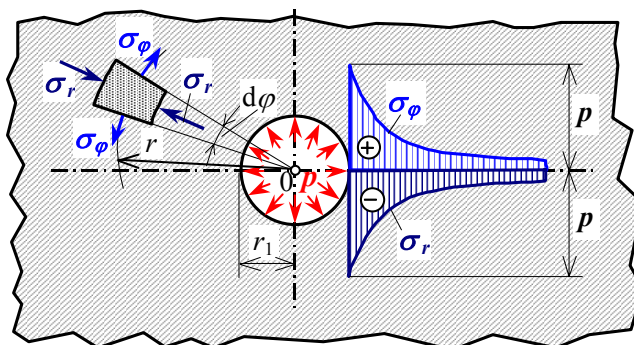
odnosno nakon sređivanja slijedi:
$$\sigma_{\text{ekv}} = \frac{\sqrt{3} p_1}{1 - (r_1/r_2)^2} = \frac{\sqrt{3} p_1}{1 - k^2} \leq \sigma_{\text{dop}}. \quad (43a)$$

Kad vanjski polumjer $r_2 \rightarrow \infty$, najveći je dopušteni tlak u cijevi:
$$p_{\text{dop}} = \sigma_{\text{dop}} / \sqrt{3}. \quad (43b)$$

Naprezanja oko malog kružnog otvora opterećenog tlakom p , npr. uljni kanali strojeva i sl., mogu se odrediti pomoću izraza za deblostjenu posudu opterećenu unutarnjim tlakom.

Na rubu malog otvora ($r_2 \rightarrow \infty$), prema izrazima (35a) komponente naprezanja su:

$$(\sigma_r)_{r=r_1} = -p \quad \text{i} \quad (\sigma_\varphi)_{r=r_1} = p. \quad (44)$$



Slika 7. Naprezanja u blizini malog kružnog otvora opterećenog tlakom p

Za veliki vanjski promjer $r_2 \rightarrow \infty$ izrazi za naprezanja u točki stijenke daleko od malog otvora, slika 7, su:

$$\sigma_{r,\varphi} = \mp p \left(\frac{r_1}{r} \right)^2, \quad (45)$$

što znači da se sve točke stijenke nalaze u stanju čistog smicanja. Vidi se, da za vrijednosti $r \geq 4r_1$ komponente naprezanja σ_r i σ_φ imaju svega 1/16 vrijednosti maksimalnih naprezanja na rubu otvora. To znači da tijela s udaljenošću od unutarnjeg otvora $r \geq 4r_1$ mogu imati proizvoljni oblik vanjske površine, a pogreška proračuna će biti u granicama 5 ÷ 6 %.

Naprezanja cilindra manje debljine stijenke koji je opterećen tlakom p na unutarnjoj površini, a vanjski polumjer cilindra jest: $r_2 = r_1 + d$, gdje je d debljina stijenke cilindra, slika 6.b).

Vrijednost je cirkularne komponente naprezanja na unutarnjoj površini cilindra, tj. za $r = r_1$:

$$(\sigma_\varphi)_{r=r_1} = p \cdot \frac{r_2^2 + r_1^2}{r_2^2 - r_1^2} = p \cdot \frac{(r_1 + d)^2 + r_1^2}{d(2r_1 + d)}, \quad (46a)$$

a cirkularna komponenta naprezanja na vanjskoj površini cilindra, tj. za $r = r_2$ je:

$$(\sigma_\varphi)_{r=r_2} = p \cdot \frac{2r_1^2}{r_2^2 - r_1^2} = p \cdot \frac{2r_1^2}{d(2r_1 + d)}. \quad (46b)$$

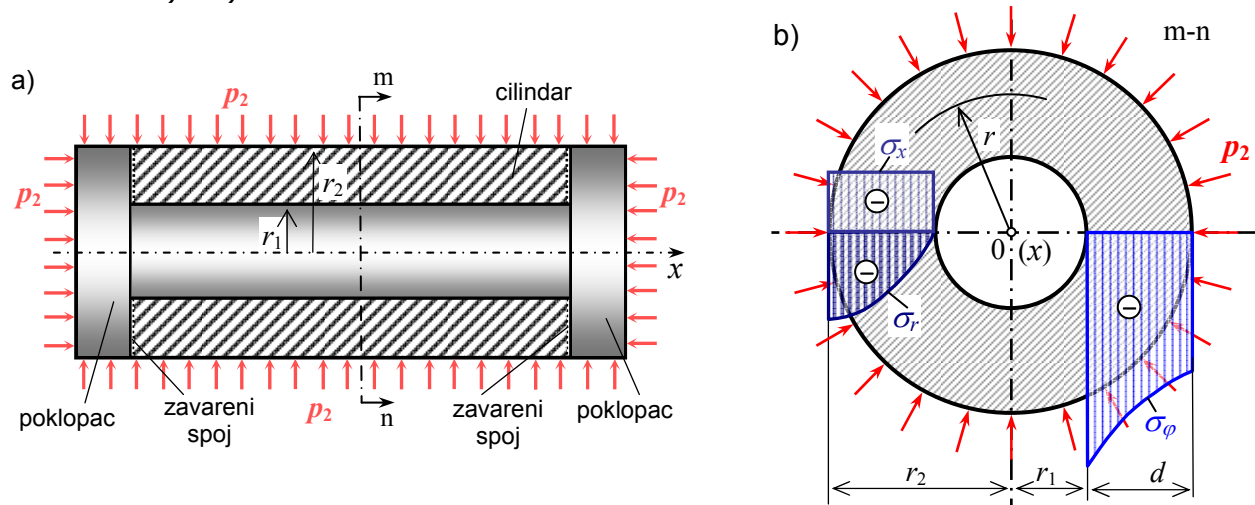
Za male vrijednosti d debljine stijenke cilindra vrijedi približan izraz za izračunavanje vrijednosti cirkularnog napreznja:

$$(\sigma_\varphi)_{r=r_1} \approx (\sigma_\varphi)_{r=r_2} \approx p \cdot \frac{r_1}{d}, \quad (46c)$$

dok za radijalne komponente napreznja vrijedi: $(\sigma_r)_{r=r_1} = -p$ i $(\sigma_r)_{r=r_2} = 0$, neovisno o debljini stijenke cilindra.

3. Debelostjena posuda opterećena vanjskim tlakom p_2

Debelostjena posuda ili cijev opterećena samo unutarnjim tlakom p_1 , prikazana je na slici 8.a) i b).



Slika 8. Debelostjena posuda opterećena vanjskim tlakom p_2

Lamé-ovi izrazi (20), (21) i (23) za komponente napreznja u stijenki posude jesu:

$$\sigma_r = -p_2 \cdot \frac{r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} \left[1 - \left(\frac{r_1}{r} \right)^2 \right], \quad (47)$$

$$\sigma_\varphi = -p_2 \cdot \frac{r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} \left[1 + \left(\frac{r_1}{r} \right)^2 \right]. \quad (48)$$

$$\sigma_x = -p_2 \cdot \frac{r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} = \text{konst.} \quad \text{ili} \quad \sigma_x = 0 \quad (\text{otvorena cijev}). \quad (49)$$

Iz izraza (47) i (48) vidljivo je da su promjene vrijednosti napreznja σ_r i σ_φ u stijenki posude prema zakonu hiperbole 2. stupnja, prikaz na slici 8.b). Radijalna i cirkularna napreznja su u cijelom presjeku tlačna, pri čemu je apsolutna vrijednost $|\sigma_\varphi| > |\sigma_r|$.

Vrijednosti su napreznja na unutarnjoj površini debelostjene posude ili debele cijevi, tj. za $r = r_1$ (slika 8.b), uz oznaku ($k = r_1/r_2$):

$$(\sigma_r)_{r=r_1} = 0, \quad (\sigma_\varphi)_{r=r_1} = -p_2 \cdot \frac{2r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} = -p_2 \cdot \frac{2}{1-k^2}, \quad \sigma_x = -p_2 \cdot \frac{r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} = -p_2 \cdot \frac{1}{1-k^2}, \quad (50a)$$

a napreznja na vanjskoj površini debelostjene posude ili debele cijevi, tj. za $r = r_2$ (slika 8.b), uz oznaku ($k = r_1/r_2$) su:

$$(\sigma_r)_{r=r_2} = -p_2, (\sigma_\varphi)_{r=r_2} = -p_2 \cdot \frac{r_2^2 + r_1^2}{r_2^2 - r_1^2} = -p_2 \cdot \frac{1+k^2}{1-k^2}, \sigma_x = -p_2 \cdot \frac{r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} = -p_2 \cdot \frac{1}{1-k^2}. \quad (50b)$$

Sve točke stijenke posude imaju negativni radijalni pomak, koji je prema (31) određen izrazom:

$$u = -p_2 \frac{r_2^2}{E(r_2^2 - r_1^2)} \left[(1-\nu)r + (1+\nu) \cdot \frac{r_1^2}{r} \right] - \frac{\nu}{E} \cdot \sigma_x \cdot r. \quad (51)$$

Radijalni pomak na unutarnjoj površini (smanjenje unutarnjeg polumjera) zatvorene debelostjene posude, tj. za $r = r_1$, iznosi:

$$(u)_{r=r_1} = -p_2 \cdot \frac{2r_1}{E} \cdot \frac{r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} - \frac{\nu}{E} \cdot \sigma_x \cdot r_1 = -p_2 \cdot \frac{2r_1}{E} \cdot \frac{1}{1-k^2} - \frac{\nu}{E} \cdot \sigma_x \cdot r_1, \quad (52a)$$

odnosno radijalni je pomak na vanjskoj površini zatvorene debelostjene posude (smanjenje vanjskog polumjera), tj. za $r = r_2$:

$$(u)_{r=r_2} = -p_2 \cdot \frac{r_2}{E} \cdot \left(\frac{r_2^2 + r_1^2}{r_2^2 - r_1^2} - \nu \right) - \frac{\nu}{E} \cdot \sigma_x \cdot r_2 = -p_2 \frac{r_2}{E} \cdot \left(\frac{1+k^2}{1-k^2} - \nu \right) - \frac{\nu}{E} \cdot \sigma_x \cdot r_2. \quad (52b)$$

Za otvorenu debelu cijev, član s naprežanjem σ_x otpada, jer je $\sigma_x = 0$.

Uvjet čvrstoće debelostjene posude opterećene vanjskim tlakom p_2

Najveća su naprežanja na unutarnjoj površini cilindra, tj. za $r = r_1$, (slika 8.b). U toj točki vlada troosno (zapravo dvoosno) stanje naprežanja, a iznosi glavnih naprežanja su:

$$\sigma_r = 0 = \sigma_1, \sigma_x = -\frac{p_2 \cdot r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} = \sigma_2, \sigma_\varphi = -p_2 \cdot \frac{2r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} = \sigma_3. \quad (53)$$

Ekvivalentno naprežanje, prema **teoriji najvećeg posmičnog naprežanja** jest:

$$\sigma_{\text{ekv}} = \sigma_1 - \sigma_3 = (\sigma_r - \sigma_\varphi)_{r=r_1} = \frac{2p_2}{1 - (r_1/r_2)^2} = \frac{2p_2}{1 - k^2} \leq \sigma_{\text{dop}}, \quad (54)$$

a to je jednako izrazu (40) kod opterećenja unutarnjim tlakom, pa je dopušteni tlak $p_{2\text{dop}}$ debelostjene posude:

$$p_{2\text{dop}} = \frac{\sigma_{\text{dop}}}{2} \cdot \left[1 - \left(\frac{r_1}{r_2} \right)^2 \right] = \frac{\sigma_{\text{dop}}}{2} \cdot (1 - k^2). \quad (55a)$$

Za $r_2 \Rightarrow \infty$ je najveći dopušteni tlak: $p_{2\text{dop}} = \sigma_{\text{dop}}/2$. (55b)

U praksi je omjer polumjera $r_2/r_1 \leq 2$, a za veće tlakove rabe se sastavljene cijevi.

Ako otvor teži nuli, tj. $r_1 \rightarrow 0$, vrijednost cirkularnog naprežanja na vanjskoj površini (površina opterećenja) $\sigma_\varphi \rightarrow -p_2$, a na površini malog otvora $\sigma_\varphi \rightarrow -2p_2$. Takav rast naprežanja kod malog središnjeg otvora je primjer za koncentraciju naprežanja.

Za utvrđivanje izloženog gradiva, više u [primjerima i zadacima](#).