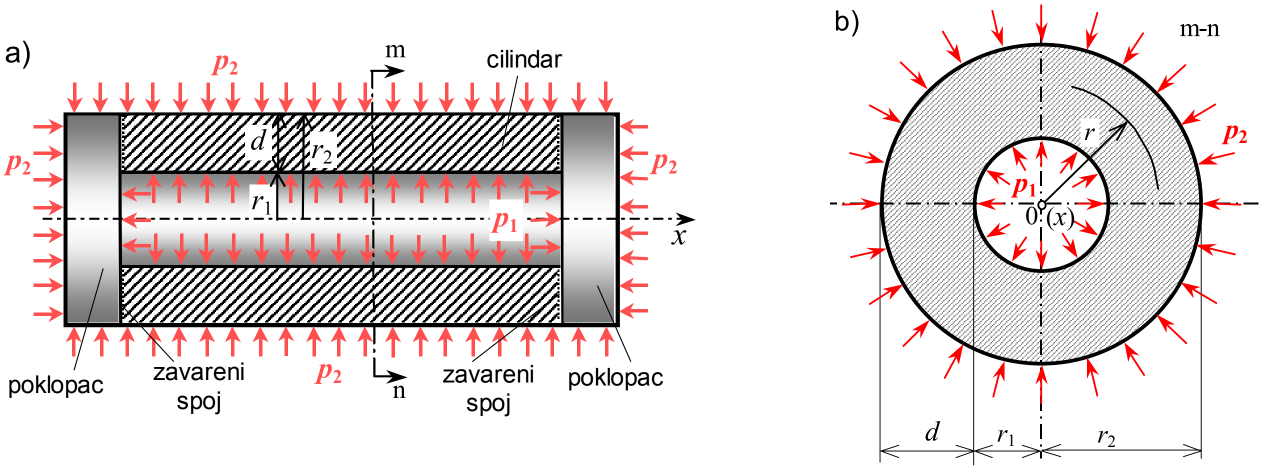
NAPREZANJA I POMACI DEBELOSTJENE POSUDE I CIJEVI

1. Debelostjena posuda opterećena unutarnjim i vanjskim tlakom

Osnosimetrično tijelo u obliku debele cijevi ili cilindrične posude smatra se debelostjenom cijevi ili posudom, ako je debljina stijenke d veća od 0,1 srednjeg polumjera, tj. mora biti ispunjen uvjet, slika 4:

$$\boxed{d = r_2 - r_1 > \frac{1}{10} \cdot \frac{r_1 + r_2}{2}} \tag{18}$$

Opterećenje debelostjene posude jednoliko je raspodijeljeno u radijalnom smjeru uzduž posude, po unutarnjoj površini posude djeluje tlak $\boldsymbol{p_1}$ a po vanjskoj površini tlak $\boldsymbol{p_2}$.



Slika 4. Primjer opterećenja debelostjene posude unutarnjim i vanjskim tlakom

Za slučaj bez rotacije $\omega = 0$ kao i bez promjene temperature stijenke posude (ili cijevi), diferencijalna jednadžba elementa (12) ima oblik:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left[\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}(u \cdot r)\right] = 0 . \tag{19}$$

Opće rješenje diferencijalne jednadžbe (19) jest:

$$\boxed{u = C_1 r + \frac{C_2}{r}} . \tag{20}$$

Konstante integracije C_1 i C_2 određuju se iz rubnih uvjeta opterećenja debelostjene posude (debele cijevi).

Uvođenjem pomoćnih konstanti A i B u izraz (20):

$$A = \frac{E}{1-\nu} \cdot C_1 , \quad B = \frac{E}{1+\nu} \cdot C_2 , \tag{21}$$

slijede prema izrazima (8) i (9), izrazi za radijalne i cirkularne (tangencijalne) komponente naprezanja u stijenki debelostjene posude:

$$\left.\begin{aligned} \sigma_r &= A - \frac{B}{r^2} , \\ \sigma_\varphi &= A + \frac{B}{r^2} , \\ \text{odnosno: } \sigma_r + \sigma_\varphi &= 2A = \text{konst.} \end{aligned}\right\} \tag{22}$$

Iz rubnih uvjeta opterećenja debelostjene posude (debele cijevi) za polumjere r_1 i r_2, slika 4), vrijedi za radijalne komponente naprezanja:

$$\sigma_r(r_1) = A - \frac{B}{r_1^2} = -p_1 \quad \text{i} \quad \sigma_r(r_2) = A - \frac{B}{r_2^2} = -p_2\,, \tag{23}$$

te slijede izrazi za konstante A i B:

$$A = \frac{p_1 \cdot r_1^2 - p_2 \cdot r_2^2}{r_2^2 - r_1^2}\,, \quad B = \frac{(p_1 - p_2)\cdot r_1^2 \cdot r_2^2}{r_2^2 - r_1^2}\,. \tag{24}$$

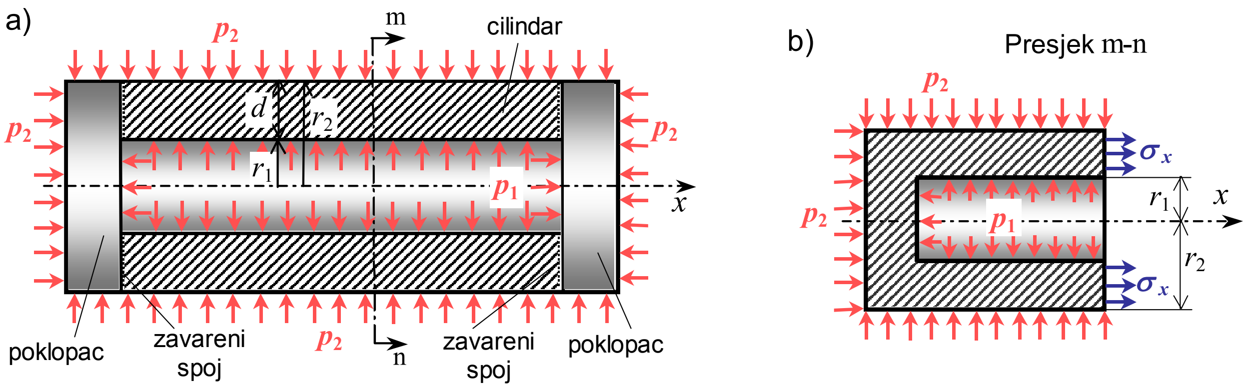
Uvođenjem konstanti A i B u izraze (22), slijede konačni izrazi za naprezanja:

$$\boxed{\sigma_r = \frac{p_1 \cdot r_1^2 - p_2 \cdot r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} - \frac{(p_1 - p_2)\cdot r_1^2 \cdot r_2^2}{r_2^2 - r_1^2}\cdot\frac{1}{r^2}}\,, \tag{25}$$

$$\boxed{\sigma_\varphi = \frac{p_1 \cdot r_1^2 - p_2 \cdot r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} + \frac{(p_1 - p_2)\cdot r_1^2 \cdot r_2^2}{r_2^2 - r_1^2}\cdot\frac{1}{r^2}}\,. \tag{26}$$

Kod otvorene debelostjene posude, npr. slika 1.b), uzdužno je naprezanje $\sigma_x = 0$.

Kod zatvorene debelostjene posude, npr. slika 4.a), uzdužno naprezanje σ_x u presjecima dovoljno udaljenim od dna posude, slika 5.a), jednoliko je raspodijeljeno po poprečnom presjeku, slika 5.b), a određuje se iz uvjete ravnoteže sila (27) na dijelu posude:



Slika 5. Naprezanje u poprečnom presjeku debelostjene posude

$$\sum F_x = 0: \; \sigma_x \cdot \pi \cdot \left(r_2^2 - r_1^2\right) + p_2 \cdot \pi \cdot r_2^2 - p_1 \cdot \pi \cdot r_1^2 = 0\,, \tag{27}$$

odakle slijedi izraz za uzdužno naprezanje σ_x u poprečnom presjeku:

$$\boxed{\sigma_x = \frac{p_1 \cdot r_1^2 - p_2 \cdot r_2^2}{r_2^2 - r_1^2}}\,. \tag{28}$$

Usporedbom izraza (28) s izrazima (25) i (26), vidljivo je da je u danom slučaju, uzdužno naprezanje σ_x u poprečnom presjeku jednako srednjoj vrijednosti radijalne i cirkularne komponente naprezanja debelostjene posude, tj.:

$$\sigma_x = \frac{1}{2}\left(\sigma_r + \sigma_\varphi\right) = A = \text{konst.} \tag{29}$$

Uvrštavanjem izraza (24) u (21) određene su konstante integracije C_1 i C_2:

$$C_1 = \frac{1-\nu}{E}\cdot A = \frac{1-\nu}{E}\cdot\frac{p_1 \cdot r_1^2 - p_2 \cdot r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} \quad \text{i} \quad C_2 = \frac{1+\nu}{E}\cdot B = \frac{1+\nu}{E}\cdot\frac{(p_1 - p_2)\cdot r_1^2 \cdot r_2^2}{r_2^2 - r_1^2}\,. \tag{30}$$

Konačno, uvrštavanjem konstanti konstante integracije C_1 i C_2 u izraz (20), slijedi izraz za određivanje radijalnog pomaka $\boldsymbol{u}$ točke stijenke **zatvorene** debelostjene posude (debele cijevi):

$$\boxed{u = \frac{1-\nu}{E} \cdot \frac{p_1 \cdot r_1^2 - p_2 \cdot r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} \cdot r + \frac{1+\nu}{E} \cdot \frac{(p_1 - p_2) \cdot r_1^2 \cdot r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} \cdot \frac{1}{r} - \frac{\nu}{E} \cdot \sigma_x \cdot r}. \qquad (31)$$

Ovaj se izraz može pojednostaviti, ako je već izračunato uzdužno naprezanje σ_x u poprečnom presjeku posude (izraz 28), kako slijedi:

$$u = \frac{1-\nu}{E} \cdot \sigma_x \cdot r + \frac{1+\nu}{E} \cdot \frac{(p_1 - p_2) \cdot r_1^2 \cdot r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} \cdot \frac{1}{r} - \frac{\nu}{E} \cdot \sigma_x \cdot r \text{ , te slijedi:}$$

$$\boxed{u = \frac{1-2\nu}{E} \cdot \sigma_x \cdot r + \frac{1+\nu}{E} \cdot \frac{(p_1 - p_2) \cdot r_1^2 \cdot r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} \cdot \frac{1}{r}}. \qquad (31a)$$

Za točke na unutarnjoj površini zatvorene debelostjene posude, radijalni je pomak:

$$(u)_{r=r_1} = \frac{1-2\nu}{E} \cdot \sigma_x \cdot r_1 + \frac{1+\nu}{E} \cdot \frac{(p_1 - p_2) \cdot r_1^2 \cdot r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} \cdot \frac{1}{r_1} = \frac{r_1}{E} \cdot \left[(1-2\nu) \cdot \sigma_x + (1+\nu) \cdot \frac{(p_1 - p_2) \cdot r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} \right],$$

a za točke na vanjskoj površini zatvorene debelostjene posude, radijalni je pomak:

$$(u)_{r=r_2} = \frac{1-2\nu}{E} \cdot \sigma_x \cdot r_2 + \frac{1+\nu}{E} \cdot \frac{(p_1 - p_2) \cdot r_1^2 \cdot r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} \cdot \frac{1}{r_2} = \frac{r_2}{E} \cdot \left[(1-2\nu) \cdot \sigma_x + (1+\nu) \cdot \frac{(p_1 - p_2) \cdot r_1^2}{r_2^2 - r_1^2} \right].$$

Kod **otvorene** debelostjene posude je uzdužno naprezanje $\sigma_x = 0$, te otpada posljednji član u izrazu (31).

Izrazi (25), (26) i (31) poznati su u literaturi pod imenom **Lamé-ove formule**.

Ovi izrazi za deformacije i naprezanja σ_r , σ_φ i σ_x vrijede samo u presjecima dovoljno udaljenim od dna (tzv. danca) zatvorene debelostjene posude. U blizini dna posude su izrazi za deformacije i naprezanja σ_r , σ_φ i σ_x znatno složeniji, te se kod proračuna rabe analitičke metode Teorije elastičnosti ili numeričke metode, npr. metoda konačnih elemenata, uz uporabu računala.

U inženjerskoj praksi su debelostjene posude (debele cijevi) najčešće opterećene ili samo unutarnjim tlakom $\boldsymbol{p_1}$ ili samo vanjskim tlakom $\boldsymbol{p_2}$.

Kod opterećenja cijevi istodobno s unutarnjim tlakom $\boldsymbol{p_1}$ i s vanjskim tlakom $\boldsymbol{p_2}$, naprezanja i deformacije debele cijevi mogu se odrediti primjenom *principa superpozicije*, tj. komponente naprezanja i pomaka određuju se posebno za unutarnji tlak $\boldsymbol{p_1}$ i za vanjski tlak $\boldsymbol{p_2}$, a konačni rezultati dobivaju se zbrajanjem pripadajućih komponenti naprezanja odnosno pomaka.

Numerički primjeri dani su u riješenim zadacima iz ovog područja.

