ENERGIJSKI TEOREMI /nastavak/

Castiglianovi poučci (teoremi)

Kod linearno-elastičnog tijela i mirnog (statičkog) opterećenja, rad vanjskih sila W u cijelosti se pretvara u energiju elastičnog deformiranja U, tj. vrijedi:

$$W = U = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(Q_i \cdot q_i).$$

Energija deformiranja je funkcija poopćenih sila i poopćenih pomaka, koji se pomoću uplivnih koeficijenata mogu izraziti u obliku:

$$q_i = \sum_{j=1}^{n}(\alpha_{ij}Q_j),$$ te slijedi izraz: $$\boxed{U = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n}(\alpha_{ij}Q_i Q_j)\right)}.$$

Deriviranjem tog izraza po poopćenoj sili Q_i te uz činjenicu da je $\alpha_{ij} = \alpha_{ji}$ slijedi:

$$\frac{\partial U}{\partial Q_i} = \alpha_{i1}Q_1 + \alpha_{i2}Q_2 + \ldots \alpha_{ii}Q_i + \ldots \alpha_{in}Q_n = q_i .$$

Taj je izraz *drugi Castiglianov poučak* (*teorem*, 1873.).

Kod linearno-elastičnog tijela može se izraz za energiju elastičnog deformiranja U izraziti samo pomoću poopćenih pomaka u obliku:

$$\boxed{U = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n}(k_{ij}q_i q_j)\right)}.$$

Deriviranjem tog izraza po poopćenom pomaku q_i te uz činjenicu da je $k_{ij} = k_{ji}$ slijedi:

$$\frac{\partial U}{\partial q_i} = k_{i1}q_1 + k_{i2}q_2 + \ldots k_{ii}q_i + \ldots k_{in}q_n = Q_i .$$

Taj je izraz *prvi Castiglianov poučak* (*teorem*).

Prema tome za linearno-elastično tijelo i mirno (statičko) opterećenje vrijede sljedeći **energijski poučci** (Castiglianovi teoremi):

Prvi Castiglianov poučak glasi: parcijalna derivacija energije deformiranja po poopćenom pomaku q_i jednaka je poopćenoj sili Q_i:

$$\boxed{\frac{\partial U}{\partial q_i} = Q_i}.$$

Taj izraz može se rastaviti na dijelove:

$$\boxed{\frac{\partial U}{\partial \delta_i} = F_i} \quad \text{i} \quad \boxed{\frac{\partial U}{\partial \alpha_i} = M_i},$$

gdje je δ_i pomak u smjeru sile F_i, a α_i kutni zakret oko iste osi oko koje djeluje spreg M_i.

Drugi Castiglianov poučak glasi: parcijalna derivacija energije deformiranja po poopćenoj sili Q_i jednaka je poopćenom pomaku q_i:

$$\boxed{\frac{\partial U}{\partial Q_i} = q_i}.$$

Ako je poopćena sila Q_i sila u užem smislu riječi, tada je poopćeni pomak q_i linearni ili dužinski pomak na mjestu i na pravcu djelovanja te sile, tj.:

$$\boxed{\frac{\partial U}{\partial F_i} = \delta_i}.$$

Ako je poopćena sila Q_i spreg, onda je poopćeni pomak q_i kutni zakret oko iste osi oko koje djeluje spreg, tj.:

$$\boxed{\frac{\partial U}{\partial \mathcal{M}_i} = \alpha_i}.$$

Primjena drugog Castiglianovog poučka – određivanje pomaka i kutnog zakreta u točki i opterećenog štapa nekog nosača, gdje l označuje konturu nosača:

- osno opterećenje štapa: $N = N(x)$, $A = A(x) \Rightarrow$ dužinski pomak na mjestu sile F_i jest:

$$\boxed{\delta_i = \frac{\partial U}{\partial F_i} = \frac{\partial}{\partial F_i}\left(\frac{1}{2}\int_l \frac{N^2 \mathrm{d}x}{EA}\right) = \int_l \frac{N}{EA} \cdot \frac{\partial N}{\partial F_i} \mathrm{d}x},$$

- uvijanje okruglog štapa: $T = M_x(x)$, $I_\mathrm{p} = I_\mathrm{p}(x) \Rightarrow$ kutni zakret na mjestu sprega $\mathcal{M}_i$ jest:

$$\boxed{\alpha_i = \frac{\partial U}{\partial \mathcal{M}_i} = \frac{\partial}{\partial \mathcal{M}_i}\left(\frac{1}{2}\int_l \frac{T^2 \mathrm{d}x}{GI_\mathrm{p}}\right) = \int_l \frac{T}{GI_\mathrm{p}} \cdot \frac{\partial T}{\partial \mathcal{M}_i} \mathrm{d}x},$$

- **savijanje štapa u ravnini** $(0xz)$, utjecaj osnih i poprečnih sila se zanemaruje: $M_\mathrm{b} = M_y(x)$, $I_y = I_y(x)$, gdje x označuje presjek na štapu nosača, a kod izračunavanja treba obići čitavu konturu nosača l,

a) **dužinski pomak** na mjestu sile F_i jest:

$$\boxed{\delta_i = \frac{\partial U}{\partial F_i} = \frac{\partial}{\partial F_i}\left(\frac{1}{2}\int_l \frac{M_\mathrm{b}^2 \mathrm{d}x}{EI_y}\right) = \int_l \frac{M_\mathrm{b}}{EI_y} \cdot \frac{\partial M_\mathrm{b}}{\partial F_i} \mathrm{d}x},$$

b) **kutni zakret** na mjestu sprega $\mathcal{M}_i$ jest:

$$\boxed{\alpha_i = \frac{\partial U}{\partial \mathcal{M}_i} = \frac{\partial}{\partial \mathcal{M}_i}\left(\frac{1}{2}\int_l \frac{M_\mathrm{b}^2 \mathrm{d}x}{EI_y}\right) = \int_l \frac{M_\mathrm{b}}{EI_y} \cdot \frac{\partial M_\mathrm{b}}{\partial \mathcal{M}_i} \mathrm{d}x}.$$

Ako se traži pomak točke štapa u kojoj ne djeluje vanjska zadana sila, mora se dodati pomoćna sila $F_0 = 0$ da bi se odredio progib u njenom smjeru. Isto vrijedi i za kutni zakret, gdje se dodaje pomoćni moment savijanja $M_0 = 0$ da bi se odredio kutni zakret štapa na tom mjestu:

$$\boxed{\delta_i = \frac{\partial U}{\partial F_0}\bigg|_{F_0=0} = \int_l \frac{M_\mathrm{b}}{EI_y} \cdot \frac{\partial M_\mathrm{b}}{\partial F_0} \mathrm{d}x}, \qquad \boxed{\alpha_i = \frac{\partial U}{\partial M_0}\bigg|_{M_0=0} = \int_l \frac{M_\mathrm{b}}{EI_y} \cdot \frac{\partial M_\mathrm{b}}{\partial M_0} \mathrm{d}x}.$$

Za štap konstantne fleksijske krutosti, tj. $EI_y = \mathrm{konst.}$ pomaci ili kutni zakreti su:

$$\boxed{\delta_i = \frac{\partial U}{\partial F_0}\bigg|_{F_0=0} = \frac{1}{EI_y}\int_l M_\mathrm{b} \cdot \frac{\partial M_\mathrm{b}}{\partial F_0} \mathrm{d}x}, \qquad \boxed{\alpha_i = \frac{\partial U}{\partial M_0}\bigg|_{M_0=0} = \frac{1}{EI_y}\int_l M_\mathrm{b} \cdot \frac{\partial M_\mathrm{b}}{\partial M_0} \mathrm{d}x}.$$

Primjena ovih izraza pokazana je na primjerima određivanja deformacija statički određenih i neodređenih okvirnih ravninskih, ravninsko-prostornih i prostornih nosača.