

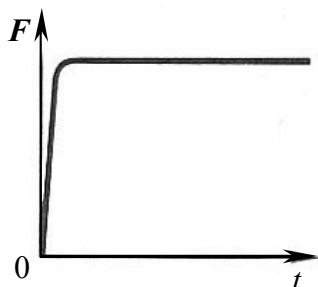
ENERGIJA DEFORMIRANJA ŠTAPA

Ponoviti iz predmeta "[ČVRSTOĆA I](#)":

- Energija deformiranja linearno-elastičnog tijela, osnovni pojmovi i definicije.
- Gustoća energije deformiranja: dilatacijska i distorzijaska energija.

U predmetu "[ČVRSTOĆA II](#)" razmatraju se:

- samo *linearno-elastične konstrukcije*, tj. takve kod kojih pomaci linearno ovise o silama, a nakon rasterećenja konstrukcija se potpuno vraća u prvobitni oblik
- konstrukcije su izrađene od *linearno-elastičnih materijala*



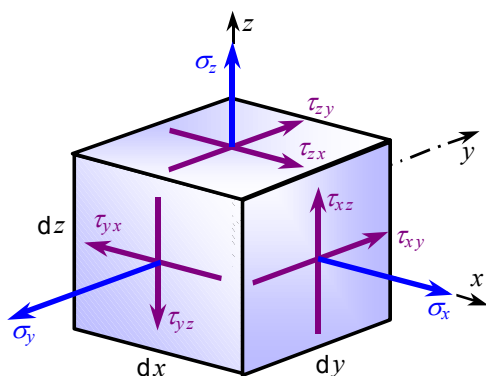
- konstrukcije su podvrgnute *mirnim* ili *statičkim opterećenjima* (slika), tj. nema prirasta kinetičke energije ($\Delta E_k = 0$) i nema izmjene topline s okolinom ($Q = 0$).

Čitav rad vanjskih sila (W_e) troši se na povećanje unutarnje energije U koja se tada naziva *energija deformiranja tijela*:

$$W_e = U.$$

Energija deformiranja kod općeg primjera napreznja opterećenog tijela

Razmatranje se provodi na elementu tijela obujma $dV = dx \cdot dy \cdot dz$, slika, čija je energija deformiranja, uz primjenu principa superpozicije za linearno-elastično tijelo:



Element tijela dV

$$dW_e = dU = \frac{1}{2} (\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \dots + \tau_{zx} \gamma_{zx}) dV,$$

a energija deformiranja po jedinici obujma tijela jest *gustoća energije deformiranja*:

$$U_0 = \frac{dU}{dV} = \frac{1}{2} (\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \sigma_z \varepsilon_z + \tau_{xy} \gamma_{xy} + \tau_{yz} \gamma_{yz} + \tau_{zx} \gamma_{zx}).$$

U primjeru glavnih napreznja i glavnih deformacija gustoća energije deformiranja tijela jest:

$$U_0 = \frac{1}{2} (\sigma_1 \varepsilon_1 + \sigma_2 \varepsilon_2 + \sigma_3 \varepsilon_3), \text{ J/m}^3.$$

Uz uporabu Hookeovog zakona gustoća energije deformiranja može se izraziti kao funkcija napreznja na elementu tijela:

$$U_0 = \frac{1}{2E} (\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2) - \frac{\nu}{E} (\sigma_x \sigma_y + \sigma_y \sigma_z + \sigma_z \sigma_x) + \frac{1}{2G} (\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2), \text{ J/m}^3.$$

Energija deformiranja za linearno-elastično tijelo obujma V jest:

$$U = \int_V U_0 dV, \text{ J}.$$

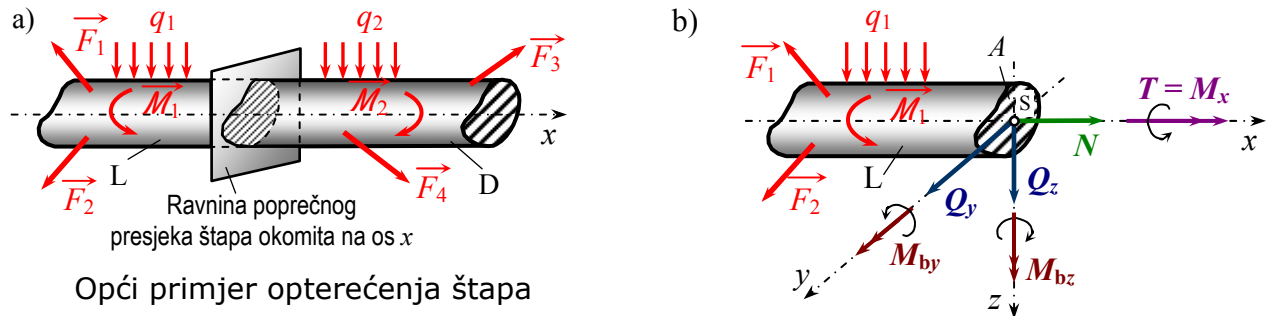
Unutarnje sile u poprečnom presjeku opterećenog štapa

Kod općeg primjera opterećenja štapa sve vanjske sile (sile i spregovi sila) moraju biti u statičkoj ravnoteži, tj. rezultanta i rezultirajući moment svih vanjskih sila jednaki su nuli, slika a). U koordinatnom sustavu $0xyz$, uzdužna os štapa podudara se s osi x , a osi y i z su osi u površini poprečnog presjeka štapa (presjek okomit na uzdužnu os x štapa), slika b).

Komponente unutarnje sile u poprečnom presjeku štapa u ravnoteži su s rezultantom vanjskih sila na dijelu štapa do tog presjeka, slika b) i označavaju se s:

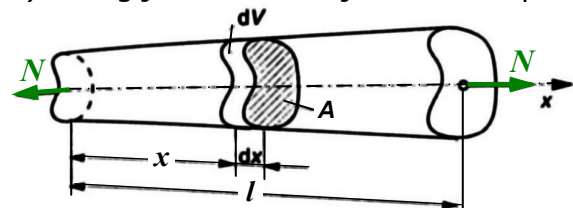
- $N \rightarrow$ **normalna** ili **uzdužna sila** (osna ili aksijalna sila), izaziva rastezanje ili sabijanje u pravcu uzdužne osi x štapa,
- Q_y i $Q_z \rightarrow$ **poprečne sile** u pravcu težišnih osi y i z površine poprečnog presjeka štapa, izazivaju smicanje u ravnini poprečnog presjeka,
- $T = M_x \rightarrow$ **moment uvijanja** ili **torzije**, izaziva uvijanje oko uzdužne osi x štapa,
- $M_{b,y}$ i $M_{b,z} \rightarrow$ **momenti savijanja** oko težišnih osi y i z površine poprečnog presjeka štapa.

Na slici b) su sve komponente unutarnje sile u poprečnom presjeku štapa pozitivne.



Energija deformiranja kod osnovnih primjera opterećenja štapa

a) Energija deformiranja za osno opterećenje ravnog štapa (slika a):



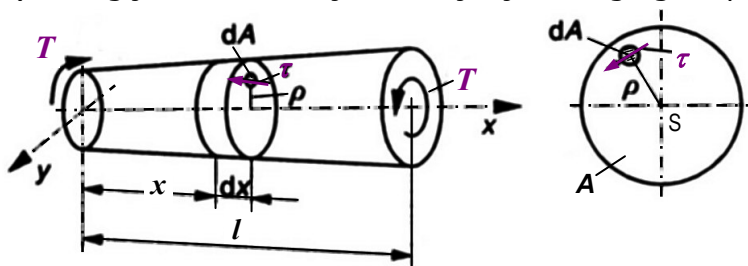
a) Osno opterećen ravnog štapa

$$U = \int_V U_o dV = \frac{1}{2} \int_l \left(\int_A \frac{\sigma_x^2}{2E} dA \right) dx = \frac{1}{2} \int_l \frac{N^2(x)}{EA(x)} dx, \quad J,$$

a za osnu krutost štapa $EA = \text{konst.}$:

$$U = \frac{1}{2EA} \int_l N^2(x) dx, \quad J.$$

b) Energija deformiranja za uvijanje okruglog štapa (slika b):



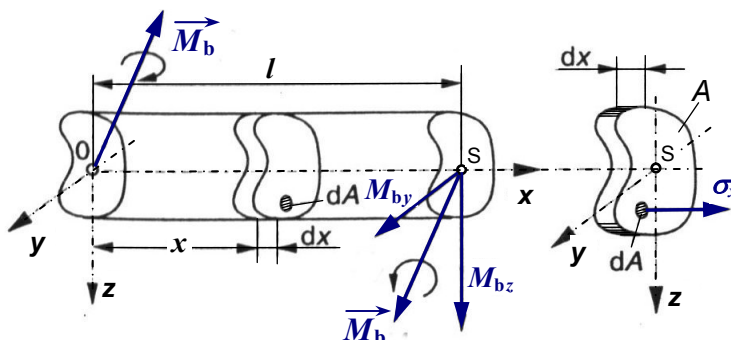
b) Uvijanje štapa kružnog poprečnog presjeka

$$U = \int_V U_o dV = \frac{1}{2} \int_l \frac{T^2(x)}{GI_p(x)} dx, \quad J,$$

a za torzijsku krutost $GI_p = \text{konst.}$:

$$U = \frac{1}{2GI_p} \int_l T^2(x) dx, \quad J.$$

c) Energija deformiranja za čisto savijanje štapa u dvjema okomitim ravninama ($0xz$) i ($0xy$), tj. *koso savijanje štapa*, gdje su težišne osi y i z glavne osi drugog momenta površine ("momenti tromosti" ili "momenti inercije") poprečnog presjeka, slika c):



c) Čisto savijanje štapa

$$U = \frac{1}{2} \int_l \left(\frac{M_{b,y}^2(x)}{EI_y(x)} + \frac{M_{b,z}^2(x)}{EI_z(x)} \right) dx, \quad J,$$

a za homogen štapa $E = \text{konst.}$ i konstantnog poprečnog presjeka:

$$U = \frac{1}{2EI_y} \int_l M_{b,y}^2(x) dx + \frac{1}{2EI_z} \int_l M_{b,z}^2(x) dx, \quad J.$$

Energija deformiranja za poprečno savijanje ravnog štapa (savijanje silama), npr. u glavnoj ravnini ($0xz$) konstantne površine poprečnog presjeka:

$$U = \frac{1}{2} \int_l \left(\frac{M_{by}^2(x)}{EI_y} + \frac{Q_z^2(x)}{GA} k_z \right) dx, \quad J,$$

gdje je faktor k_z ovisan o obliku površine poprečnog presjeka štapa i određen je

izrazom:

$$k_z = \frac{A}{I_y^2} \int_A \left(\frac{S_y^*}{b(z)} \right)^2 dA,$$

gdje je $S_y^* = \int_A z dA$ → statički moment površine A obzirom na težišnu os y poprečnog presjeka štapa. Izrazi za izračunavanje vrijednosti S_y^* dani su kod izvoda za posmično naprezanje τ_{xz} kod poprečnog savijanja, u predmetu "[ČVRSTOĆA I](#)".

U literaturi su dani izrazi i vrijednosti faktora k_z za različite poprečne presjeke štapa:

- puni pravokutni presjek: $k_y = k_z = 6/5 = 1,2$,
- puni kružni presjek: $k_y = k_z = 10/9$,
- tankostjeni prstenasti kružni presjek: $k_y = k_z = 2$,
- standardni profili s dva pojasnika (I, U, Z): $k_z \approx A/A_r$, gdje je A ukupna ploština površine i $A_r \approx s \cdot h$ ploština površine rebra profila. Vrijednosti faktora su: $k_z \approx 2,1 \div 2,5$.

d) **Energija deformiranja za opći primjer opterećenja ravnog štapa** – primjena metode superpozicije:

$$U = \frac{1}{2} \int_l \left(\frac{N^2(x)}{EA(x)} + \frac{Q_z^2(x)}{GA(x)} k_z + \frac{Q_y^2(x)}{GA(x)} k_y + \frac{T^2(x)}{GI_p(x)} + \frac{M_{by}^2(x)}{EI_y(x)} + \frac{M_{bz}^2(x)}{EI_z(x)} \right) dx, \quad J.$$

U praksi su štapovi neke konstrukcije najčešće konstantnog poprečnog presjeka te je tada izraz za određivanje energije deformiranja ravnog štapa duljine l :

$$U = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{EA_0} \int_0^l N^2(x) dx + \frac{k_z}{GA_0} \int_0^l Q_z^2(x) dx + \frac{k_y}{GA_0} \int_0^l Q_y^2(x) dx + \frac{1}{GI_{p0}} \int_0^l T^2(x) dx + \frac{1}{EI_{y0}} \int_0^l M_{by}^2(x) dx + \frac{1}{EI_{z0}} \int_0^l M_{bz}^2(x) dx \right]$$

Ako je konstrukcija sastavljena od n ravnih štapova od istog ili od različitih materijala, energija deformiranja konstrukcije određena je zbrojem energija deformiranja svih njenih pojedinih štapova:

$$U = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \left[\int_{l_i} \left(\frac{N^2(x_i)}{E_i A(x_i)} + \frac{Q_z^2(x_i)}{G_i A(x_i)} k_z + \frac{Q_y^2(x_i)}{G_i A(x_i)} k_y + \frac{T^2(x_i)}{G_i I_p(x_i)} + \frac{M_{by}^2(x_i)}{E_i I_y(x_i)} + \frac{M_{bz}^2(x_i)}{E_i I_z(x_i)} \right) dx_i \right], \quad J.$$

Ako je konstrukcija sastavljena od n zakrivljenih tankih štapova ($h_i/R_i \leq 1/10$) od istog ili od različitih materijala, energija deformiranja konstrukcije određena je zbrojem energija deformiranja svih pojedinih štapova (za kružno zakrivljeni štap $ds = R d\varphi$):

$$U = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \left[\int_{s_i} \left(\frac{N^2(s_i)}{E_i A(s_i)} + \frac{Q_z^2(s_i)}{G_i A(s_i)} k_z + \frac{Q_y^2(s_i)}{G_i A(s_i)} k_y + \frac{T^2(s_i)}{G_i I_p(s_i)} + \frac{M_{by}^2(s_i)}{E_i I_y(s_i)} + \frac{M_{bz}^2(s_i)}{E_i I_z(s_i)} \right) ds_i \right], \quad J.$$

U proračunima štapnih konstrukcija se energije deformiranja od smicanja, a često i od osnovnog opterećenja, zanemaruju zbog zanemarivih vrijednosti u usporedbi s iznosima energija deformiranja od savijanja i uvijanja štapa, kako je pokazano u primjerima.

Kod proračuna deformacija ravninskih nosača uzima se samo energija deformiranja dijelova nosača od savijanja, a kod ravninsko-prostornih nosača energije deformiranja od savijanja i uvijanja.

Kod proračuna deformacija rešetkastih nosača uzima se samo energija deformiranja štapova nosača od rastezanja ili sabijanja osnim silama u štapovima (računa se da su štapovi spojeni sa zglobovima!).

[Primjeri](#) izračunavanja energije deformiranja različitih štapnih konstrukcija dani su u poglavlju "Riješeni zadaci_Čvrstoća 2/1-Energijske metode/Energija deformiranja".

U svim primjerima i zadacima kod štapnih konstrukcija, na slici nosača crtkanom linijom označena je kontura nosača tako da su momenti savijanja pozitivni ako on izaziva u krajnjim vlaknima presjeka rastezanje (vlačna naprezanja).