

# MALA ZBIRKA ZADATAKA IZ VJEROJATNOSTI I STATISTIKE

ZLATKO PAVIĆ

SAŽETAK. Zbirka nudi zadatke iz Kombinatorike, Elementarne teorije vjerojatnosti, Statističke obrade uzoraka i Slučajnih varijabli.

## 1. KOMBINATORIKA

Služeći se osnovnim kombinatoričkim pravilom o uzastopnom prebrojavanju riješi zadatke

**Zadatak 1.** *Ispiši sve uređene parove ako je prvi član para slovo  $A$ ,  $B$  ili  $C$ , a drugi član para slovo  $A$  ili  $B$ .*

**Zadatak 2.** *Ispiši sve uređene trojke ako je prvi član trojke slovo  $B$  ili  $C$ , drugi član trojke slovo  $A$ ,  $B$  ili  $C$ , a treći član trojke slovo  $B$  ili  $D$ .*

**Zadatak 3.** *Ispiši sve uređene trojke koje sadrže bar jedno od slova  $A$  ili  $B$ .*

**Zadatak 4.** *Na koliko se načina može serijski sastaviti uređaj koji ima četiri različite komponente  $A$ ,  $B$ ,  $C$  i  $D$ ?*

**Zadatak 5.** *Na koliko se načina može serijski sastaviti četverokomponentni sklop koji počinje komponentama  $A$  ili  $B$ , dvije srednje komponente su mu  $A$ ,  $B$  ili  $C$ , a završava komponentama  $B$  ili  $C$ ?*

**Zadatak 6.** *Na koliko se načina može serijski sastaviti peterokomponentni sklop koji sadrži bar jednu od komponenti  $A$ ,  $B$  ili  $C$ ?*

**Zadatak 7.** *Koliko ima četveroznamenastih brojeva koji počinju s 25?*

**Zadatak 8.** *Koliko ima šesteroznamenastih brojeva koji završavaju s 88?*

**Zadatak 9.** *Koliko ima peteroznamenastih brojeva sa srednjom znamenkom 3?*

**Zadatak 10.** *Koliko se troznamenastih brojeva može sastaviti od znamenki 1, 3, 5 ili 7? Koliko takvih brojeva počinje znamenkom 5?*

**Zadatak 11.** *Koliko ima četveroznamenkastih brojeva koji sadrže različite znamenke 1, 2, 3, 7, 8 ili 9? Koliko takvih brojeva završava znamenkom 8?*

**Zadatak 12.** *Koliko se troznamenkastih brojeva može sastaviti od znamenki 3, 2, 1 ili 0?*

**Zadatak 13.** *Koliko se četveroznamenkastih brojeva može sastaviti od znamenki 4, 6, 8 ili 9? Koliko je među njima neparnih, a koliko parnih?*

Služeći se osnovnim kombinatoričkim vrstama riješi zadatke

**Zadatak 14.** *Ispiši sve uređene dvojke koje sadrže bar jedno od slova A, B ili C. Kojoj kombinatoričkoj vrsti pripadaju te trojke? Zapiši njihovu kombinatoričku oznaku.*

**Zadatak 15.** *Ispiši sve uređene dvojke koje sadrže različita slova A, B ili C. Kojoj kombinatoričkoj vrsti pripadaju te dvojke? Zapiši njihovu kombinatoričku oznaku.*

**Zadatak 16.** *Ispiši sve uređene petorke sastavljene od dva slova A i tri slova B. Kojoj kombinatoričkoj vrsti pripadaju te petorke? Zapiši njihovu kombinatoričku oznaku.*

**Zadatak 17.** *Ispiši sve uređene trojke sastavljene od različitih slova A, B i C. Kojoj kombinatoričkoj vrsti pripadaju te trojke? Zapiši njihovu kombinatoričku oznaku.*

**Zadatak 18.** *Ispiši sve neuređene četvorke koje sadrže bar jedno od slova A ili B. Kojoj kombinatoričkoj vrsti pripadaju te četvorke? Zapiši njihovu kombinatoričku oznaku.*

**Zadatak 19.** *Ispiši sve neuređene trojke koje sadrže različita slova A, B, C ili D. Kojoj kombinatoričkoj vrsti pripadaju te trojke? Zapiši njihovu kombinatoričku oznaku.*

**Zadatak 20.** *Na koliko je načina moguće ispuniti listić sportske prognoze koji ima 13 parova?*

**Zadatak 21.** *Na koliko se načina može serijski sastaviti uređaj koji ima pet različitih komponenata A, B, C, D i E?*

**Zadatak 22.** *Na koliko je načina moguće iza lokomotive poredati 4 putnička, 2 spavaća i 3 teretna vagona?*

**Zadatak 23.** *Na koliko se načina može serijski sastaviti uređaj koji ima dvije komponente A, tri komponente B i jednu komponentu C?*

**Zadatak 24.** *U nekoj čekaonici sjedi 6 ljudi. Na koliko se načina može napraviti redosljed prozivanja?*

**Zadatak 25.** *Ispiši sve uređene trojke koje sadrže bar jedno slovo A i bar jedno slovo B. Pripadaju li te trojke nekoj kombinatoričkoj vrsti?*

**Zadatak 26.** *Na koliko se načina mogu ubaciti 4 kuglice u 6 kutija, uz zahtjev da se u kutije ne ubacuje više od 1 kuglice? Koliko je različitih mogućnosti bez dodatnog zahtjeva?*

**Zadatak 27.** *Na koliko se načina mogu poredati u niz pet 0 i sedam 1? Koliko je različitih nizova uz zahtjev da dvije 0 ne budu jedna pored druge?*

**Zadatak 28.** *Slastičarnicia nudi sedam vrsta kolača. Na koliko se načina mogu kupiti četiri različita kolača? Na koliko se načina mogu kupiti bilo koja četiri kolača?*

**Zadatak 29.** *Na koliko se načina može kupiti pet kolača u slastičarnici koja nudi tri vrste kolača?*

**Zadatak 30.** *Na koliko je načina moguće izvući šestorku brojeva u igri na sreću "Loto" od 45 brojeva?*

**Zadatak 31.** *Na koliko se načina može sastaviti mješovita peteročlana odbojkaška ekipa u kojoj su dvije žene i tri muškarca, ako su na klupi četiri žene i šest muškaraca?*

**Zadatak 32.** *U skladištu se nalazi 7 dobrih i 6 loših proizvoda. Na koliko je načina moguće odabrati 5 proizvoda među kojima su 2 loša?*

**Zadatak 33.** *U skladištu se nalazi  $n$  proizvoda među kojima je  $l$  loših. Na koliko je načina moguće odabrati  $k$  proizvoda među kojima je  $m$  loših?*

**Zadatak 34.** *Koliko se različitih trokugličnih ogrlica može sastaviti od tri istovrsne raznobojne kuglice (ogrlice se promatraju u prostoru)? Na koliko se različitih načina mogu nositi sve te ogrlice (ogrlice se promatraju u ravnini)?*

**Zadatak 35.** *Koliko se različitih četverokugličnih ogrlica može sastaviti od četiri istovrsne raznobojne kuglice (ogrlice se promatraju u prostoru)? Na koliko se različitih načina mogu nositi sve te ogrlice (ogrlice se promatraju u ravnini)?*

**Zadatak 36.** *Koliko je različitih šestoznamenkastih telefonskih brojeva moguće sastaviti od znamenki 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 ili 9?*

**Zadatak 37.** *Mobitelski broj je sastavljen od troznamenkastog predbroja i šestoznamenkastog dobroja. Koliko može biti takvih devetoznamenkastih mobitelskih brojeva, ako predbroj čine znamenke 0, 7, 8 ili 9, a dobroj znamenke 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 ili 9?*

**Zadatak 38.** *Koliko lozinki s četiri različita znaka možemo sastaviti ako raspoložemo s 10 različitih znakova?*

**Zadatak 39.** *Državna željeznica ima 30 kolodvora. Koliko ta željeznica ima različitih jednosmjernih vozničkih karata?*

**Zadatak 40.** *Koliko željezničkih kolodvora ima državna željeznica koja prodaje 1640 različitih jednosmjernih vozničkih karata?*

**Zadatak 41.** *Pri sastavljanju peteroznačne lozinke raspoložemo s 8 različitih znakova. Koliko lozinki možemo sastaviti ako se znakovi smiju ponavljati? Koliko lozinki možemo sastaviti ako svi znakovi u lozinci moraju biti različiti? Koliko lozinki možemo sastaviti ako četiri znaka u lozinci moraju biti različita?*

**Zadatak 42.** *Lozinka ima dva različita broja i tri slova. Brojevi mogu biti 1, 2, 3 ili 4, a slova A ili B. Koliko ima takvih lozinki?*

## 2. ELEMENTARNA TEORIJA VJEROJATNOSTI

Služeći se elementarnom definicijom vjerojatnosti riješi zadatke

**Zadatak 43.** *Kolika je vjerojatnost da se prilikom bacanja kocke pojavi neparan broj?*

**Zadatak 44.** *Kolika je vjerojatnost da se prilikom dvostrukog bacanja kocke pojave brojevi veći od 3?*

**Zadatak 45.** *Kolika je vjerojatnost da se prilikom dvostrukog bacanja kocke pojavi broj 1?*

**Zadatak 46.** *Kolika je vjerojatnost da se prilikom dvostrukog bacanja kocke pojave brojevi 1 ili 6?*

**Zadatak 47.** *Kolika je vjerojatnost da se prilikom trostrukog bacanja kocke ne pojavi ni jedan paran broj?*

**Zadatak 48.** *Kolika je vjerojatnost da se prilikom dvostrukog bacanja kocke pojavi zbroj 7?*

**Zadatak 49.** *Kolika je vjerojatnost da se prilikom dvostrukog bacanja kocke pojavi zbroj 8?*

- Zadatak 50.** *Kolika je vjerojatnost da se prilikom dvostrukog bacanja kocke pojavi zbroj 7 ili 8?*
- Zadatak 51.** *Kolika je vjerojatnost da se prilikom trostrukog bacanja kocke pojavi zbroj 12 u kojem ne sudjeluje ni jedna petica?*
- Zadatak 52.** *Kolika je vjerojatnost da se prilikom trostrukog bacanja kocke pojavi zbroj 12 u kojem sudjeluje bar jedna petica?*
- Zadatak 53.** *Kolika je vjerojatnost da se prilikom dvostrukog bacanja kocke pojavi neparan zbroj?*
- Zadatak 54.** *Kolika je vjerojatnost da se prilikom dvostrukog bacanja kocke pojavi zbroj veći od 7?*
- Zadatak 55.** *Kolika je vjerojatnost da se prilikom trostrukog bacanja kocke pojave dvije šestice?*
- Zadatak 56.** *Treba li se kladiti na događaj: "Pojava bar jedne šestice prilikom trostrukog bacanja kocke"?*
- Zadatak 57.** *Kolika je vjerojatnost da se prilikom trostrukog bacanja kocke pojavi najmanji ili najveći zbroj?*
- Zadatak 58.** *Kolika je vjerojatnost da se prilikom trostrukog bacanja kocke pojavi zbroj 13?*
- Zadatak 59.** *Kolika je vjerojatnost da se prilikom trostrukog bacanja kocke pojavi zbroj 13 u kojem ne sudjeluje trojka?*
- Zadatak 60.** *Kolika je vjerojatnost da se prilikom trostrukog bacanja kocke pojavi zbroj veći od 10 u kojem sudjeluje bar jedna trojka?*
- Zadatak 61.** *Kolika je vjerojatnost da se prilikom trostrukog bacanja kocke u drugom bacanju dobije broj jednak zbroju dobivenom u prvom i trećem bacanju?*
- Zadatak 62.** *Kolika je vjerojatnost da se prilikom trostrukog bacanja kocke u trećem bacanju dobije broj veći od zbroja dobivenog u prva dva bacanja?*
- Zadatak 63.** *Kolika je vjerojatnost da se prilikom trostrukog bacanja kocke u prvom bacanju dobije broj manji od zbroja dobivenog u preostala dva bacanja?*
- Zadatak 64.** *Igra počinje bacanjem kocke, a završava kad se šestica pojavi drugi put. Kolika je vjerojatnost da se igra završi u četvrtom bacanju? Kolika je vjerojatnost da se igra završi u prva četiri bacanja (prvom, drugom, trećem ili četvrtom)?*

**Zadatak 65.** U kutiji su 4 bijele, 5 plavih i 8 crnih kuglica. Iz kutije izvlačimo jednu kuglicu. Kolika je vjerojatnost da ćemo izvući plavu? Kolika je vjerojatnost da nećemo izvući crnu?

**Zadatak 66.** U kutiji su 3 bijele i 10 crnih kuglica. Iz kutije izvlačimo dvije kuglice odjednom. Kolika je vjerojatnost da ćemo izvući obje bijele?

**Zadatak 67.** U kutiji su 3 bijele i 10 crnih kuglica. Iz kutije izvlačimo dvije kuglice jednu po jednu bez vraćanja. Kolika je vjerojatnost da ćemo izvući obje bijele?

**Zadatak 68.** U kutiji su 3 bijele i 10 crnih kuglica. Iz kutije izvlačimo dvije kuglice jednu po jednu s vraćanjem. Kolika je vjerojatnost da ćemo izvući obje bijele?

**Zadatak 69.** U kutiji se nalazi 5 bijelih, 8 plavih i 7 crnih kuglica. Iz kutije izvlačimo tri kuglice odjednom. Kolika je vjerojatnost da ćemo izvući sve tri crne? Kolika je vjerojatnost da ćemo izvući sve tri kuglice različitih boja?

**Zadatak 70.** U kutiji se nalazi 5 bijelih, 8 plavih i 7 crnih kuglica. Iz kutije izvlačimo tri kuglice jednu po jednu s vraćanjem. Kolika je vjerojatnost da ćemo izvući sve tri crne? Kolika je vjerojatnost da ćemo izvući sve tri kuglice različitih boja?

**Zadatak 71.** U kutiji se nalazi 5 bijelih, 8 plavih i 7 crnih kuglica. Iz kutije izvlačimo tri kuglice jednu po jednu bez vraćanja. Kolika je vjerojatnost da ćemo izvući crnu kuglicu u trećem izvlačenju? Kolika je vjerojatnost da ćemo izvući sve tri kuglice različitih boja?

**Zadatak 72.** U kutiji su 4 bijele i 6 crnih kuglica. Iz kutije izvlačimo tri kuglice jednu po jednu bez vraćanja. Kolika je vjerojatnost da ćemo izvući kuglice različitih boja?

**Zadatak 73.** U skladištu se nalazi 7 dobrih i 6 loših proizvoda. Kolika je vjerojatnost da među 5 slučajno odabranih proizvoda budu 2 loša proizvoda?

**Zadatak 74.** U skladištu se nalazi  $n$  proizvoda među kojima je  $l$  loših. Kolika je vjerojatnost da među  $k$  slučajno odabranih proizvoda bude  $m$  loših proizvoda?

**Zadatak 75.** Student dolazi na ispit znajući riješiti 15 od ukupno 20 zadataka. Ispit sadrži 5 zadataka. Kolika je vjerojatnost da će student riješiti svih 5 zadataka? Kolika je vjerojatnost da će student riješiti 2 zadatka? Kolika je vjerojatnost da će student riješiti bar 2 zadatka?

**Zadatak 76.** *U vlak s 5 putničkih vagona ulazi 7 putnika. Kolika je vjerojatnost da u zadnji vagon uđu 3 putnika? Kolika je vjerojatnost da u prvi vagon uđu 4 putnika, u drugi vagon 2 putnika, a u treći vagon 1 putnik?*

Pomoću formula za računanje "uvjetne", "potpune" i "Bayesove" vjerojatnosti riješi zadatke

**Zadatak 77.** *Nakon dvostrukog bacanja kocke dobiven je zbroj 10. Kolika je vjerojatnost da se je pojavio broj 6? Kolika je vjerojatnost da se je pojavio broj 5?*

**Zadatak 78.** *Prilikom dvostrukog bacanja kocke pojavio se je broj 2. Kolika je vjerojatnost da je dobiven zbroj 6? Kolika je vjerojatnost da je dobiven zbroj 4?*

**Zadatak 79.** *Nakon trostrukog bacanja kocke dobiven je zbroj 15. Kolika je vjerojatnost da se je pojavio broj 6? Kolika je vjerojatnost da se je pojavio broj 5?*

**Zadatak 80.** *Prilikom trostrukog bacanja kocke pojavio se je broj 1. Kolika je vjerojatnost da je dobiven zbroj 7? Kolika je vjerojatnost da je dobiven zbroj 13?*

**Zadatak 81.** *Prilikom trostrukog bacanja kocke pojavila su se tri različita broja. Kolika je vjerojatnost da se je pojavio broj 4? Kolika je vjerojatnost da su sva tri dobivena broja manja od 4?*

**Zadatak 82.** *U prvoj kutiji su 2 bijele i 3 crne kuglice, a u drugoj kutiji je 1 bijela i 4 crne kuglice. Iz prve kutije premjestimo jednu kuglicu u drugu kutiju, a zatim iz druge kutije izvadimo jednu kuglicu. Kolika je vjerojatnost da smo iz druge kutije izvadili bijelu kuglicu? Kolika je vjerojatnost da je iz prve kutije premještena crna kuglica, ako je iz druge kutije izvučena bijela kuglica?*

**Zadatak 83.** *U prvoj kutiji je 10 bijelih, 5 plavih i 2 crne kuglice, a u drugoj kutiji je 7 bijelih, 4 plave i 3 crne kuglice. Iz prve kutije premjestimo jednu kuglicu u drugu kutiju, a zatim iz druge kutije izvadimo jednu kuglicu. Kolika je vjerojatnost da smo iz druge kutije izvadili plavu kuglicu? Kolika je vjerojatnost da je iz prve kutije premještena bijela kuglica, ako je iz druge kutije izvučena plava kuglica?*

**Zadatak 84.** *Tvorničku proizvodnju "odrađuju" strojevi  $\Omega_1$ ,  $\Omega_2$  i  $\Omega_3$  u omjeru 5 : 3 : 2. Stroj  $\Omega_1$  proizvodi 2% loših,  $\Omega_2$  proizvodi 3% loših, a  $\Omega_3$  proizvodi 4% loših proizvoda. Kolika je vjerojatnost da je slučajno odabrani proizvod iz ove tvornice dobar? Ako je slučajno*

odabrani proizvod iz ove tvornice dobar, kolika je vjerojatnost da je proizveden strojem  $\Omega_1$ ?

**Zadatak 85.** U tvornici cipela se koriste obradni strojevi  $\Omega_1$ ,  $\Omega_2$  i  $\Omega_3$ . Stroj  $\Omega_1$  obrađuje dvostruko više cipela od stroja  $\Omega_2$ , a stroj  $\Omega_2$  obrađuje trostruko više cipela od stroja  $\Omega_3$ . U obradi stroj  $\Omega_1$  postiže 40%, stroj  $\Omega_2$  postiže 60%, a stroj  $\Omega_3$  postiže 80% prvorazrednih cipela. Kolika je vjerojatnost da je slučajno odabrana cipela iz ove tvornice prvorazredna? Ako je slučajno odabrana cipela iz ove tvornice prvorazredna, kolika je vjerojatnost da je obrađena strojem  $\Omega_2$ ?

**Zadatak 86.** Uređaj ima komponentu  $A$  i komponentu  $B$  koje otkazuju neovisno jedna o drugoj. Uređaj prestaje s radom ako otkáže bar jedna od komponenti. U kritičnom radnom intervalu vjerojatnost otkazivanja komponente  $A$  iznosi 0,5 dok vjerojatnost otkazivanja komponente  $B$  iznosi 0,6. Kolika je vjerojatnost da uređaj prestane s radom u kritičnom radnom intervalu?

**Zadatak 87.** Uređaj ima komponente  $A$ ,  $B$  i  $C$  koje otkazuju neovisno jedna o drugoj. Uređaj prestaje s radom ako otkážu bar dvije komponente. U kritičnom radnom intervalu vjerojatnost otkazivanja komponente  $A$  iznosi 0,1, vjerojatnost otkazivanja komponente  $B$  iznosi 0,2, a vjerojatnost otkazivanja komponente  $C$  iznosi 0,3. Kolika je vjerojatnost da uređaj prestane s radom u kritičnom radnom intervalu?

### 3. STATISTIČKA OBRADA UZORAKA

Služeći se formulama za računanje relativnih i kumulativnih frekvencija, aritmetičke sredine, varijance i standardne devijacije riješi zadatke

**Zadatak 88.** Rezultati ispita kojem je pristupila skupina od 80 studenata su: 20 ocjena "1", 26 ocjena "2", 20 ocjena "3", 10 ocjena "4" i 4 ocjene "5".

Prikaži razdiobu ocjena numerički: izračunaj relativne i kumulativne frekvencije, aritmetičku sredinu i varijancu.

Prikaži razdiobu ocjena grafički: nacrtaj poligonske grafove relativnih i kumulativnih frekvencija.

Kolika je "vjerojatnost" da slučajno odabrani student iz te skupine ima ocjenu 4? Kolika je "vjerojatnost" da slučajno odabrani student iz te skupine ima ocjenu najmanje 4? Kolika je "vjerojatnost" da slučajno odabrani student iz te skupine ima ocjenu manju od 4?



**Zadatak 89.** *Prebrojavanjem loših proizvoda u 10 uzoraka od po 100 proizvoda dobiveni su podatci: 1, 2, 0, 1, 3, 2, 2, 1, 0, 1.*

*Prikaži razdiobu broja loših proizvoda u uzorku numerički: izračunaj relativne i kumulativne frekvencije, aritmetičku sredinu i varijancu.*

*Prikaži razdiobu broja loših proizvoda u uzorku grafički: nacrtaj poligonske grafove relativnih i kumulativnih frekvencija.*

*Kolika je "vjerojatnost" da slučajno odabrani uzorak ima 2 loša proizvoda? Kolika je "vjerojatnost" da slučajno odabrani uzorak ima više od 1 lošeg proizvoda? Kolika je "vjerojatnost" da slučajno odabrani uzorak ima najviše 2 loša proizvoda?*

**Zadatak 90.** *Mjerenjem dužina u jednom uzorku od 200 riba iz ribogojilišta dobiveni su podatci:*

<i>u razredu</i>	<i>04 – 08</i>	<i>centimetara bilo je</i>	<i>20</i>	<i>riba</i>
<i>u razredu</i>	<i>08 – 12</i>	<i>centimetara bilo je</i>	<i>60</i>	<i>riba</i>
<i>u razredu</i>	<i>12 – 16</i>	<i>centimetara bilo je</i>	<i>80</i>	<i>riba</i>
<i>u razredu</i>	<i>16 – 20</i>	<i>centimetara bilo je</i>	<i>40</i>	<i>riba</i>

*Prikaži razdiobu dužine riba u uzorku numerički: radeći sa sredinama razreda izračunaj relativne i kumulativne frekvencije, aritmetičku sredinu i varijancu.*

*Prikaži razdiobu dužine riba u uzorku grafički: nacrtaj stupčane grafove relativnih i kumulativnih frekvencija.*

*Kolika je "vjerojatnost" da slučajno odabrana riba iz uzorka ima dužinu 8–16 centimetara? Kolika je "vjerojatnost" da slučajno odabrana riba iz uzorka ima dužinu barem 8 centimetara? Kolika je "vjerojatnost" da slučajno odabrana riba iz uzorka nije duža od 12 centimetara?*

**Zadatak 91.** *Mjerenjem vijeka trajnosti u jednom uzorku od 500 žarulja dobiveni su podatci:*

<i>u razredu</i>	<i>0000 – 0500</i>	<i>sati pregorjelo je</i>	<i>030</i>	<i>žarulja</i>
<i>u razredu</i>	<i>0500 – 1000</i>	<i>sati pregorjelo je</i>	<i>070</i>	<i>žarulja</i>
<i>u razredu</i>	<i>1000 – 1500</i>	<i>sati pregorjelo je</i>	<i>150</i>	<i>žarulja</i>
<i>u razredu</i>	<i>1500 – 2000</i>	<i>sati pregorjelo je</i>	<i>230</i>	<i>žarulja</i>
<i>u razredu</i>	<i>2000 – 4000</i>	<i>sati pregorjelo je</i>	<i>020</i>	<i>žarulja</i>

*Prikaži razdiobu neprekidnog svijetljenja žarulje iz uzorka numerički: radeći sa sredinama razreda izračunaj relativne i kumulativne frekvencije, aritmetičku sredinu i varijancu.*

*Prikaži razdiobu neprekidnog svijetljenja žarulje iz uzorka grafički: nacrtaj stupčane grafove relativnih i kumulativnih frekvencija.*

*Kolika je "vjerojatnost" da slučajno odabrana žarulja iz uzorka pregori u razdoblju od 1000 do 2000 sati? Kolika je "vjerojatnost" da*

slučajno odabrana žarulja iz uzorka neprekidno svijetli barem 1000 sati? Kolika je "vjerojatnost" da slučajno odabrana žarulja iz uzorka ne svijetli više od 1500 sati?

#### 4. SLUČAJNE VARIJABLE

Služeći se Bernoullievom binomnom razdiobom, po potrebi i njenim tablicama, riješi zadatke

**Zadatak 92.** *Kocku bacamo 7 puta. Kolika je vjerojatnost da ćemo 2 puta dobiti peticu? Kolika je vjerojatnost da ćemo 3 puta dobiti peticu?*

**Zadatak 93.** *Kocku bacamo 13 puta. Kolika je vjerojatnost da ćemo 8 puta dobiti šesticu? Kolika je vjerojatnost da ćemo bar jednom dobiti jedinicu?*

**Zadatak 94.** *U kutiji su 3 bijele i 12 crnih kuglica. Iz kutije izvlačimo jednu po jednu kuglicu s vraćanjem 10 puta. Pomoću tablica izračunaj kolika je vjerojatnost da ćemo izvući:*

7 bijelih      10 crnih      4 – 6 bijelih      2 ili 3 crne

*Izračunaj očekivanje i varijancu broja izvučenih bijelih kuglica.*

**Zadatak 95.** *Stroj proizvodi 1% loših proizvoda. Koliko proizvoda treba proizvesti tako da vjerojatnost pojave bar jednog lošeg bude veća od 90%?*

**Zadatak 96.** *Koliko puta treba ponoviti dvostruko bacanje kocke tako da vjerojatnost pojave dvostruke šestice bar jednom bude veća od 50%?*

**Zadatak 97.** *Vjerojatnost da se pojave smetnje na prijemu unutar jednog sata iznosi 0,05. Kolika je vjerojatnost da se smetnje pojave jednom unutar osam sati? Kolika je vjerojatnost da se smetnje pojave bar jednom unutar osam sati?*

Služeći se Poissonovom monoparametarskom razdiobom, uglavnom njenim tablicama, riješi zadatke

**Zadatak 98.** *Tvornica proizvodi čepove od kojih je 0,065% loših. Kolika je vjerojatnost da tvorničko pakiranje od 10 000 čepova sadrži 5 loših čepova?*

**Zadatak 99.** *Stolarija proizvodi 99,92% dobrih stolica. Kolika je vjerojatnost da među 1000 proizvedenih stolica budu najviše 2 loše?*

**Zadatak 100.** U kutiji su 4 bijele i 96 crnih kuglica. Iz kutije izvlačimo jednu po jednu kuglicu s vraćanjem 75 puta.

Kolika je vjerojatnost da ćemo izvući:

6 bijelih      65 crnih      70 – 72 crnih      bar 1 bijelu

Koliki su očekivanje i varijanca broja izvučenih bijelih kuglica?

**Zadatak 101.** Vjerojatnost kratkog zastoja pri emitiranju signala odašiljača u intervalu od 24 sata iznosi 0,03. Kolika je vjerojatnost da odašiljač 2 ili 3 puta kratko prestane emitirati signale u razdoblju od 30 dana?

**Zadatak 102.** Stroj proizvodi 0,5% loših proizvoda. Koliko proizvoda treba proizvesti tako da vjerojatnost pojave bar jednog lošeg bude veća od 50%?

**Zadatak 103.** Za slučajnu varijablu  $X$  s Poissonovom razdiobom vrijedi  $p\{X = 1\} = p\{X = 2\}$ . Odredi očekivanje  $\mathbb{E}(X)$  te izračunaj vjerojatnost  $p\{X \geq 3\}$ .

Služeći se Gaussovom normalnom razdiobom, uglavnom njenim tablicama, riješi zadatak

**Zadatak 104.** Zadana je normalna razdioba  $X$  s očekivanjem  $\mathbb{E}(X) = 1$  i varijancom  $\mathbb{V}(X) = 9$ . Izračunaj  $p\{X \geq 3,43\}$  i pronađi  $x$  za koji je  $p\{1 \leq X \leq x\} = 0,4115$ .

**Zadatak 105.** Za normalnu razdiobu  $X$  s očekivanjem  $\mathbb{E}(X) = 7$  i vjerojatnošću  $p\{4 < X < 10\} = 0,8$  izračunaj varijancu  $\mathbb{V}(X)$ .

**Zadatak 106.** Za normalnu razdiobu  $X$  s varijancom  $\mathbb{V}(X) = 4$  i vjerojatnošću  $p\{X \geq 8\} = 0,4565$  izračunaj očekivanje  $\mathbb{E}(X)$ .

**Zadatak 107.** Za normalnu slučajnu varijablu  $X$  vrijedi:  $\mathbb{V}(X) = 2$  i  $p\{X < 6\} = 0,3375$ . Kolika je vjerojatnost da  $X$  poprimi vrijednost veću od 10?

**Zadatak 108.** Vijek trajnosti osjetljivog uređaja izražen je normalnom razdiobom  $X$  s očekivanjem  $\mathbb{E}(X) = 100$  sati i varijancom  $\mathbb{V}(X) = 25$  sati. Kolika je vjerojatnost da uređaj traje bar 105 sati? Ako je uređaj već izdržao 90 sati, kolika je vjerojatnost da traje još najmanje 15 sati, a kolika da traje još najviše 15 sati?

**Zadatak 109.** U tvornici se tokare vrlo precizne osovine. Pogreška u promjeru otokarene osovine podvrgava se normalnoj razdiobi  $X$ . Poznato je da 3% otokarenih osovine ima pogrešku u promjeru manju od 4 mjernih jedinice, dok 8% otokarenih osovine ima pogrešku u promjeru veću od 16 mjernih jedinica. Izračunaj  $\mathbb{E}(X)$  i  $\mathbb{V}(X)$ .

## 5. RJEŠENJA

**Rješenje 1.**  $AA, AB, BA, BB, CA, CB$

**Rješenje 2.**

$BAB, BAD, BBB, BBD, BCB, BCD$   
 $CAB, CAD, CBB, CBD, CCB, CCD$

**Rješenje 3.**  $AAA, AAB, ABA, ABB, BAA, BAB, BBA, BBB$

**Rješenje 4.**  $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$

**Rješenje 5.**  $2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 2 = 36$

**Rješenje 6.**  $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 243$

**Rješenje 7.**  $10 \cdot 10 = 100$

**Rješenje 8.**  $9 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 9000$

**Rješenje 9.**  $9 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 9000$

**Rješenje 10.**  $4^3 = 64, 4^2 = 16$

**Rješenje 11.**  $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 360, 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$

**Rješenje 12.**  $3 \cdot 4 \cdot 4 = 48$

**Rješenje 13.**  $4^4 = 256, 4^3 = 64, 4^3 + 4^3 + 4^3 = 192$

**Rješenje 14.**  $AA, AB, AC, BA, BB, BC, CA, CB, CC$

To su varijacije s ponavljanjem drugog razreda od tri elementa s oznakom  $\overline{V}_3^2$ .

**Rješenje 15.**  $AB, AC, BA, BC, CA, CB$

To su varijacije bez ponavljanja drugog razreda od tri elementa s oznakom  $V_3^2$ .

**Rješenje 16.**

$AABBB, ABABB, ABBAB, ABBBA, BAABB$   
 $BABAB, BABBA, BBAAB, BBABA, BBBAA$

To su permutacije s ponavljanjem petog razreda od dva elementa tipa  $2+3$  s duljom oznakom  $\overline{P}_{2+3}^5$  ili kraćom oznakom  $\overline{P}_{2+3}$ .

**Rješenje 17.**  $ABC, ACB, BAC, BCA, CAB, CBA$

To su permutacije bez ponavljanja trećeg razreda od tri elementa s duljom oznakom  $P_3^3$  ili kraćom oznakom  $P_3$ .

**Rješenje 18.**  $AAAA, AAAB, AABB, ABBB, BBBB$

To su kombinacije s ponavljanjem četvrtog razreda od dva elementa s oznakom  $\overline{C}_2^4$ .

**Rješenje 19.**  $ABC, ABD, ACD, BCD$

To su kombinacije bez ponavljanja trećeg razreda od četiri elementa s oznakom  $C_4^3$ .

**Rješenje 20.**  $\overline{V}_3^{13} = 3^{13} = 1\,594\,323$     **Rješenje 21.**  $P_5 = 5! = 120$

**Rješenje 22.**  $\overline{P}_{4+2+3} = \frac{(4+2+3)!}{4!2!3!} = 1\,260$

**Rješenje 23.**  $\overline{P}_{2+3+1} = \frac{(2+3+1)!}{2!3!1!} = 60$     **Rješenje 24.**  $P_6 = 6! = 720$

**Rješenje 25.**  $AAB, ABA, ABB, BAA, BAB, BBA$ . U cjelini ne pripadaju, ali one koje sadrže dva  $A$  i jedno  $B$  su permutacije s ponavljanjem tipa 2+1, kao što su one koje sadrže jedno  $A$  i dva  $B$  permutacije s ponavljanjem tipa 1+2.

**Rješenje 26.**  $C_6^4 = \binom{6}{4} = 15$ ,  $\binom{6}{4} + \binom{6}{3} + \binom{6}{2} + \binom{6}{1} = 71$

**Rješenje 27.**  $\overline{P}_{5+7} = 792$ ;  $\binom{7+1}{5} = 56$ , Uputa: na osam mjesta određenih sa sedam 1 (šest unutarnjih i dva vanjska) ubacujemo pet 0.

**Rješenje 28.**  $C_7^4 = \binom{7}{4} = 35$ ,  $\overline{C}_7^4 = \binom{7+4-1}{4} = 210$

**Rješenje 29.**  $\overline{C}_3^5 = \binom{3+5-1}{5} = 21$

**Rješenje 30.**  $C_{45}^6 = \binom{45}{6} = 8\,145\,060$     **Rješenje 31.**  $\binom{4}{2} \cdot \binom{6}{3} = 120$

**Rješenje 32.**  $\binom{6}{2} \cdot \binom{7}{3} = 525$     **Rješenje 33.**  $\binom{l}{m} \cdot \binom{n-l}{k-m}$

**Rješenje 34.** 1, 2    **Rješenje 35.** 3, 6

**Rješenje 36.**  $\overline{V}_{10}^6 = 10^6$     **Rješenje 37.**  $4^3 \cdot 10^6 = 64\,000\,000$

**Rješenje 38.**  $V_{10}^4 = 5\,040$     **Rješenje 39.**  $V_{30}^2 = 870$

**Rješenje 40.**  $V_n^2 = n \cdot (n-1) = 1640$ ,  $n = 41$

**Rješenje 41.**  $\overline{V}_8^5 = 8^5 = 32\,768$ ,  $V_8^5 = \frac{8!}{3!} = 6\,720$ ,  $V_8^4 \cdot 4 \cdot 5 = 33\,600$

**Rješenje 42.**  $\binom{4}{2} \cdot (2\overline{P}_{1+1+3} + 2\overline{P}_{1+1+2+1}) = 960$

**Rješenje 43.**  $\frac{3}{6} = \frac{1}{2} = 50\%$     **Rješenje 44.**  $\frac{9}{36} = \frac{1}{4} = 25\%$

Rješenje 45.  $1 - \frac{25}{36} = \frac{11}{36}$  Rješenje 46.  $1 - \frac{16}{36} = \frac{5}{9}$  Rješenje 47.  $\frac{125}{216}$

Rješenje 48.  $\frac{6}{36} = \frac{1}{6}$  Rješenje 49.  $\frac{5}{36}$  Rješenje 50.  $\frac{6+5}{36} = \frac{11}{36}$

Rješenje 51.  $\frac{10}{216} = \frac{5}{108}$  Rješenje 52.  $\frac{15}{216} = \frac{5}{72}$  Rješenje 53.  $\frac{1}{2}$

Rješenje 54.  $\frac{15}{36} = \frac{5}{12}$  Rješenje 55.  $\frac{15}{216} = \frac{5}{72}$

Rješenje 56.  $\frac{91}{216} = 42, 13\%$  Rješenje 57.  $\frac{2}{216} = \frac{1}{108}$

Rješenje 58.  $\frac{21}{216} = \frac{7}{72}$  Rješenje 59.  $\frac{12}{216} = \frac{1}{18}$

Rješenje 60.  $\frac{36}{216} = \frac{1}{6}$  Rješenje 61.  $\frac{15}{216} = \frac{5}{72}$  Rješenje 62.  $\frac{20}{216} = \frac{5}{54}$

Rješenje 63.  $\frac{181}{216}$  Rješenje 64.  $\frac{75}{1296}, 0 + \frac{1}{36} + \frac{10}{216} + \frac{75}{1296} = \frac{171}{1296}$

Rješenje 65.  $\frac{5}{17}, \frac{9}{17}$  Rješenje 66.  $\frac{C_3^2}{C_{13}^2} = \frac{\binom{3}{2}}{\binom{13}{2}} = \frac{1}{26}$

Rješenje 67.  $\frac{V_3^2}{V_{13}^2} = \frac{3 \cdot 2}{13 \cdot 12} = \frac{1}{26}$  Rješenje 68.  $\frac{V_3^2}{V_{13}^2} = \frac{3^2}{13^2} = \frac{9}{169}$

Rješenje 69.  $\frac{\binom{7}{3}}{\binom{20}{3}} = \frac{7}{228}, \frac{5 \cdot 8 \cdot 7}{\binom{20}{3}} = \frac{14}{57}$

Rješenje 70.  $\frac{7^3}{20^3} = \frac{343}{8000}, \frac{5 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 3!}{20^3} = \frac{21}{100}$

Rješenje 71.  $\frac{7V_{19}^2}{V_{20}^3} = \frac{7}{20}, \frac{5 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 3!}{V_{20}^3} = \frac{14}{57}$  Rješenje 72.  $\frac{(6V_4^2 + 4V_6^2)3}{V_{10}^3} = \frac{4}{5}$

Rješenje 73.  $\frac{\binom{6}{2}\binom{7}{3}}{\binom{13}{5}} = \frac{175}{429}$  Rješenje 74.  $\frac{\binom{l}{m}\binom{n-l}{k-m}}{\binom{n}{k}}$

Rješenje 75.  $\frac{\binom{15}{5}}{\binom{20}{5}} = \frac{1001}{5168}, \frac{\binom{15}{2}\binom{5}{3}}{\binom{20}{5}} = \frac{175}{2584}, \frac{\binom{15}{2}\binom{5}{3} + \binom{15}{3}\binom{5}{2} + \binom{15}{4}\binom{5}{1} + \binom{15}{5}}{\binom{20}{5}}$

Rješenje 76.  $\frac{4^4\binom{7}{3}}{5^7} = \frac{1792}{15625}, \frac{\binom{7}{4}\binom{7}{2}\binom{7}{1}}{5^7} = \frac{1029}{15625}$  Rješenje 77.  $\frac{2}{3}, \frac{1}{3}$

Rješenje 78.  $\frac{2}{11}, \frac{1}{11}$  Rješenje 79.  $\frac{9}{10}, \frac{7}{10}$  Rješenje 80.  $\frac{12}{91}, \frac{3}{91}$

Rješenje 81.  $\frac{1}{2}, \frac{1}{20}$  Rješenje 82.  $\frac{2}{5} \cdot \frac{2}{6} + \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{6} = \frac{7}{30}, \frac{3}{7}$

Rješenje 83.  $\frac{73}{255}, \frac{40}{73}$  Rješenje 84.  $\frac{1}{2} \cdot \frac{98}{100} + \frac{3}{10} \cdot \frac{97}{100} + \frac{1}{5} \cdot \frac{96}{100} = \frac{973}{1000}, \frac{490}{973}$

Rješenje 85.  $\frac{1}{2}, \frac{9}{25}$  Rješenje 86.  $\frac{5}{10} + \frac{6}{10} - \frac{5}{10} \cdot \frac{6}{10} = \frac{8}{10}$

Rješenje 87.  $\frac{1}{10} \cdot \frac{2}{10} \cdot \frac{7}{10} + \frac{1}{10} \cdot \frac{8}{10} \cdot \frac{3}{10} + \frac{9}{10} \cdot \frac{2}{10} \cdot \frac{3}{10} + \frac{1}{10} \cdot \frac{2}{10} \cdot \frac{3}{10} = \frac{98}{1000}$

**Rješenje 88.**

$x_i$	$N_i$	$f_i$	$F_i$	$x_i f_i$	$(x_i - \mu_x)^2 f_i$
$x_1 = 1$	20	0,250	0,250	0,25	0,490
$x_2 = 2$	26	0,325	0,575	0,65	0,052
$x_3 = 3$	20	0,250	0,825	0,75	0,090
$x_4 = 4$	10	0,125	0,950	0,50	0,320
$x_5 = 5$	04	0,050	1,000	0,25	0,338
	$N = 80$	1		$\mu_x = 2,40$	$\sigma_x^2 = 1,290$

$$f_4 = 0,125, \quad f_4 + f_5 = 0,175, \quad F_3 = 0,825$$

**Rješenje 89.**

$x_i$	$N_i$	$f_i$	$F_i$	$x_i f_i$	$(x_i - \mu_x)^2 f_i$
$x_1 = 0$	2	0,2	0,2	0,0	0,338
$x_2 = 1$	4	0,4	0,6	0,4	0,036
$x_3 = 2$	3	0,3	0,9	0,6	0,147
$x_4 = 3$	1	0,1	1,0	0,3	0,289
	$N = 10$	1		$\mu_x = 1,3$	$\sigma_x^2 = 0,810$

$$f_3 = 0,3, \quad f_2 + f_3 = 0,4, \quad F_3 = 0,9$$

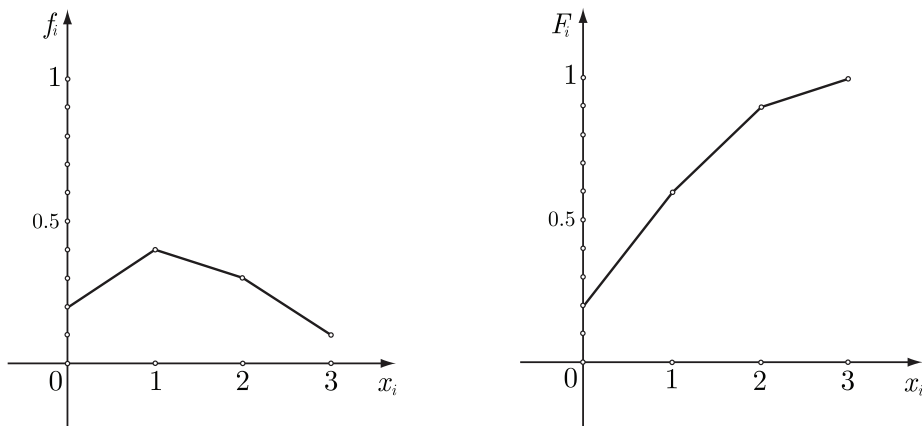


FIGURE 1. Relativne i kumulativne frekvencije u obliku poligonskih crta

**Rješenje 90.**

razredi	$x_i$	$N_i$	$f_i$	$F_i$	$x_i f_i$	$(x_i - \mu_x)^2 f_i$
[04, 08]	$x_1 = 06$	20	0,1	0,1	0,6	4,624
[08, 12]	$x_2 = 10$	60	0,3	0,4	3,0	2,352
[12, 16]	$x_3 = 14$	80	0,4	0,8	5,6	0,576
[16, 20]	$x_4 = 18$	40	0,2	1,0	3,6	5,408
		$N = 200$	1		$\mu_x = 12,8$	$\sigma_x^2 = 12,960$

$$f_2 + f_3 = 0,7, \quad f_2 + f_3 + f_4 = 1 - F_1 = 0,9, \quad F_2 = 0,4$$

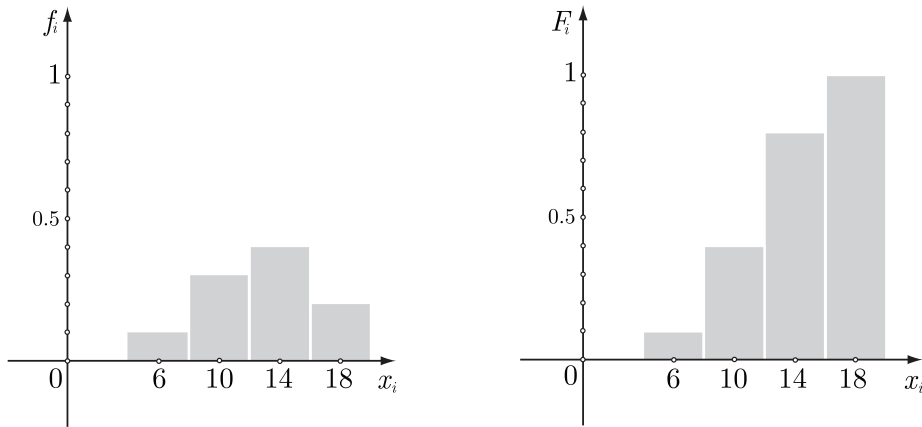


FIGURE 2. Relativne i kumulativne frekvencije u obliku stupaca

**Rješenje 91.**

razredi	$x_i$	$N_i$	$f_i$	$F_i$	$x_i f_i$	$(x_i - \mu_x)^2 f_i$
[0000, 0500]	$x_1 = 0250$	030	0,06	0,06	015	82134
[0500, 1000]	$x_2 = 0750$	070	0,14	0,20	105	62846
[1000, 1500]	$x_3 = 1250$	150	0,30	0,50	375	08670
[1500, 2000]	$x_4 = 1750$	230	0,46	0,96	805	50094
[2000, 4000]	$x_5 = 3000$	020	0,04	1,00	120	99856
		$N = 500$	1		$\mu_x = 1420$	$\sigma_x^2 = 303600$

$$f_3 + f_4 = 0,76, \quad f_3 + f_4 + f_5 = 1 - F_2 = 0,8, \quad F_3 = 0,5$$



**Rješenje 92.**  $p_2 = \binom{7}{2} \left(\frac{1}{6}\right)^2 \left(\frac{5}{6}\right)^5 = \frac{21875}{93312}$ ,  $p_3 = \binom{7}{3} \left(\frac{1}{6}\right)^3 \left(\frac{5}{6}\right)^4 = \frac{21875}{279936}$

**Rješenje 93.**  $p_8 = \binom{13}{8} \left(\frac{1}{6}\right)^8 \left(\frac{5}{6}\right)^5$ ,  $1 - p_0 = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^{13}$

**Rješenje 94.**  $p_7 = 0,0008$ ,  $q_{10} = p_0 = 0,1074$ ,  $p_4 + p_5 + p_6 = 0,1200$ ,  $q_2 + q_3 = p_8 + p_7 = 0,0009$ ,  $\mathbb{E}(X) = 2$ ,  $\mathbb{V}(X) = 1,6$

**Rješenje 95.** Iz  $1 - p_0 > 0,9$  slijedi  $n \geq 230$ . **Rješenje 96.**  $n \geq 25$

**Rješenje 97.**  $p_1 = 8 \cdot 0,05 \cdot (0,95)^7 = 0,2793$ ,  $1 - p_0 = 1 - (0,95)^8 = 0,3366$

**Rješenje 98.**  $p_5 = \frac{6,5^5}{5!} e^{-6,5} = 0,1454$  **Rješenje 99.**  $95,26\%$

**Rješenje 100.**  $p_6 = 0,0504$ ,  $q_{65} = p_{10} = 0,0008$ ,  $q_{70} + q_{71} + q_{72} = p_5 + p_4 + p_3 = 0,4928$ ,  $\mathbb{E}(X) = \mathbb{V}(X) = m = 3$

**Rješenje 101.**  $p_2 + p_3 = 0,1647 + 0,0494 = 0,2141$

**Rješenje 102.** Iz  $1 - p_0 = 1 - e^{-0,005n} > 0,5$  izlazi  $n \geq 139$ .

**Rješenje 103.** Predpostavka  $p_1 = p_2$  daje  $m = 2$ .  $\mathbb{E}(X) = 2$ ,  $p\{X \geq 3\} = 1 - p_0 - p_1 - p_2 = 0,3233$

**Rješenje 104.**  $0,2090$ ,  $x = 5,05$  **Rješenje 105.**  $\mathbb{V}(X) = 5,49$

**Rješenje 106.**  $\mathbb{E}(X) = 7,78$

**Rješenje 107.**  $\mathbb{E}(X) = 6,59$ ,  $p\{X > 10\} = 0,008$

**Rješenje 108.**  $0,1587$ ,  $p\{X \geq 105 | X \geq 90\} = 0,1624$   
 $p\{X \leq 105 | X \geq 90\} = 0,8376$

**Rješenje 109.**  $\mathbb{E}(X) = 10,86$ ,  $\mathbb{V}(X) = 13,30$

#### REFERENCES

- [1] M. Ilijašević, Ž. Pauše: **Riješeni primjeri i zadaci iz vjerojatnosti i statistike**, "Zagreb" poduzeće za grafičku djelatnost, Zagreb (1990)
- [2] N. Elezović, Lj. Marangunić: **Stohastička matematika**, Zadaci s pismenih ispita, Element, Zagreb (1992)
- [3] Ž. Pauše: **Vjerojatnost**, Informacija, Stohastički procesi, Školska knjiga, Zagreb (1988)
- [4] I. Pavlić: **Statistička teorija i primjena**, Tehnička knjiga, Zagreb (1985)
- [5] N. Sarapa: **Teorija vjerojatnosti**, Školska knjiga, Zagreb (1992)

ZLATKO PAVIĆ, MECHANICAL ENGINEERING FACULTY, UNIVERSITY OF OSIJEK, TRG IVANE BRLIĆ MAŽURANIĆ 2, 35000 SLAVONSKI BROD, CROATIA  
*E-mail address:* Zlatko.Pavic@sfsb.hr