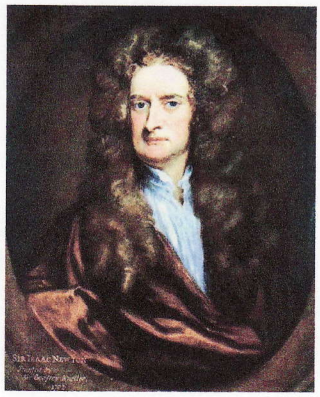
V. Derivacije

Uvod s povijesnim osvrtom

Derivacija i diferencijal su osnovni pojmovi **diferencijalnog računa**, a integral osnovni pojam **integralnog računa**. Diferencijalni i integralni račun su dva temeljna računa matematičke analize, a od kraja 17. stoljeća su povezani u jedinstvenu cjelinu koja se zove **infinitezimalni račun**. Pridjev infinitezimalan dolazi od novolatinske riječi infinitesimus, a na hrvatskom znači beskonačno ili neizmjerno malen. Taj račun predstavlja najvažnije poglavlje cjelokupne znanosti. Utemeljitelji infinitezimalnog računa su njemački filozof i matematičar Gottfried Leibniz (1646 – 1716) te engleski fizičar i matematičar Isaac Newton (1643 – 1727).

Diferencijal i derivacija su srodni pojmovi. Pojam diferencijala, koji je uveo Leibniz, je neko vrijeme bio središnji pojam diferencijalnog računa. Matematičari su kasnije stavili funkciju u središte pažnje tog računa i dali prednost pojmu derivacije. Možda je u primjenama diferencijal nešto "opipljiviji", dok je možda u matematičkom smislu derivacija nešto "jasnija".

Gottfried Leibniz



Isaac Newton

Lekcije

1. Pojam derivacije

1.1. Važnost pojma derivacije

U dosadašnjem proučavanju funkcija smo često susretali jednolične funkcije, rastuće ili padajuće. Vidjeli smo da se jednolična funkcija na jednom području sporo mijenja, a na drugom brzo. Upravo je derivacija "mjera" za brzinu promjene funkcije; ili kraće, brzina promjene funkcije; ili još kraće, brzina funkcije.

Prilikom crtanja grafova polinoma i racionalnih funkcija smo naslućivali točke minimuma i maksimuma, ali ih često nismo mogli točno odrediti. Kao brzina promjene funkcije, derivacija bi u tim točkama trebala biti nula. To će reći da bi nam derivacija mogla olakšati traženje ekstrema.

Ako je kod pravocrtnog gibanja tijela, prijeđeni put y ovisan o proteklom vremenu x izražen funkcijskom vezom $y=f(x)$, tada je iznos brzine gibanja tijela u trenutku x_0 upravo derivacija funkcije $f(x)$ u točki x_0.

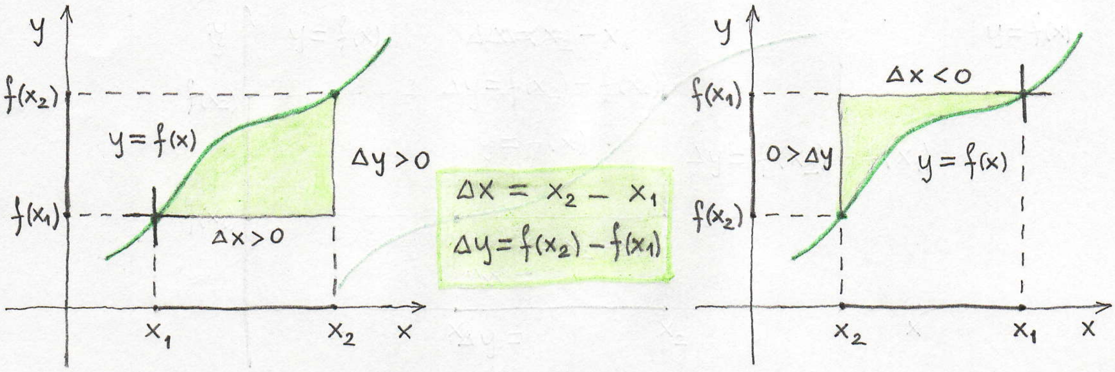
Sam naziv derivacija potječe od latinske riječi derivatio, a na hrvatskom znači izvođenje.

1.2. Prirast promjenljive i prirast funkcije

Neka je zatvoreni interval između brojeva x_1 i x_2 ($x_1 < x_2$ ili $x_1 > x_2$) sadržan u području definicije funkcije $y=f(x)$. Tada su vrijednosti

$$\Delta x = x_2 - x_1 \quad i \quad \Delta y = f(x_2) - f(x_1)$$

prirast promjenljive x i **prirast funkcije** y pri prijelazu x-a od x_1 do x_2.



prirast promjenljive i prirast funkcije pri prijelazu od x_1 do x_2

Primjer 156. Za funkciju $f(x) = x - x^2$ izračunaj prirast promjenljive i prirast funkcije pri prijelazu x-a

(1) od 3 do 4 (2) od 2 do -1

Rješenje.

(1) $\Delta x = 4 - 3 = 1$

$\Delta y = f(4) - f(3) = -12 - (-6) = -6$

(2) $\Delta x = -1 - 2 = -3$

$\Delta y = f(-1) - f(2) = -2 - (-2) = 0$

□

Primjer 157. Za funkciju $f(x) = \frac{1}{x}$ izračunaj prirast promjenljive i prirast funkcije pri prijelazu x-a

(1) od x_0 do $x_0 + h$ (2) od x_0 do x

Rješenje. (1) $\Delta x = x_0 + h - x_0 = h$

$$\Delta y = f(x_0 + h) - f(x_0) = \frac{1}{x_0 + h} - \frac{1}{x_0} = -\frac{h}{x_0(x_0 + h)}$$

(2) $\Delta x = x - x_0$

$$\Delta y = f(x) - f(x_0) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x_0} = \frac{x_0 - x}{x_0 x}$$

□

1.3. Brzina promjene funkcije

Pojam derivacije se razvio iz problema brzine koji ćemo ovdje sažeto obraditi kao brzinu promjene funkcije.

Neka je funkcija $y = f(x)$ definirana u okolini broja x_0 i neka je Δx mali broj, pozitivan ili negativan. Tada je količnikom

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

izražena **prosječna brzina promjene** funkcije $y=f(x)$ **na intervalu** $[x_0, x_0+\Delta x]$ za $\Delta x > 0$ ili $[x_0+\Delta x, x_0]$ za $\Delta x < 0$. Graničnom vrijednošću

$$\lim_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x},$$

ako ona postoji kao broj, je izražena **brzina promjene** funkcije $y=f(x)$ **u točki** x_0.

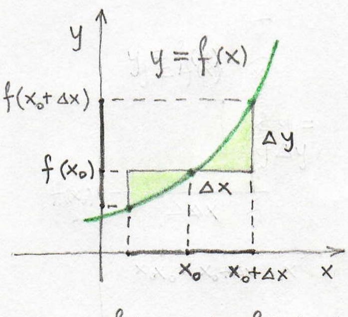
1.4. Derivacija funkcije

Poput neprekinutosti, i derivacija se uvodi kao mjesni pojam u jednoj točki koja ima svoju okolinu.

Definicija. Neka je funkcija $f(x)$ definirana u okolini broja x_0. Tada je broj

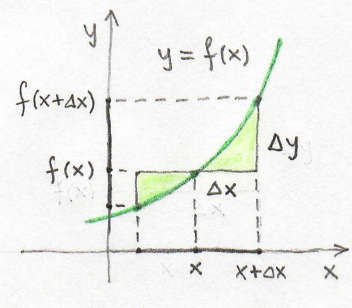
$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x},$$

ako postoji, **derivacija** funkcije $f(x)$ u točki x_0. Za funkciju $f(x)$ koja ima derivaciju u x_0 još se kaže da je **derivabilna** u x_0.



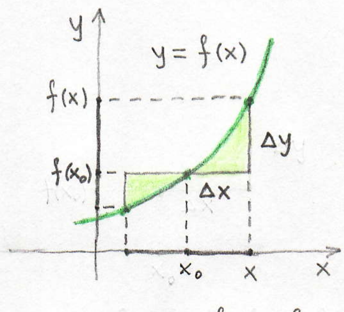
$\Delta y = f(x_0+\Delta x) - f(x_0)$

$$\boxed{f'(x_0) = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}}$$



$\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x)$

$$\boxed{f'(x) = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}}$$



$\Delta x = x - x_0$, $\Delta y = f(x) - f(x_0)$

$$\boxed{f'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}}$$

načini izražavanja derivacije funkcije u točki

Izračunajmo derivaciju funkcije $f(x) = x^2$ u točkama $x_0 = 3$ i $x_0 = x$:

$$f'(3)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(3+\Delta x)-f(3)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(3+\Delta x)^2-3^2}{\Delta x}=$$

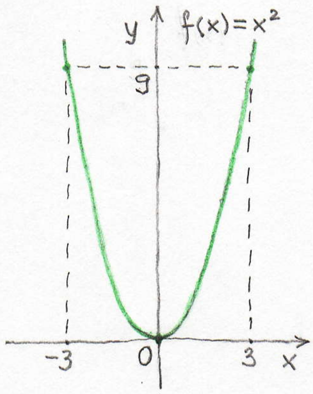
$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x(6+\Delta x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}(6+\Delta x)=6$$

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(x+\Delta x)^2-x^2}{\Delta x}=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x(2x+\Delta x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}(2x+\Delta x)=2x$$

Izrazom $f'(x)=2x$ obuhvaćamo derivaciju znatno šire, u ovom konkretnom slučaju na cijelom realnom području. Taj izraz ujedno pokazuje da je i derivacija funkcija.

Objasnimo značenje derivacije $f'(x)=2x$ funkcije $f(x)=x^2$ na tri različita mjesta: $x=-3$, $x=0$, $x=3$.



$$f'(-3)=2\cdot(-3)=-6$$
$$f'(0)=2\cdot 0=0$$
$$f'(3)=2\cdot 3=6$$

Negativan predznak derivacije u točki $x=-3$ nam govori da funkcija u okolini te točke pada, dok nam apsolutna vrijednost derivacije $|-6|=6$ govori kolika je brzina pada u toj točki.

Pozitivan predznak derivacije u broju $x=3$ upućuje na činjenicu da funkcija u okolini tog broja raste, a sama vrijednost derivacije 6 kazuje kolika je brzina rasta u tom broju.

Derivacija jednaka nuli u točki $x=0$ kazuje da se funkcija u okolini te točke vrlo spoto mijenja, da gotovo stoji (stacionira) kao konstanta, dok je brzina promjene u toj točki jednaka nuli. Ovaj je slučaj najsloženiji, ali i najvažniji u primjenama.

Primjer 158. Odredi derivaciju funkcije $f(x)=x^3$.

Rješenje.
$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x+\Delta x)^3 - x^3}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x^3 + 3x^2\Delta x + 3x\Delta x^2 + \Delta x^3 - x^3}{\Delta x} =$$

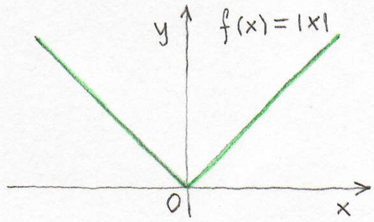
$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x\,(3x^2 + 3x\Delta x + \Delta x^2)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (3x^2 + 3x\Delta x + \Delta x^2) =$$

$$= 3x^2$$

□

Primjer 159. Odredi derivaciju funkcije $f(x) = |x|$. Ima li funkcija $f(x)$ derivaciju u svakoj realnoj točki x?

Rješenje.



$$f(x) = \begin{cases} x & \text{za } x > 0 \\ 0 & \text{za } x = 0 \\ -x & \text{za } x < 0 \end{cases}$$

$x > 0$: $f'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{x + \Delta x - x}{\Delta x} = 1$

$x < 0$: $f'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{-x - \Delta x + x}{\Delta x} = -1$

$x = 0$: $\lim\limits_{\Delta x \to 0+} \dfrac{f(0+\Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0+} \dfrac{\Delta x - 0}{\Delta x} = 1$

$\lim\limits_{\Delta x \to 0-} \dfrac{f(0+\Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0-} \dfrac{-\Delta x - 0}{\Delta x} = -1$

ne postoji $f'(0)$

Derivacija apsolutne vrijednosti se može izraziti formulom

$$|x|' = \frac{|x|}{x} \quad \text{za } x \neq 0.$$

□

Napomena. Derivabilnost se, kao i neprekinutost, promatra u unutarnjim točkama područja definicije funkcije. Ako je funkcija derivabilna u točki x_0, tada se može dokazati da je ona derivabilna u svakoj točki nekog malog intervala oko x_0.

Za funkciju $f(x)$ koja je derivabilna u svakoj točki nekog područja D kažemo da je derivabilna na području D. Područje D na kojem je neka funkcija derivabilna se može zamišljati, kao jedan omeđen ili neomeđen otvoren interval, ili kao unija konačno mnogo takvih intervala. Takva su npr. područja:

$$\mathcal{D}=\langle 0,1\rangle,\ \mathcal{D}=\langle -\infty,3\rangle,\ \mathcal{D}=\langle 4,+\infty\rangle,\ \mathcal{D}=\langle -\infty,+\infty\rangle,\ \mathcal{D}=\langle -1,2\rangle\cup\langle 2,+\infty\rangle.$$

Za funkciju $f(x)$ derivabilnu na području $\mathcal{D}$ vrijede implikacije:

$f(x)$ je konstanta $\Rightarrow f'(x)=0$ $\quad\left(\text{jer je } \frac{\Delta y}{\Delta x}=0\right)$

$f(x)$ je rastuća $\Rightarrow f'(x)\geq 0$ $\quad\left(\text{jer je } \frac{\Delta y}{\Delta x}>0\right)$

$f(x)$ je padajuća $\Rightarrow f'(x)\leq 0$ $\quad\left(\text{jer je } \frac{\Delta y}{\Delta x}<0\right)$

Derivacija rastuće funkcije može biti nula: npr. $f(x)=x^3$ raste na $\langle -\infty,+\infty\rangle$, a $f'(x)=3x^2$ za $x=0$ iznosi $f'(0)=0$. Slično vrijedi za padajuću funkciju $f(x)=-x^3$.

Od triju navedenih implikacija u primjenama su znatno važnije obrnute implikacije, koje također vrijede (uz predpostavke $f'(x)=0$, $f'(x)>0$, $f'(x)<0$), ali samo kada je područje $\mathcal{D}$ jedan interval. Ove se tvrdnje znatno teže dokazuju, a mi ćemo ih obraditi u Lekciji 5.

Napomena. Ako je funkcija $f(x)$ derivabilna u x_0, tada je ona neprekinuta u x_0:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=f'(x_0)$$

$$\lim_{x\to x_0}\left(f(x)-f(x_0)\right)=0 \qquad \text{inače ne postoji } f'(x_0)$$

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$$

Suzi li se definicija derivacije samo na jednu stranu broja x_0 dobivaju se **jednostrane derivacije**. Tako su brojevi

$$f'_-(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0-}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} \quad i \quad f'_+(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0+}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x},$$

ako postoje, **derivacije** funkcije $f(x)$ **s lijeve i desne strane** (derivacije s lijeva i desna) u x_0.

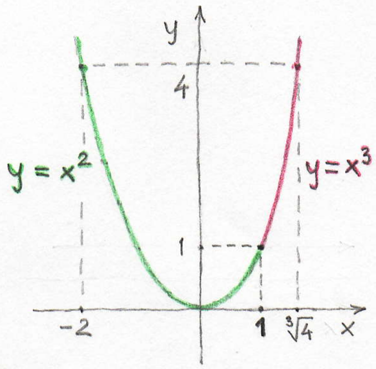
Primjer 160. Izračunaj jednostrane derivacije funkcije

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{za } x \leq 1 \\ x^3 & \text{za } x \geq 1 \end{cases}$$

u točki $x_0 = 1$.

Rješenje. Već smo prije odredili

$$(x^2)' = 2x \quad i \quad (x^3)' = 3x^2.$$



Zato je

$$f'_-(1) = 2 \cdot 1 = 2 \quad i \quad f'_+(1) = 3 \cdot 1^2 = 3.$$

U točki $x_0 = 1$ funkcija $f(x)$ je neprekinuta, ali nije derivabilna. Slikovitije rečeno, u točki $(1,1)$ graf funkcije $f(x)$ je neprekinut, ali nije "gladak".

□

2. Tablica osnovnih derivacija

U tablici na sljedećoj strani su zapisane derivacije svih osnovnih elementarnih funkcija, izuzev polinoma i racionalne funkcije, te derivacija apsolutne vrijednosti. Polinom i racionalna funkcija se lako deriviraju ako se zna da derivacija jednočlana (monoma) x^n iznosi nx^{n-1}, i ako se primijene osnovna računska pravila za deriviranje (Lekcija 3).

Za što uspješnije deriviranje, a pogotovo integriranje, se preporučuje "napamet" naučiti lijevu polovinu tablice te derivacije arkus sinusa i arkus tangensa.

Recimo nešto o deriviranju funkcija općenito. Postupak deriviranja funkcija nije težak, ako se razvije vještina ili tehnika deriviranja. Ta se vještina razvija korištenjem: tablice, osnovnih računskih pravila za deriviranje (Lekcija 3) i pravila za deriviranje složene funkcije (Lekcija 7).

Tablica osnovnih derivacija

funkcija	derivacija	funkcija	derivacija
$y = c$	$y' = 0$	$y = \sinh x$	$y' = \cosh x$
$y = x$	$y' = 1$	$y = \cosh x$	$y' = \sinh x$
$y = x^a$	$y' = a x^{a-1}$	$y = \tanh x$	$y' = \frac{1}{\cosh^2 x}$
$y = e^x$	$y' = e^x$	$y = \coth x$	$y' = -\frac{1}{\sinh^2 x}$
$y = a^x$	$y' = a^x \ln a$	$y = \operatorname{ar\,sinh} x$	$y' = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$
$y = \ln x$	$y' = \frac{1}{x}$	$y = \operatorname{ar\,cosh}^{\pm} x$	$y' = \pm \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$
$y = \log_a x$	$y' = \frac{1}{x \ln a}$	$y = \operatorname{ar\,tanh} x$	$y' = \frac{1}{1-x^2}$
$y = \lvert x \rvert$	$y' = \frac{\lvert x \rvert}{x}$	$y = \operatorname{ar\,coth} x$	$y' = \frac{1}{1-x^2}$
$y = \sin x$	$y' = \cos x$	$y = \arcsin x$	$y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$y = \cos x$	$y' = -\sin x$	$y = \arccos x$	$y' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$y = \tan x$	$y' = \frac{1}{\cos^2 x}$	$y = \arctan x$	$y' = \frac{1}{1+x^2}$
$y = \cot x$	$y' = -\frac{1}{\sin^2 x}$	$y = \operatorname{arc\,cot} x$	$y' = -\frac{1}{1+x^2}$

U ovoj lekciji izvest ćemo samo nekoliko tabličnih derivacija. Neke tablične derivacije izvest ćemo kasnije, pomažući se na različite načine.

Primjer 161. Izvedi derivaciju funkcije $f(x)=a^x$.

Rješenje. Pri kraju izvoda upotrijebit ćemo $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{a^{\Delta x}-1}{\Delta x}=\ln a$.

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{a^{x+\Delta x}-a^x}{\Delta x}=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{a^x(a^{\Delta x}-1)}{\Delta x}=a^x\lim_{\Delta x\to 0}\frac{a^{\Delta x}-1}{\Delta x}=a^x\ln a$$

□

Primjer 162. Izvedi derivaciju funkcije $f(x)=\ln x$.

Rješenje. Pri kraju izvoda iskoristit ćemo $\lim\limits_{\Delta x\to 0}(1+c\Delta x)^{\frac{1}{\Delta x}}=e^c$.

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\ln(x+\Delta x)-\ln x}{\Delta x}=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\Delta x}\ln\frac{x+\Delta x}{x}=\lim_{\Delta x\to 0}\ln\left(1+\frac{1}{x}\Delta x\right)^{\frac{1}{\Delta x}}=$$

$$=\ln e^{\frac{1}{x}}=\frac{1}{x}$$

□

Primjer 163. Izvedi derivaciju funkcije $f(x)=\sin x$.

Rješenje. Koristit ćemo formule

$$\sin\alpha-\sin\beta=2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\quad \text{i}\quad \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin c\Delta x}{c\Delta x}=1.$$

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin(x+\Delta x)-\sin x}{\Delta x}=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{2\sin\frac{\Delta x}{2}\cdot\cos\frac{2x+\Delta x}{2}}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin\frac{1}{2}\Delta x}{\frac{1}{2}\Delta x}\cdot\cos\left(x+\tfrac{1}{2}\Delta x\right)=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin\frac{1}{2}\Delta x}{\frac{1}{2}\Delta x}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\cos\left(x+\tfrac{1}{2}\Delta x\right)=1\cdot\cos x=\cos x$$

□

3. Osnovna računska pravila

Ako za funkcije $f(x)$ i $g(x)$ postoje derivacije $f'(x)$ i $g'(x)$, tada vrijede pravila:

$$(1)\ [f(x)+g(x)]' = f'(x) + g'(x)$$

$$(2)\ [f(x)-g(x)]' = f'(x) - g'(x)$$

$$(3)\ [f(x)\cdot g(x)]' = f'(x)\cdot g(x) + f(x)\cdot g'(x)$$

$$(4)\ [\,c\,f(x)\,]' = c\,f'(x)$$

$$(5)\ \left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]' = \frac{f'(x)\cdot g(x) - f(x)\cdot g'(x)}{[g(x)]^2}, \quad g(x) \neq 0$$

Izvod pravila (3):

$$[f(x)\cdot g(x)]' = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(x+\Delta x)\cdot g(x+\Delta x) - f(x)\cdot g(x)}{\Delta x} =$$

(u brojnik dodajemo 0 u vidu $f(x)\cdot g(x+\Delta x) - f(x)\cdot g(x+\Delta x)$)

$$= \lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(x+\Delta x)\cdot g(x+\Delta x) - f(x)\cdot g(x) + f(x)\cdot g(x+\Delta x) - f(x)\cdot g(x+\Delta x)}{\Delta x} =$$

(u brojniku izlučujemo iz vanjskih i unutarnjih članova)

$$= \lim_{\Delta x\to 0} \frac{[f(x+\Delta x) - f(x)]\,g(x+\Delta x) + f(x)[g(x+\Delta x) - g(x)]}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}\cdot g(x+\Delta x) + \lim_{\Delta x\to 0} f(x)\cdot\frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x} =$$

$$= f'(x)\cdot g(x) + f(x)\cdot g'(x)$$

Pravilo (4) je poseban slučaj pravila (3): ako u (3) uvrstimo $g(x) = c$, dobit ćemo (4).

Pravila (1) i (2) se mogu poopćiti na konačan broj pribrojnika.

Primjer 164. Služeći se tablicom i pravilima deriviraj funkciju

$$y = x^4 + \ln x - 3\sin x + \sqrt{2}\,.$$

Rješenje. $y' = (x^4 + \ln x - 3\sin x + \sqrt{2})' =$

$$= (x^4)' + (\ln x)' - (3\sin x)' + (\sqrt{2})' =$$
$$= 4x^3 + \frac{1}{x} - 3(\sin x)' + 0 =$$
$$= 4x^3 + \frac{1}{x} - 3\cos x$$

$\square$

Primjer 165. Uz pomoć tablice i pravila deriviraj funkciju
$$y = \sqrt{x^3} - \frac{4}{\sqrt{x}} + 2^{3x}.$$

Rješenje. Prvo prilagodimo oblik funkcije prema tablici:
$$y = x^{\frac{3}{2}} - 4x^{-\frac{1}{2}} + 8^x$$

Zatim deriviramo:
$$y' = \frac{3}{2}x^{\frac{3}{2}-1} - 4\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)x^{-\frac{1}{2}-1} + 8^x \ln 8 =$$
$$= \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} + 2x^{-\frac{3}{2}} + 8^x \ln 8 =$$
$$= \frac{3\sqrt{x}}{2} + \frac{2}{\sqrt{x^3}} + 8^x \ln 8$$

$\square$

Primjer 166. Deriviraj funkciju $y = x^2 \ln x$.

Rješenje. $y' = (x^2)' \ln x + x^2 (\ln x)' = 2x \ln x + x^2 \frac{1}{x} = 2x \ln x + x$

$\square$

Primjer 167. Deriviraj funkciju $y = \tan x$.

Rješenje. $y = \frac{\sin x}{\cos x}$
$$y' = \frac{(\sin x)' \cos x - (\sin x)(\cos x)'}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$\square$

Primjer 168. Deriviraj funkciju $y = (x^2+1)e^x \arctan x$.

Rješenje. $y' = \left[(x^2+1)\cdot(e^x \arctan x)\right]' =$
$$= (x^2+1)' e^x \arctan x + (x^2+1)(e^x \arctan x)' =$$
$$= 2x e^x \arctan x + (x^2+1)\left(e^x \arctan x + e^x \frac{1}{x^2+1}\right) =$$
$$= e^x\left[(x+1)^2 \arctan x + 1\right]$$

$\square$

Primjer 169. Deriviraj funkciju $y = \dfrac{x^3 - x\ln x + 3}{x^2}$.

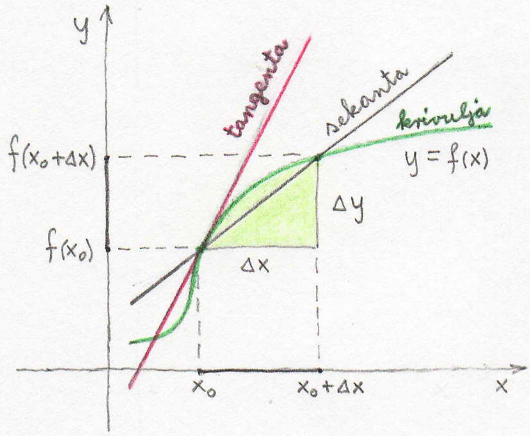
Rješenje.
$$y = x - \frac{\ln x}{x} + 3x^{-2}$$
$$y' = 1 - \frac{\frac{1}{x}x - \ln x}{x^2} - 6x^{-3} = 1 - \frac{1-\ln x}{x^2} - \frac{6}{x^3} =$$
$$= \frac{x^3 + x\ln x - x - 6}{x^3}$$
□

4. Tangenta

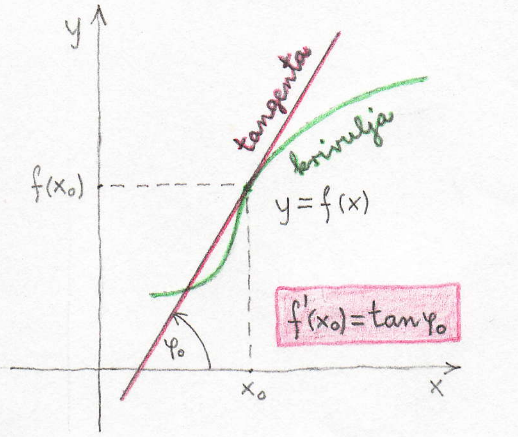
Neka je x_0 unutarnji broj područja definicije funkcije $y = f(x)$. Želimo pronaći jednostavnu funkciju $y = ax + b$ (za $a = 0$ konstanta ili za $a \neq 0$ linearni polinom) koja najbolje "oponaša" (aproksimira) funkciju $f(x)$ u broju x_0. Izražavajući se geometrijski, želimo pronaći pravac $y = ax + b$ koji se najbolje "priljubljuje" uz krivulju (graf funkcije) $y = f(x)$ u točki (x_0, y_0), $y_0 = f(x_0)$. Taj se pravac zove **tangenta**.

Budući da tangenta mora prolaziti točkom (x_0, y_0) i da joj je koeficijent nagiba označen s a, njena jednadžba je
$$y - y_0 = a(x - x_0).$$
Treba odrediti koeficijent a. Izmaknimo se malo iz točke x_0 do točke $x_0 + \Delta x$. Sekanta kroz dvije pripadne točke krivulje $y = f(x)$ ima koeficijent nagiba $\frac{\Delta y}{\Delta x}$. Tangenta je valjda granični slučaj sekante, što će reći
$$a = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0).$$

Jednadžba tangente krivulje $y = f(x)$ u njenoj točki s apscisom x_0, uz $y_0 = f(x_0)$ i $y_0' = f'(x_0)$, dobiva svoj konačni oblik:
$$\boxed{y - y_0 = y_0'(x - x_0)}.$$



tangenta kao granični slučaj sekante



geometrijski smisao derivacije

Primjer 170. Odredi jednadžbu tangente krivulje $y = f(x) = \ln x - \sqrt{x}$ u točki s apscisom $x = 1$, a zatim približno izračunaj $f\left(\frac{6}{5}\right)$.

Rješenje. $x_0 = 1$, $y_0 = f(1) = \ln 1 - \sqrt{1} = -1$

$$y' = f'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$y'_0 = f'(1) = \frac{1}{1} - \frac{1}{2\sqrt{1}} = \frac{1}{2}$$

$$y + 1 = \frac{1}{2}(x - 1)$$

$$y = \frac{1}{2}x - \frac{3}{2}$$ eksplicitna jednadžba tangente

$$f\left(\frac{6}{5}\right) \approx \frac{1}{2} \cdot \frac{6}{5} - \frac{3}{2} = -\frac{9}{10}$$

□

Primjer 171. Odredi jednadžbu tangente, krivulje $y = e^x$, koja s pozitivnim smjerom osi x zatvara kut od 45°.

Rješenje. Geometrijski smisao derivacije kaže da je

$$y'_0 = \tan 45° = 1.$$

Uvrštavanjem $y' = 1$ u jednadžbu derivacije $y' = e^x$ izlazi $x = 0$ tj. $x_0 = 0$, a uvrštavanjem $x = 0$ u jednadžbu krivulje $y = e^x$ proizlazi $y = 1$ tj. $y_0 = 1$.

Jednadžba tangente je

$$y - 1 = 1(x - 0) \text{ tj. } y = x + 1.$$

□

Primjer 172. Odredi jednadžbu tangente parabole $y=\frac{1}{4}x^2-2x+5$, usporedne sa sekantom koja prolazi sjecištem parabole s osi y i tjemenom parabole.

Rješenje. Sjecište parabole s osi y $(x=0)$ je točka $A(0,5)$. Svođenjem jednadžbe parabole na kanonski oblik,

$$y=\frac{1}{4}\left[x^2-8x+20\right]=\frac{1}{4}\left[(x-4)^2-16+20\right]=\frac{1}{4}(x-4)^2+1,$$

očituju se koordinate tjemena $B(4,1)$. Slijedi račun:

$$y'=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}$$

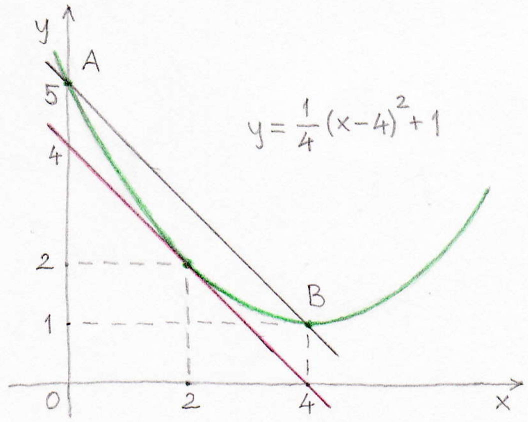
$$\frac{1}{2}x-2=-1$$

$$x=2$$

$$x_0=2,\ y_0=2,\ y_0'=-1$$

$$y-2=-(x-2)$$

$$y=-x+4$$



□

Uz tangentu krivulje $y=f(x)$ u njenoj točki (x_0,y_0), se veže pravac okomit na tangentu, a zove se **normala**. Njen je koeficijent nagiba $-\frac{1}{y_0'}$ (recipročna vrijednost od $y_0'\neq 0$ suprotnog predznaka), a jednadžba

$$\boxed{y-y_0=-\frac{1}{y_0'}(x-x_0)}\ .$$

Primjer 173. Odredi jednadžbu normale krivulje $y=\sqrt[3]{x}-2$ u njenom sjecištu s apscisom.

Rješenje.

$$y_0=0$$

$$\sqrt[3]{x}-2=0 \qquad y'=\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$$

$$x=8 \text{ tj. } x_0=8 \qquad y_0'=\frac{1}{3\sqrt[3]{8^2}}=\frac{1}{12}$$

$$y-0=-12(x-8)$$

$y=-12x+96$ eksplicitna jednadžba normale

□

Primjer 174. Pronađi tangente parabole $y=x^2+2x$ koje prolaze točkom $A(1,2)$.

Rješenje. Točka A ne pripada paraboli. Jednadžbu tangente $y-y_0=y_0'(x-x_0)$ ćemo prilagoditi zadanoj točki i paraboli te ju svesti na jednadžbu s nepoznanicom x_0:

$x=1,\ y=2$ jer tangenta prolazi točkom A

$y_0=x_0^2+2x_0$ jer točka (x_0,y_0) pripada paraboli

$y'=2x+2\ ,\ y_0'=2x_0+2$

$$2-(x_0^2+2x_0)=(2x_0+2)(1-x_0)$$

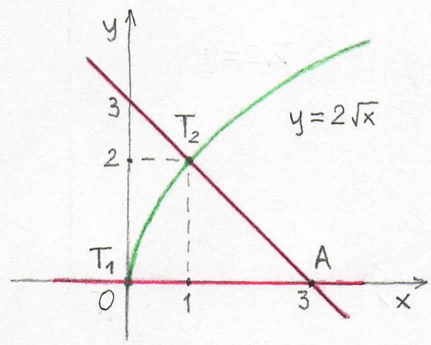
$$x_0^2-2x_0=x_0(x_0-2)=0$$

$x_1=x_{01}=0$	$x_2=x_{02}=2$
$y_1=0^2+2\cdot 0=0$	$y_2=2^2+2\cdot 2=8$
$y_1'=2\cdot 0+2=2$	$y_2'=2\cdot 2+2=6$
$y-0=2(x-0)$	$y-8=6(x-2)$
$y=2x$	$y=6x-4$

□

Primjer 175. Izračunaj najkraću udaljenost točke $A(3,0)$ od poluparabole $y=2\sqrt{x}$.

Rješenje. Treba pronaći točke poluparabole čija normala prolazi točkom A. Prilagodimo jednadžbu normale $y-y_0=-\frac{1}{y_0'}(x-x_0)$ točki A i poluparaboli:



$x=3\ ,\ y=0\ ,\ y_0=2\sqrt{x_0}\ ,\ y_0'=\frac{1}{\sqrt{x_0}}$

$$0-2\sqrt{x_0}=-\sqrt{x_0}\,(3-x_0)$$

$$\sqrt{x_0}\,(x_0-1)=0$$

$x_1=x_{01}=0,\ y_1=0$ $\quad$ $x_2=x_{02}=1,\ y_2=2$

$T_1(0,0)$ $\quad$ $T_2(1,2)$

Broj $x_1=0$ nije u domeni derivacije poluparabole. Rješenjem

$$d(A,T_2)=\sqrt{(1-3)^2+(2-0)^2}=2\sqrt{2}$$

su obuhvaćene sve točke poluparabole osim ishodišta T_1. Budući da je $d(A,T_1)=3$, kao najkraća udaljenost ostaje $d=2\sqrt{2}$.

Dodatak. Pravac $y=0$ je normala poluparabole s desne strane (desna normala) u T_1, dok je pravac $y=-x+3$ normala poluparabole (dvostrana normala) u T_2.

□

Primjer 176. Odredi kut u sjecištu parabole $y=x^2$ i hiperbole $y=\frac{1}{x}$.

Rješenje. Kut u sjecištu dviju krivulja je kut njihovih tangenti u tom sjecištu.

Sjecište :

$$x^2=\frac{1}{x}$$

$$x=1,\ y=1,\ S(1,1)$$

Koeficijenti nagiba tangenti :

$$y=x^2,\ y'=2x,\ a_1=2 \qquad\qquad y=\frac{1}{x},\ y'=-\frac{1}{x^2},\ a_2=-1$$

Kut :

$$\tan\varphi=\left|\frac{a_1-a_2}{1+a_1a_2}\right|=\left|\frac{2+1}{1-2}\right|=3$$

$$\varphi=\operatorname{arc}\tan 3=71^\circ 33' 54''$$

□

Primjer 177. Odredi jednadžbe tangente i normale krivulje $x=y^3+y^2$ u točki s ordinatom $y=-2$.

Rješenje. $y_0=-2\ ,\ x_0=(-2)^3+(-2)^2=-4$

Budući da je krivulja zadana jednadžbom $x=f(y)$ zamišljat ćemo da je y varijabla, a x funkcija :

$$x'=3y^2+2y\ ,\quad x_0'=3\cdot(-2)^2+2\cdot(-2)=8$$

tangenta	normala
$x-x_0=x_0'(y-y_0)$	$x-x_0=-\frac{1}{x_0'}(y-y_0)$
$x+4=8(y+2)$	$x+4=-\frac{1}{8}(y+2)$
$x-8y=12$	$8x+y=-34$

□

Primjedba. Poput Primjera 177 se može riješiti i Primjer 175 s krivuljom $x=\frac{1}{4}y^2$ za $y\geq 0$.

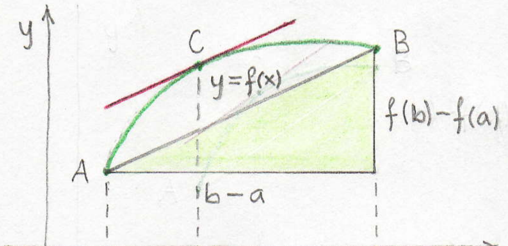
5. Teorem o srednjoj vrijednosti

Teoremi o srednjoj vrijednosti su osnova diferencijalnog računa. Jedan se od njih, u literaturi poznat kao Lagrangeov teorem srednje vrijednosti, ističe zbog svoje jednostavnosti i važnosti. Taj se teorem može geometrijski lako predočiti, a dovoljno je općenit i daje niz korisnih posljedica.

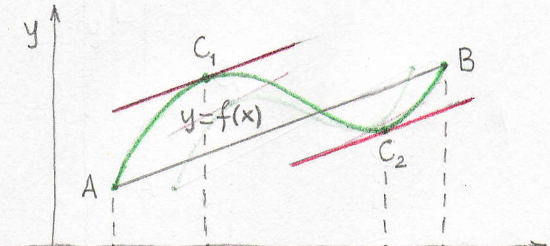
Teorem (Lagrangeov teorem srednje vrijednosti). Neka je funkcija $f(x)$ neprekinuta na zatvorenom intervalu $[a, b]$ i derivabilna na otvorenom intervalu $\langle a, b\rangle$. Tada postoji bar jedna međuvrijednost (srednja vrijednost) c iz $\langle a, b\rangle$ za koju je

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} .$$

Umjesto podužeg analitičkog dokaza zadovoljit ćemo se geometrijskim objašnjenjem i slikom. Broj $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ je koeficijent nagiba sekante koja prolazi rubnim točkama $A(a, f(a))$ i $B(b, f(b))$. Ta će sekanta translacijom postati tangenta bar u jednoj unutarnjoj točki $C(c, f(c))$ derivabilne krivulje $y = f(x)$. Koeficijent nagiba te tangente iznosi $f'(c)$. Koeficijent nagiba tangente i sekante je jedan te isti pa mora biti zadovoljena jednakost iz teorema.



jedna međuvrijednost



dvije međuvrijednosti

Primjer 178. Ako su za funkciju $f(x) = \sqrt{x}$ ispunjeni uvjeti teorema o srednjoj vrijednosti na intervalu između 0 i 1, odredi međuvrijednost c.

Rješenje. Funkcija $f(x)=\sqrt{x}=x^{\frac{1}{2}}$ je elementarna funkcija neprekinuta na cijelom području definicije $[0,+\infty\rangle$ koje sadrži zatvoreni interval $[0,1]$. Derivacija $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$ postoji na intervalu $\langle 0,+\infty\rangle$ koji sadrži otvoreni interval $\langle 0,1\rangle$. Uvjeti teorema su ispunjeni.

Odredimo međuvrijednost c:

$$f'(c)=\frac{f(1)-f(0)}{1-0}$$

$$\frac{1}{2\sqrt{c}}=1$$

$$c=\frac{1}{4}$$

□

Teorem ima korisne posljedice, praktične i teorijske.

Ako smo pravocrtni put od mjesta A do mjesta B koja su udaljena 320 [km] prešli automobilom za 4 [h], tada je bar u jednoj točki C našeg puta brzina automobila iznosila

$$v=\frac{320}{4}=80\ [km/h].$$

Za funkciju $f(x)$ derivabilnu na otvorenom intervalu D (npr. $D=\langle -1,2\rangle$, $D=\langle -\infty,1\rangle$, $D=\langle 2,+\infty\rangle$, $D=\langle -\infty,+\infty\rangle$) vrijede implikacije:

$$f'(x)=0 \Rightarrow f(x) \text{ je konstanta}$$
$$f'(x)>0 \Rightarrow f(x) \text{ je rastuća}$$
$$f'(x)<0 \Rightarrow f(x) \text{ je padajuća}$$

Dokažimo prvu implikaciju. Neka su a i b bilo koja dva broja iz intervala D. Predpostavimo da je $a<b$. Dovoljno je dokazati da je $f(a)=f(b)$. Funkcija $f(x)$ zadovoljava uvjete teorema o srednjoj vrijednosti na intervalu između a i b jer je $[a,b]$ sadržan u D. Po teoremu postoji c iz $\langle a,b\rangle$ za koji je

$$f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

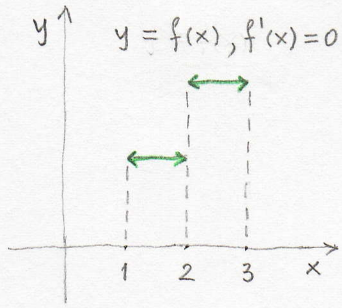
Ali $f'(c)=0$ jer je po predpostavki $f'(x)=0$ za svaki x iz D. Zato je

$$f(a)=f(b).$$

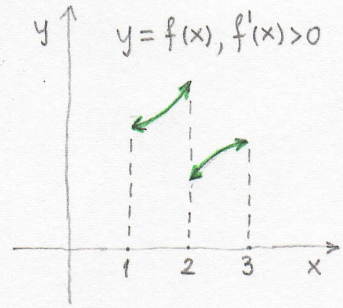
Na sličan se način mogu dokazati preostale dvije implikacije.

Sve tri tvrdnje također vrijede za funkciju $f(x)$ neprekinutu na bilo kojem intervalu D i derivabilnu na njegovom unutarnjem području (npr. za $D = \langle -1, 2]$ unutarnje područje je $\langle -1, 2\rangle$).

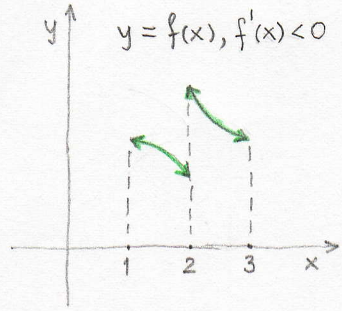
Ako je funkcija $f(x)$ derivabilna na D, a D je unija dvaju ili više razdvojenih (disjunktnih) intervala, npr. $D = \langle 1, 2\rangle \cup \langle 2, 3\rangle$, tada za nju ne mora vrijediti ni jedna od triju navedenih implikacija. One vrijede tek na svakom pojedinom intervalu.



$f(x)$ nije konstanta



$f(x)$ nije rastuća



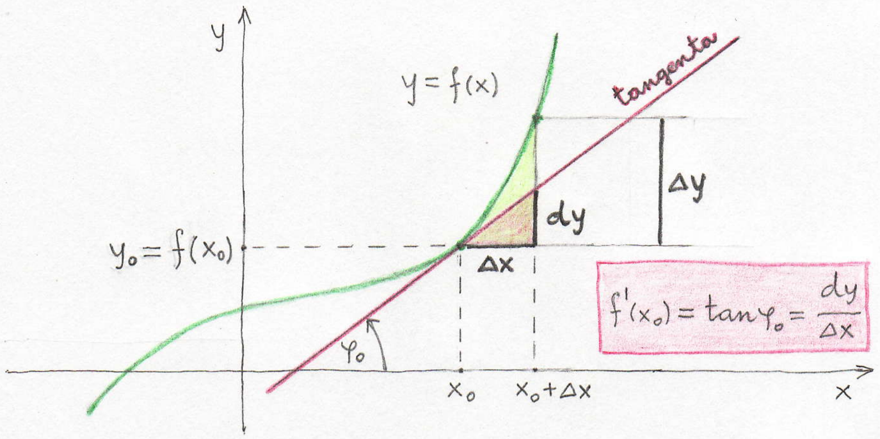
$f(x)$ nije padajuća

6. Diferencijal

Pojam diferencijala funkcije je moguće uvesti na više načina. Postojanje diferencijala je ekvivalentno postojanju derivacije, tj. funkcija ima diferencijal onda i samo onda kada ima derivaciju. Najkraći put za uvođenje diferencijala vodi preko derivacije. Diferencijal funkcije je umnožak derivacije funkcije i prirasta promjenljive. Iskažimo to malo određenije u definiciji koja slijedi.

Definicija. Neka je funkcija $y = f(x)$ definirana u okolini točke x_0 i derivabilna u x_0. Tada je **diferencijal** funkcije $y = f(x)$, u **točki** x_0 za prirast Δx (pri prijelazu promjenljive x od x_0 do $x_0 + \Delta x$), broj

$$dy = df(x_0; \Delta x) = f'(x_0) \cdot \Delta x .$$



diferencijal funkcije u točki x_0 za prirast Δx

Na slici su istaknute tri osnovne veličine diferencijalnog računa: prirast promjenljive Δx, prirast funkcije Δy i diferencijal funkcije dy. U razvoju teorije i u primjenama je bitan odnos između prirasta Δy i diferencijala dy. Slika sugerira da je za male Δx prirast Δy približno jednak diferencijalu dy. Račun to lako potvrđuje:

$$\Delta x \approx 0 \Rightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} \approx \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0) = \frac{dy}{\Delta x} \Rightarrow \Delta y \approx dy$$

Slika još pokazuje da se veličine Δy i dy "preklapaju" za svaki Δx. Čini se da je Δy složenija veličina, a dy jednostavnija. Iz ovih opažanja proizlazi da Δy "sadrži" dy. Vrlo je teško iz Δy "izvaditi" dy, a danas se to radi uz posredovanje derivacije.

Ipak, bar da opravdamo predhodna opažanja, pokažimo još jedan način uvođenja diferencijala funkcije $y = f(x)$ u točki x_0 za prirast Δx. Diferencijal dy je veličina određena s dva uvjeta:

$$dy = a\Delta x \text{ za neki broj } a \quad \text{i} \quad \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{dy} = 1.$$

Za funkciju koja ima diferencijal u x_0 još se kaže da je **diferencijabilna** u x_0. Iz zadanih uvjeta nije teško odrediti broj a odnosno diferencijal dy:

$$1 = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{a\Delta x} = \frac{1}{a} \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{a} f'(x_0)$$

$$a = f'(x_0)\,, \quad dy = f'(x_0)\,\Delta x$$

Kažimo još da se diferencijal $dy = df(x_0; \Delta x) = f'(x_0)\Delta x$ može zamišljati kao linearna funkcija promjenljive Δx s koeficijentom $f'(x_0)$.

Naziv diferencijal potječe od latinskog pridjeva differentialis izvedenog iz imenice differentia (hrv. razlika).

Primjer 179. Izračunaj diferencijal funkcije $f(x) = x^2 - 5\ln x$ u točki $x_0 = 5$ za prirast $\Delta x = -0{,}01$.

Rješenje. $f'(x) = 2x - \frac{5}{x}$ $\qquad f'(5) = 2\cdot 5 - \frac{5}{5} = 9$

$$df(5; -0{,}01) = f'(5)\cdot(-0{,}01) = 9\cdot(-0{,}01) = -0{,}09$$

□

Primjer 180. Odredi diferencijal funkcije $f(x) = x + \sin x$ u bilo kojoj točki x za bilo koji prirast Δx.

Rješenje. $y = f(x)$, $dy = df(x; \Delta x) = f'(x)\Delta x = (1 + \cos x)\Delta x$

□

Primjer 181. Izračunaj diferencijal funkcije $f(x) = \sqrt{x} - \sqrt[3]{x}$ u njenoj nul-točki za prirast $\Delta x = 0{,}2$.

Rješenje. Nul-točke:

$$\sqrt{x} - \sqrt[3]{x} = 0$$
$$\sqrt{x} = \sqrt[3]{x} \quad /^6$$
$$x^3 = x^2$$
$$x^2(x-1) = 0$$
$$x = 0, \ x = 1$$

Diferencijal općenito:

$$f(x) = x^{\frac{1}{2}} - x^{\frac{1}{3}}$$
$$f'(x) = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} = $$
$$= \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$$
$$df(x; \Delta x) = f'(x)\Delta x =$$
$$= \left(\frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}\right)\Delta x$$

Diferencijal ima smisla samo u nul-točki $x = 1$:

$$df(1; 0{,}2) = \left(\frac{1}{2\sqrt{1}} - \frac{1}{3\sqrt[3]{1^2}}\right)\cdot 0{,}2 = \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{5} = \frac{1}{30}$$

□

Primjer 182. Odredi diferencijal funkcije $f(x) = x^2 - 3x + 1$ "vađenjem" člana s Δx iz njenog prirasta.

Rješenje. $y = f(x)$

Prirast funkcije: $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) =$

$$= (x+\Delta x)^2 - 3(x+\Delta x) + 1 - x^2 + 3x - 1 =$$

$$= x^2 + 2x\Delta x + \Delta x^2 - 3x - 3\Delta x - x^2 + 3x =$$

$$= \boxed{(2x-3)\Delta x} + \Delta x^2$$

Diferencijal funkcije: $dy = (2x-3)\Delta x$

□

Primjer 183. Odredi diferencijal funkcije $f(x) = \frac{1}{x}$ "vađenjem" člana s Δx iz njenog prirasta.

Rješenje. Koristit ćemo formulu za geometrijski red:

$$\frac{1}{1-q} = 1 + q + q^2 + \cdots \qquad \text{za } |q| < 1.$$

Prirast funkcije: $\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x) = \frac{1}{x+\Delta x} - \frac{1}{x} =$

$$= -\frac{\Delta x}{x^2 + x\Delta x} = -\frac{\Delta x}{x^2}\,\frac{1}{1-\left(-\frac{\Delta x}{x}\right)} =$$

$$= -\frac{\Delta x}{x^2}\left(1 - \frac{\Delta x}{x} + \frac{\Delta x^2}{x^2} - \cdots\right) =$$

$$= \boxed{-\frac{1}{x^2}\Delta x} + \frac{1}{x^3}\Delta x^2 - \frac{1}{x^4}\Delta x^3 + \cdots$$

Diferencijal funkcije: $dy = -\frac{1}{x^2}\Delta x$

□

Primjer 184. Pomoću diferencijala približno izračunaj $\sqrt[4]{0{,}8}$.

Rješenje. Izvedimo traženi račun pomoću funkcije $f(x) = \sqrt[4]{x}$ i približne jednakosti

$$\Delta y \approx dy \quad \text{za } \Delta x \approx 0.$$

Odaberimo $x_0 = 1$ zato što je $1 \approx 0{,}8$ i zato što je lako izračunati $f(1) = \sqrt[4]{1} = 1$. Trebamo približno odrediti $\sqrt[4]{0{,}8} = f(0{,}8)$. Dalje slijedi:

$$x_0 = 1\,,\quad x_0 + \Delta x = 0{,}8 \implies \Delta x = 0{,}8 - 1 = -0{,}2$$

$$f(x) = \sqrt[4]{x} = x^{\frac{1}{4}}\,,\quad f'(x) = \frac{1}{4}x^{-\frac{3}{4}} = \frac{1}{4\sqrt[4]{x^3}}\,,\quad f'(1) = \frac{1}{4}$$

$$dy = df(1;-0{,}2) = f'(1)\cdot(-0{,}2) = \frac{1}{4}\cdot(-0{,}2) = -0{,}05$$

$$\Delta y = f(x_0+\Delta x) - f(x_0) \approx dy$$
$$f(x_0+\Delta x) \approx f(x_0) + dy$$
$$f(0{,}8) \approx f(1) + df(1;-0{,}2) = 1 - 0{,}05 = 0{,}95$$
$$\sqrt[4]{0{,}8} \approx 0{,}95$$

□

Diferencijal identične funkcije $y = x$ iznosi $dy = \Delta x$, pa ako u dy umjesto y uvrstimo x, nastaje izraz

$$dx = \Delta x\,.$$

Zato možemo reći da je diferencijal promjenljive jednak njenom prirastu, a vezu između diferencijala i derivacije funkcije $y = f(x)$ skladno izraziti s

$$\boxed{dy = y'dx} \quad \text{ili} \quad \boxed{y' = \frac{dy}{dx}}\,.$$

Posljednji izrazi imaju još gotovo "magičnu moć" u izvođenju različitih formula diferencijalnog i integralnog računa.

7. Derivacija složene funkcije

Funkciju $y = \ln(x+1)$ ne možemo derivirati ni pomoću tablice ni pomoću računskih pravila. Služeći se dosadašnjim znanjem o derivacijama mogli bismo ju derivirati po definiciji, ali to je zamorno. Funkcija y je složena (spojena) od funkcija $f(x) = \ln x$ i $g(x) = x+1$, tj. $y = f(g(x))$. Funkcije $f(x)$ i $g(x)$ znamo derivirati.

Derivaciju složene funkcije $y = f(g(x))$ želimo izraziti pomoću derivacija funkcija f i g. Prvo, uz oznaku $u = g(x)$, funkciju y zapišemo kao jednostavnu: $y = f(u)$. Potom, ubacivanjem diferencijala du, dobijemo

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = \frac{df(u)}{du} \cdot \frac{dg(x)}{dx},$$

a odatle

$$y' = f'(u) \cdot g'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x).$$

Izveli smo tzv. **lančano pravilo**, za derivaciju složene funkcije, u diferencijalnom i derivacijskom obliku:

$$y = f(g(x)) \;;\; u = g(x),\; y = f(u)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} \quad ; \quad y' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

Primjer 185. Deriviraj funkciju $y = \ln(x+1)$.

Rješenje. Pomoću formule $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$:

$$u = x+1,\; y = \ln u$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{u} \cdot 1 = \frac{1}{x+1}$$

Pomoću formule $y' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$:

$$f(x) = \ln x,\; g(x) = x+1$$

$$y' = \frac{1}{x+1} \cdot 1 = \frac{1}{x+1}$$

Pomoću formule u derivacijskom obliku se može derivirati, bez posebnog ispisivanja funkcija $f(x)$ i $g(x)$, ovako: derivacija y-a je derivacija $\ln$-a u "molekuli" $x+1$, puta, derivacija "molekule" $x+1$.

□

Primjer 186. Deriviraj funkciju $y = \sqrt{x^3+x}$.

Rješenje. Diferencijalni način:

$$u = x^3 + x,\; y = \sqrt{u} = u^{\frac{1}{2}}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2} u^{-\frac{1}{2}} \cdot (3x^2+1) = \frac{3x^2+1}{2\sqrt{x^3+x}}$$

Derivacijski način (bez ispisivanja $f(x)$ i $g(x)$):

$$y=\sqrt{x^3+x}=(x^3+x)^{\frac{1}{2}}=\exp^{\frac{1}{2}}(x^3+x)$$

derivacija y-a je

derivacija $\exp^{\frac{1}{2}}$-a u "molekuli" x^3+x, puta, derivacija "molekule" x^3+x

$$y'=\frac{1}{2}(x^3+x)^{-\frac{1}{2}}\cdot(3x^2+1)=\frac{3x^2+1}{2\sqrt{x^3+x}}$$

□

Primjer 187. Deriviraj funkciju $y=\sqrt[3]{\sin^4 x}$.

Rješenje.
$$y=\sin^{\frac{4}{3}}x=(\sin x)^{\frac{4}{3}}$$
$$y'=\frac{4}{3}(\sin x)^{\frac{1}{3}}\cdot\cos x=\frac{4}{3}\sqrt[3]{\sin x}\cdot\cos x$$

□

Primjer 188. Deriviraj funkciju $y=e^{x-\cos x}$.

Rješenje.
$$y'=e^{x-\cos x}\cdot(1+\sin x)$$

□

"Igrajući" se diferencijalima dx i dy možemo odrediti derivaciju inverzne funkcije:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\frac{dx}{dy}}\,.$$

Odigrajmo to u narednom primjeru.

Primjer 189. Izvedi derivaciju funkcije $y=\arcsin x$ (tablica osnovnih derivacija).

Rješenje. Zamjenom uloga varijabli i zamjenom uloga diferencijala, slijedi:

$$y=\arcsin x \Rightarrow x=\sin y$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\frac{dx}{dy}}=\frac{1}{\cos y}=\frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

□

Lančano pravilo za derivaciju dvosložne funkcije se može poopćiti na višesložnu funkciju. Za trosložnu funkciju poopćenje izgleda ovako:

$$\boxed{\begin{gathered} y = f(g(h(x))) \\ y' = f'(g(h(x)) \cdot g'(h(x)) \cdot h'(x) \end{gathered}}$$

Primjer 190. Deriviraj funkciju $y = \cos \arcsin \cos x$.

Rješenje.
$$y = \cos(\arcsin(\cos x))$$
$$y' = \cos'(\arcsin(\cos x)) \cdot \arcsin'(\cos x) \cdot \cos' x =$$
$$= -\sin(\arcsin(\cos x)) \cdot \frac{1}{\sqrt{1-\cos^2 x}} \cdot (-\sin x) =$$
$$= \cos x \cdot \frac{1}{|\sin x|} \cdot \sin x = \frac{\sin 2x}{2|\sin x|}$$

□

Primjer 191. Pronađi točke krivulje $y = \log^2(x^2-3)+1$ u kojima je tangenta usporedna s osi x.

Rješenje. Iz jednadžbe osi x, $y=0$, se može očitati njen koeficijent nagiba $a=0$. Treba pronaći točke (x,y) zadane krivulje u kojima je derivacija $y'=0$.

Određivanje derivacije krivulje y:
$$y = [\log(x^2-3)]^2 + 1$$
$$y' = 2\log(x^2-3) \cdot \frac{1}{(x^2-3)\ln 10} \cdot 2x =$$
$$= \frac{4x\log(x^2-3)}{(x^2-3)\ln 10}$$

Rješavanje jednadžbe $y'=0$:
$$x\log(x^2-3) = 0$$

$x = 0$ nije u domeni krivulje y

$$\log(x^2-3) = 0$$
$$x^2 - 3 = 1 \Rightarrow x = \pm 2$$

$x_1 = 2$, $y_1 = 1$, $T_1(2,1)$

$x_2 = -2$, $y_2 = 1$, $T_2(-2,1)$

□

8. Derivabilnost elementarnih funkcija

Primjer 192. Pronaći točke područja definicije funkcije $f(x)$ u kojima ona nema derivaciju:

(1) $f(x)=\frac{1}{x}$ (2) $f(x)=\sqrt{\ln x}$ (3) $f(x)=\sqrt[3]{x^2-2x}$

Rješenje.

(1) $D_f=\mathbb{R}\setminus\{0\}$, $f'(x)=-\frac{1}{x^2}$, $D_{f'}=\mathbb{R}\setminus\{0\}$

Ima derivaciju u svim točkama područja definicije.

(2) $D_f=[1,+\infty\rangle$, $f'(x)=\frac{1}{2x\sqrt{\ln x}}$, $D_{f'}=\langle 1,+\infty\rangle$

Nema derivaciju s desne strane u točki $x=1$.

(3) $D_f=\mathbb{R}$, $f'(x)=\frac{2(x-1)}{3\sqrt[3]{(x^2-2x)^2}}$, $D_{f'}=\mathbb{R}\setminus\{0,2\}$

Nema derivaciju u točkama $x=0$ i $x=2$.

□

Može se dokazati da elementarna funkcija nema derivaciju u najviše konačno mnogo točaka svog područja definicije. Drugačije rečeno, elementarna funkcija ima derivaciju u svim točkama svog područja definicije, osim možda u konačno mnogo točaka.

Je li derivacija elementarne funkcije opet elementarna funkcija? Prisjetimo se, elementarna funkcija je zbroj, razlika, umnožak, količnik ili spoj konačnog broja osnovnih elementarnih funkcija.

Prvo, derivacija osnovne elementarne funkcije je elementarna funkcija. To slijedi iz Tablice osnovnih derivacija i računskih pravila za derivaciju zbroja, razlike, umnožka i količnika. Drugo, deriviranjem zbroja, razlike, umnožka, količnika i spoja konačnog broja osnovnih elementarnih funkcija proizlazi elementarna funkcija. Dakle, derivacija elementarne funkcije je također elementarna funkcija.

Važne činjenice iz ove lekcije koje govore o derivaciji elementarnih funkcija obuhvatimo jednim teoremom.

Teorem. Sve elementarne funkcije su derivabilne, svaka na cijelom svom području definicije, osim možda u konačno mnogo točaka. Derivacija elementarne funkcije je opet elementarna funkcija.

9. Derivacija implicitno zadane funkcije

Služeći se pravilima deriviranja, a posebno pravilom za derivaciju složene funkcije, možemo odrediti i derivaciju funkcije zadane implicitnom jednadžbom.

Primjer 193. Odredi derivaciju funkcije $y = f(x)$ zadane implicitnom jednadžbom $\sin x - \sin y = 2x - 2y$.

Rješenje. Zadanu jednadžbu deriviramo po x $\left({}' = \frac{d}{dx}\right)$ imajući u vidu da je $\sin y = \sin f(x)$ složena funkcija:

$$\sin x - \sin y = 2x - 2y \; /'$$

$$\cos x - y'\cos y = 2 - 2y'$$

$$y' = \frac{2-\cos x}{2-\cos y}$$

□

Primjer 194. Izvedi derivaciju opće potencije $y = x^a$ (tablica osnovnih derivacija).

Rješenje.

$$y = x^a \; / \ln$$

$$\ln y = a \ln x \; /'$$

$$\frac{1}{y} y' = a \frac{1}{x}$$

$$y' = \frac{ay}{x} = \frac{a x^a}{x} = a x^{a-1}$$

□

Primjer 195. Deriviraj funkciju $y = x^{\sin x}$.

Rješenje.

$$y = x^{\sin x} \ / \ln$$

$$\ln y = \sin x \cdot \ln x \ /'$$

$$\frac{1}{y} y' = \cos x \cdot \ln x + \sin x \cdot \frac{1}{x}$$

$$y' = y\left(\cos x \cdot \ln x + \frac{\sin x}{x}\right) = x^{\sin x}\left(\cos x \cdot \ln x + \frac{\sin x}{x}\right)$$

□

Primjer 196. Izračunaj y' za $x = 4$, ako je $y^3 + (x-4)y + 1 = 0$.

Rješenje. Uvrštavanjem $x = 4$ u zadanu jednadžbu izlazi $y^3 + 1 = 0$, a odatle $y = -1$.

Deriviranjem zadane jednadžbe dobiva se jednadžba

$$3y^2 y' + y + (x-4)y' = 0$$

iz koje nakon uvrštavanja $x = 4$ i $y = -1$ slijedi

$$3y' - 1 = 0,$$

a odatle

$$y' = \frac{1}{3}.$$

□

Primjer 197. Odredi jednadžbe tangente i normale krivulje $\sqrt{xy} - \ln y = 3$ u točki čija ordinata iznosi 1.

Rješenje. U jednadžbu krivulje uvrstimo $y = 1$ i dobijemo $\sqrt{x} = 3$ tj. $x = 9$. Dakle: $x_0 = 9$, $y_0 = 1$. Slijedi račun za y_0':

$$(xy)^{\frac{1}{2}} - \ln y = 3 \ /'$$

$$\frac{1}{2}(xy)^{-\frac{1}{2}}(y + xy') - \frac{y'}{y} = 0$$

$$\frac{y + xy'}{2\sqrt{xy}} - \frac{y'}{y} = 0$$

$$x = 9, \ y = 1$$

$$\frac{1 + 9y'}{6} - \frac{y'}{1} = 0$$

$$y' = -\frac{1}{3} \quad \text{tj.} \quad y_0' = -\frac{1}{3}$$

Jednadžba tangente:

$$y - 1 = -\frac{1}{3}(x - 9)$$

$$y = -\frac{1}{3}x + 4$$

Jednadžba normale:

$$y - 1 = 3(x - 9)$$

$$y = 3x - 26$$

□

10. Derivacija parametarski zadane funkcije

Funkcija $y = y(x)$ je zadana parametarskim jednadžbama $x = x(t)$ i $y = y(t)$. Derivaciju y' funkcije y ćemo odrediti ubacivanjem diferencijala dt:

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}\,.$$

Prihvatimo li uobičajene oznake

$$\boxed{\dot{x} = \frac{dx}{dt} \quad i \quad \dot{y} = \frac{dy}{dt}}\,,$$

možemo zapisati

$$\boxed{y' = \frac{\dot{y}}{\dot{x}}}\,.$$

Primjer 198. Odredi derivaciju funkcije $y = y(x)$ zadane parametarskim jednadžbama $x = t^3 + t$ i $y = t^2 - t$.

Rješenje.

$$\dot{x} = 3t^2 + 1\,, \quad \dot{y} = 2t - 1$$

$$y' = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{2t-1}{3t^2+1}$$

□

Primjer 199. Odredi derivaciju funkcije $y = y(x)$ zadane parametarskim jednadžbama $x = 2\sqrt{t + \sin t}$ i $y = \ln(t + \sin t)$.

Rješenje. $\dot{x} = \frac{1+\cos t}{\sqrt{t+\sin t}}\,, \quad \dot{y} = \frac{1+\cos t}{t+\sin t}\,, \quad y' = \frac{1}{\sqrt{t+\sin t}}$

□

Primjer 200. Izračunaj y' za $y = -2$, ako je $x = \operatorname{arctan} t$ i $y = \frac{t-3}{\sqrt{t}}$.

Rješenje. Pronađimo vrijednost parametra t za koju je $y = -2$. Uvrštavanjem $y = -2$ u drugu parametarsku jednadžbu nakon sređivanja izlazi $t + 2\sqrt{t} - 3 = 0$, ili kao kvadratna jednadžba

$$(\sqrt{t})^2 + 2\sqrt{t} - 3 = 0\,.$$

Iz jednog njenog smislenog rješenja $\sqrt{t} = 1$ proizlazi

$$t = 1\,.$$

Sada, za $t=1$ treba izračunati $\dot{x}(1)$ i $\dot{y}(1)$:

$$x = \arctan t \qquad y = t^{\frac{1}{2}} - 3t^{-\frac{1}{2}}$$

$$\dot{x} = \frac{1}{1+t^2} \qquad \dot{y} = \frac{1}{2}t^{-\frac{1}{2}} + \frac{3}{2}t^{-\frac{3}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{t}} + \frac{3}{2\sqrt{t^3}}$$

$$\dot{x}(1) = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2} \qquad \dot{y}(1) = \frac{1}{2} + \frac{3}{2} = 2$$

Na kraju, izračunajmo $y' = y'|_{y=-2} = y'|_{t=1}$:

$$y' = \frac{\dot{y}(1)}{\dot{x}(1)} = \frac{2}{\frac{1}{2}} = 4$$

□

Primjer 201. Pronaći tangente krivulje $y = y(x)$ koje su usporedne s pravcem $9x - 2y = 0$, ako su parametarske jednadžbe krivulje $x = t^2$ i $y = t^3 + 6t$.

Rješenje. Iz eksplicitne jednadžbe pravca $y = \frac{9}{2}x$ očitamo koeficijent nagiba $a = \frac{9}{2}$. Moramo pronaći točke (x, y) zadane krivulje u kojima je derivacija $y' = \frac{9}{2}$. Izračunajmo prvo vrijednosti parametra t za koje vrijedi $y' = \frac{9}{2}$. Iz

$$\frac{9}{2} = y' = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{3t^2+6}{2t}$$

izlazi jednadžba $t^2 - 3t + 2 = 0$ s rješenjima

$$t_1 = 1 \quad i \quad t_2 = 2.$$

Sada možemo odrediti koordinate točaka krivulje i jednadžbe tangenti u tim točkama:

$t_1 = 1$	$t_2 = 2$
$x_1 = 1^2 = 1$	$x_2 = 2^2 = 4$
$y_1 = 1^3 + 6 \cdot 1 = 7$	$y_2 = 2^3 + 6 \cdot 2 = 20$
$T_1(1, 7)$	$T_2(4, 20)$
$y - 7 = \frac{9}{2}(x-1)$	$y - 20 = \frac{9}{2}(x-4)$
$y = \frac{9}{2}x + \frac{5}{2}$	$y = \frac{9}{2}x + 2$

□

11. Derivacije i diferencijali višeg reda

Druga derivacija funkcije $y=f(x)$ (piše se y'' ili $f''(x)$, a čita y dvocrtano ili f dvocrtano od x) je derivacija prve derivacije, treća derivacija (piše se y''' ili $f'''(x)$, a čita y trocrtano ili f trocrtano od x) je opet derivacija druge derivacije itd. Više derivacije se obično bilježe arapskim brojevima u zagradi, a općenita n-ta sa (n). Umjesto druga ili treća derivacija još se kaže derivacija drugog ili trećeg reda.

Drugi diferencijal funkcije $y=f(x)$ (piše se d^2y ili $d^2f(x)$, a čita d dva y ili d dva f od x) je diferencijal prvog diferencijala, treći diferencijal (piše se d^3y ili $d^3f(x)$, a čita d tri y ili d tri f od x) je opet diferencijal drugog diferencijala itd. Umjesto drugi ili treći diferencijal još se kaže diferencijal drugog ili trećeg reda.

Veza između drugog diferencijala i druge derivacije je

$$\begin{aligned} d^2y &= d(dy) = d(y'\Delta x) = (y'\Delta x)'\Delta x = \\ &= y''\Delta x^2 = f''(x)\Delta x^2, \end{aligned}$$

pa je veza između n-tog diferencijala i n-te derivacije

$$d^ny = y^{(n)}\Delta x^n = f^{(n)}(x)\Delta x^n.$$

Uz $dx=\Delta x$, odnos između d^ny i $y^{(n)}$ se izražava formulama

$$\boxed{d^ny = y^{(n)}dx^n} \quad \text{ili} \quad \boxed{y^{(n)} = \frac{d^ny}{dx^n}}.$$

Primjer 202. Odredi treću derivaciju i treći diferencijal funkcije $y=x^2-\sin x$.

Rješenje.

$$\begin{aligned} y' &= 2x-\cos x & dy &= (2x-\cos x)\Delta x \\ y'' &= 2+\sin x & d^2y &= (2+\sin x)\Delta x^2 \\ y''' &= \cos x & d^3y &= (\cos x)\Delta x^3 \end{aligned}$$

□

Primjer 203. Izračunaj treći diferencijal funkcije $f(x)=4\ln\sqrt{1-x}$ u točki $x_0=0$ za prirast $\Delta x=0{,}1$.

Rješenje.
$$f(x)=4\ln(1-x)^{\frac{1}{2}}=2\ln(1-x)$$
$$f'(x)=-2(1-x)^{-1},\ f''(x)=-2(1-x)^{-2},\ f'''(x)=-4(1-x)^{-3},\ f'''(0)=-4$$
$$d^3y=d^3f(0;0{,}1)=f'''(0)\cdot(0{,}1)^3=-0{,}004$$
□

Primjer 204. Izračunaj y'' za $x=0$, ako je $y+e^{xy}=0$.

Rješenje.
$$y+e^{xy}=0\ /'$$
$$y'+(y+xy')e^{xy}=0\ /'$$
$$y''+(2y'+xy'')e^{xy}+(y+xy')^2e^{xy}=0$$

Uvrštavanjem $x=0$ u prvu jednadžbu dobiva se $y=-1$.
Uvrštavanjem $x=0$ i $y=-1$ u drugu jednadžbu dobiva se $y'=1$.
Uvrštavanjem $x=0$, $y=-1$ i $y'=1$ u treću jednadžbu dobiva se
$$y''=-3.$$
□

Primjer 205. Izračunaj y'' za $y=4$, ako je $x=t^2+2$ i $y=t^3+3$.

Rješenje.
$$x=t^2+2 \qquad y=t^3+3$$
$$\dot{x}=2t \qquad \dot{y}=3t^2$$
$$y'=\frac{\dot{y}}{\dot{x}}=\frac{3t^2}{2t}=\frac{3}{2}t$$
$$\dot{(y')}=\frac{3}{2}$$
$$y''=(y')'=\frac{\dot{(y')}}{\dot{x}}=\frac{\frac{3}{2}}{2t}=\frac{3}{4t}$$

Uvrštavanjem $y=4$ u $y=t^3+3$ izlazi $t=1$, a uvrštavanjem $t=1$ u $y''=\frac{3}{4t}$ proizlazi
$$y''=\frac{3}{4}.$$
□

12. Gibanje, brzina i ubrzanje

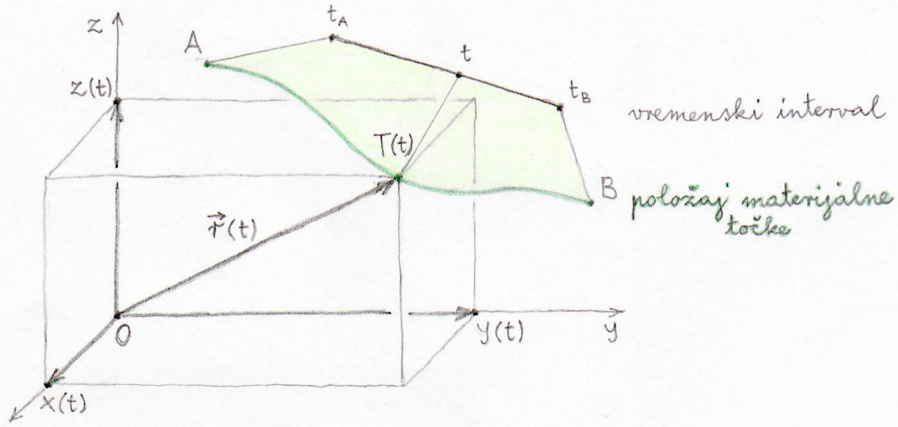
12.1. Gibanje materijalne točke

Želimo pokazati da su brzina i ubrzanje vektori. U toj težnji prvo treba odrediti jednadžbu gibanja.

Materijalna točka se giba u prostoru pod utjecajem nekih sila. Mi promatramo njeno gibanje u vremenskom intervalu $[t_A, t_B]$. Proučimo to gibanje u jednom odabranom koordinatnom sustavu.

U početnom trenutku t_A materijalna točka se nalazi u točki A; u trenutku t, $t_A < t < t_B$, se nalazi u točki $T(t)$; a u završnom trenutku t_B u točki B. Svakoj ovoj točki pridružimo njen radius-vektor $\vec{r}(t)$. Ako koordinate svih radius-vektora možemo izraziti ovisno o vremenu t, dobit ćemo **vektorsko-parametarsku jednadžbu gibanja** materijalne točke u promatranom vremenskom intervalu:

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}, \quad t_A \le t \le t_B .$$



gibanje materijalne točke u prostoru

Izraz $\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$ predstavlja vektorsku funkciju skalarne promjenljive t. Daljnja "obrada" ove vektorske funkcije ovisi o njenim koordinatnim funkcijama $x(t)$, $y(t)$ i $z(t)$.

12.2. Brzina i ubrzanje gibanja materijalne točke

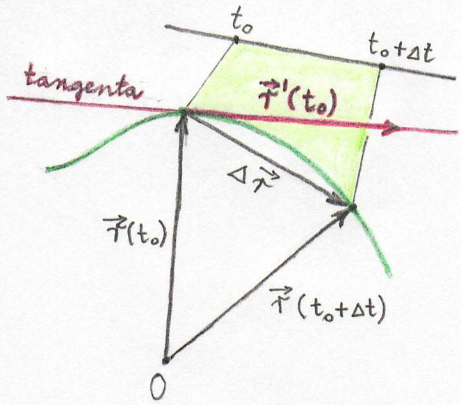
Neka je vektorom položaja

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}, \quad t_A \le t \le t_B$$

određeno gibanje materijalne točke u vremenskom intervalu $[t_A, t_B]$. Zanima nas brzina gibanja materijalne točke u nekom trenutku t_0, $t_A < t_0 < t_B$. Pretpostavimo da postoji vektor

$$\vec{r}\,'(t_0) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{r}(t_0+\Delta t) - \vec{r}(t_0)}{\Delta t}.$$

Tim je vektorom izražena brzina promjene vektora položaja $\vec{r}(t)$ u trenutku t_0, odnosno to je **vektor brzine gibanja** materijalne točke u trenutku t_0.



Ako postoje derivacije $x'(t_0)$, $y'(t_0)$ i $z'(t_0)$, tada su one koordinate vektora $\vec{r}\,'(t_0)$:

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}(t_0+\Delta t) - \vec{r}(t_0) =$$
$$= [x(t_0+\Delta t) - x(t_0)]\vec{i} + [y(t_0+\Delta t) - y_0]\vec{j} + [z(t_0+\Delta t) - z(t_0)]\vec{k} =$$
$$= \Delta x\,\vec{i} + \Delta y\,\vec{j} + \Delta z\,\vec{k}$$
$$\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{\Delta x}{\Delta t}\vec{i} + \frac{\Delta y}{\Delta t}\vec{j} + \frac{\Delta z}{\Delta t}\vec{k}$$
$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \left(\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta t}\right)\vec{i} + \left(\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta t}\right)\vec{j} + \left(\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta z}{\Delta t}\right)\vec{k}$$
$$\vec{r}\,'(t_0) = x'(t_0)\vec{i} + y'(t_0)\vec{j} + z'(t_0)\vec{k}$$

Ako za svaki t, $t_A < t < t_B$, postoje derivacije $x'(t)$, $y'(t)$ i $z'(t)$, tada je vektor brzine

$$\vec{v}(t) = \vec{r}\,'(t) = \frac{d\vec{r}}{dt},$$

tj. brzina je derivacija puta po vremenu.

Na isti način možemo analizirati ubrzanje ili akceleraciju gibanja materijalne točke, tj. brzinu promjene vektora brzine gibanja $\vec{v}(t)$. Doći ćemo do izraza za **vektor ubrzanja gibanja** materijalne točke,

$$\vec{a}(t)=\vec{v}\,'(t)=\vec{r}\,''(t)=\frac{d^2\vec{r}}{dt^2},$$

odnosno do spoznaje da je ubrzanje druga derivacija puta po vremenu.

Primjer 206. Gibanje točke T u prostoru je određeno vektorom položaja $\vec{r}$ ovisno o vremenu t, pravilom

$$\vec{r}=\frac{1}{6}t^3\vec{i}-\frac{1}{2}t^2\vec{j}+2\ln t\,\vec{k}.$$

Izračunaj vektore i iznose, brzine $\vec{v}$ i ubrzanja $\vec{a}$ točke T, u trenutku $t_0=2$.

Rješenje.
$$\vec{v}=\vec{r}\,'=\frac{d\vec{r}}{dt}=\frac{1}{2}t^2\vec{i}-t\vec{j}+\frac{2}{t}\vec{k}$$
$$\vec{a}=\vec{r}\,''=\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}=t\vec{i}-\vec{j}-\frac{2}{t^2}\vec{k}$$
$$\vec{v}(2)=2\vec{i}-2\vec{j}+\vec{k}\ ,\quad v(2)=\sqrt{4+4+1}=3$$
$$\vec{a}(2)=2\vec{i}-\vec{j}-\frac{1}{2}\vec{k}\ ,\quad a(2)=\sqrt{4+1+\frac{1}{4}}=\frac{1}{2}\sqrt{21}$$

□

13. L'Hospital-Bernoullievo pravilo za neodređene oblike

Derivacija može pomoći u računanju graničnih vrijednosti **neodređenih oblika**:

$$\boxed{\frac{0}{0},\ \frac{\infty}{\infty},\ 0\cdot\infty,\ \infty-\infty,\ 1^\infty,\ 0^0,\ \infty^0}\,.$$

Kod četvrtog oblika se predpostavlja da su "beskonačnosti" istog predznaka. L'Hospital-Bernoullievo pravilo se neposredno odnosi na prva dva neodređena oblika, a ostalih pet oblika se svode na jedan od prva dva. Zapišimo to korisno pravilo.

Neka su funkcije $f(x)$ i $g(x)$ definirane i derivabilne u okolini broja x_0, osim možda u samom x_0. Neka je $g'(x) \neq 0$ za svaki $x \neq x_0$ iz te okoline. Ako je

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = 0 \quad i \quad \lim_{x \to x_0} g(x) = 0$$

ili

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \pm\infty \quad i \quad \lim_{x \to x_0} g(x) = \pm\infty ,$$

tada je

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

pod uvjetom da drugi limes postoji u širem smislu (kao konačan ili beskonačan). Pravilo vrijedi i kada se x_0 zamijeni s $+\infty$ ili $-\infty$, u kojem se slučaju uvjet $g'(x) \neq 0$ odnosi na pozitivnu ili negativnu beskonačnost.

Primjer 207. Primjenom L'Hospital-Bernoullievog pravila izračunaj $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sqrt{x} - x}{\ln x + x - 1}$.

Rješenje. Odredimo oblik limesa:

$$\lim_{x \to 1} (\sqrt{x} - x) = \sqrt{1} - 1 = 0 , \quad \lim_{x \to 1} (\ln x + x - 1) = \ln 1 + 1 - 1 = 0$$

$$\text{oblik } \frac{0}{0}$$

Provjerimo uvjete:

$$f(x) = \sqrt{x} - x \quad , \quad g(x) = \ln x + x - 1$$

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} - 1 \quad , \quad g'(x) = \frac{1}{x} + 1$$

Derivacije $f'(x)$ i $g'(x)$ postoje npr. na intervalu $\langle 0, 2 \rangle$ (interval oko broja 1) i $g'(x) \neq 0$ za svaki x iz $\langle 0, 2 \rangle$. Ispunjen je i posljednji uvjet jer postoji

$$\lim_{x \to 1} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \to 1} \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}} - 1}{\frac{1}{x} + 1} = \frac{\frac{1}{2\sqrt{1}} - 1}{\frac{1}{1} + 1} = -\frac{1}{4} .$$

Primijenimo pravilo:

$$\lim_{x \to 1} \frac{\sqrt{x} - x}{\ln x + x - 1} = -\frac{1}{4}$$

□

Primjer 208. Primjenom pravila izračunaj $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2^x}{x-x^3}$.

Rješenje. Određivanje oblika limesa:

$$\lim_{x\to+\infty} 2^x = +\infty, \quad \lim_{x\to+\infty} (x-x^3) = -\infty$$

$$\text{oblik } \frac{\infty}{\infty}$$

Primjena pravila, uz provjeru uvjeta, tri puta:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{2^x}{x-x^3} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2^x \ln 2}{1-3x^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2^x \ln^2 2}{-6x} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{2^x \ln^3 2}{-6} = -\infty$$

□

Primjer 209. Može li se primijeniti pravilo na $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{x+\sin x}{x+1}$?

Rješenje. Određivanje oblika limesa:

$$\lim_{x\to\pm\infty} (x+\sin x) = \lim_{x\to\pm\infty} (x+1) = \pm\infty$$

$$\text{oblik } \frac{\infty}{\infty}$$

Ispunjeni su svi uvjeti osim posljednjeg, jer ne postoji

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{(x+\sin x)'}{(x+1)'} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1+\cos x}{1} = \lim_{x\to\pm\infty} (1+\cos x),$$

pa se pravilo očito ne može primijeniti.

Odredimo limes neposredno, izlučivanjem i kraćenjem:

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{x+\sin x}{x+1} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x\left(1+\frac{\sin x}{x}\right)}{x\left(1+\frac{1}{x}\right)} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1+\frac{\sin x}{x}}{1+\frac{1}{x}} = \frac{1+0}{1+0} = 1.$$

□

Primjer 210. Primjenom pravila izračunaj $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x \ln(1-x)$.

Rješenje. Određivanje oblika:

$$\lim_{x\to-\infty} e^x = 0, \quad \lim_{x\to-\infty} \ln(1-x) = +\infty$$

$$\text{oblik } 0\cdot\infty$$

Svođenje na oblik $\frac{\infty}{\infty}$:

$$e^x \ln(1-x) = \frac{\ln(1-x)}{\frac{1}{e^x}} = \frac{\ln(1-x)}{e^{-x}}$$

Primjena pravila uz provjeru uvjeta:

$$\lim_{x\to-\infty} e^x \ln(1-x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{\ln(1-x)}{e^{-x}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{-\frac{1}{1-x}}{-e^{-x}} =$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{(1-x)e^{-x}} = 0$$

□

Primjer 211. Primjenom pravila izračunaj $\lim\limits_{x\to 0} \left(\cot x - \frac{1}{x}\right)$.

Rješenje. Određivanje oblika:

$$\lim_{x\to 0\pm} \cot x = \pm\infty \,, \quad \lim_{x\to 0\pm} \frac{1}{x} = \pm\infty$$

oblik $\infty - \infty$

Svođenje na oblik $\frac{0}{0}$:

$$\cot x - \frac{1}{x} = \frac{\cos x}{\sin x} - \frac{1}{x} = \frac{x\cos x - \sin x}{x \sin x}$$

Primjena pravila, uz provjeru uvjeta, dva puta:

$$\lim_{x\to 0} \left(\cot x - \frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to 0} \frac{x\cos x - \sin x}{x\sin x} = \lim_{x\to 0} \frac{-x\sin x}{\sin x + x\cos x} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{-\sin x - x\cos x}{2\cos x - x\sin x} = \frac{0}{2} = 0$$

□

Primjer 212. Je li $\lim\limits_{x\to 0-} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x}\right)$ neodređeni oblik?

Rješenje. $\lim\limits_{x\to 0-} \frac{1}{x^2} = +\infty \,, \quad \lim\limits_{x\to 0-} \frac{1}{x} = -\infty$

nije neodređeni oblik

$$\lim_{x\to 0-} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x}\right) = +\infty$$

Dodatak. Limes je najzgodnije izračunati poslije svođenja na zajednički nazivnik:

$$\lim_{x\to 0-} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to 0-} \frac{1-x}{x^2} = +\infty \,.$$

□

Primjer 213. Primjenom pravila izračunaj $\lim\limits_{x\to 2}(x-1)^{\frac{1}{\sin(x-2)}}$.

Rješenje. Određivanje oblika:

$$\lim_{x\to 2}(x-1)=1\ ,\quad \lim_{x\to 2\pm}\frac{1}{\sin(x-2)}=\pm\infty$$

$$\text{oblik } 1^{\infty}$$

Logaritmiranje i svođenje na oblik $\frac{0}{0}$:

$$\ln(x-1)^{\frac{1}{\sin(x-2)}}=\frac{1}{\sin(x-2)}\ln(x-1)=\frac{\ln(x-1)}{\sin(x-2)}$$

Primjena pravila uz provjeru uvjeta:

$$\lim_{x\to 2}\frac{\ln(x-1)}{\sin(x-2)}=\lim_{x\to 2}\frac{\frac{1}{x-1}}{\cos(x-2)}=\frac{\frac{1}{2-1}}{\cos(2-2)}=1$$

Potenciranje inverzno logaritmiranju:

$$e^{1}=e$$

Završno rješenje:

$$\lim_{x\to 2}(x-1)^{\frac{1}{\sin(x-2)}}=e$$

□

14. Ekstremi

Pronalaženje ekstrema je općenit i značajan problem. Posebno je važno proučavanje ekstrema funkcija jer ono omogućava njihovu vrlo široku primjenu.

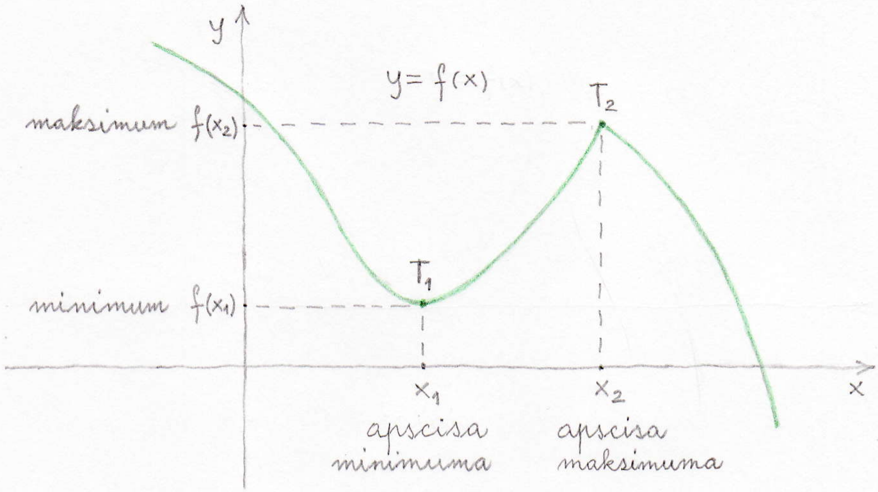
Predpostavimo da je funkcija $f(x)$ neprekinuta u okolini broja x_0. Ako za svaki $x \neq x_0$ iz neke male okoline broja x_0 vrijedi

$f(x_0) < f(x)$, tada je broj $f(x_0)$ **minimum** funkcije $f(x)$;

$f(x_0) > f(x)$, tada je broj $f(x_0)$ **maksimum** funkcije $f(x)$.

Podpuniji i jasniji nazivi su **mjesni** ili **lokalni** **minimum** i **maksimum**.

Zajedničkim imenom minimum i maksimum nazivamo **ekstremima**.



ekstremi funkcije

Primjer 214. Potraži ekstreme funkcije $f(x)$:

(1) $f(x)=x^2-6x$ (2) $f(x)=3\cos x+1$ (3) $f(x)=x-\ln x$

Rješenje. (1) $f(x)=(x-3)^2-9$, $f(3)=-9$ minimum

(2) $$-1 \le \cos x \le 1 \ /\cdot 3/+1$$

$$-2 \le 3\cos x+1 \le 4$$

$f(\pm\pi)=f(\pm3\pi)=f(\pm5\pi)=\ldots=-2$ minimumi

$f(0)=f(\pm2\pi)=f(\pm4\pi)=\ldots=4$ maksimumi

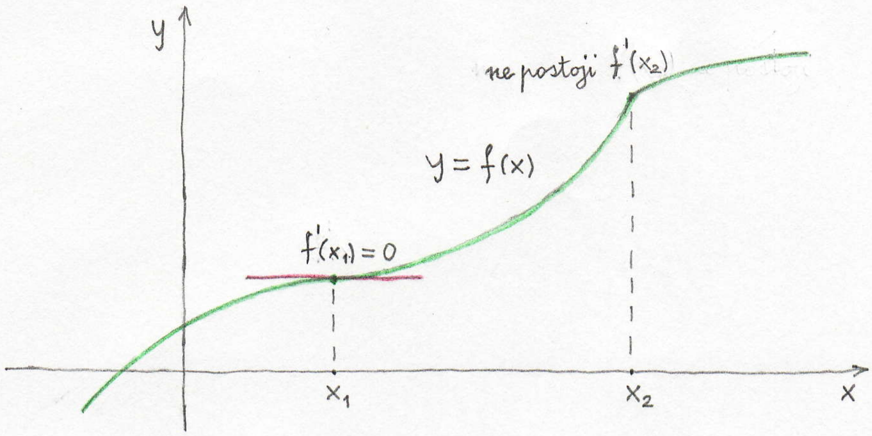
(3) teško se je snaći

□

U proučavanje ekstrema funkcije ćemo uključiti derivaciju. Ispitajmo derivaciju funkcije $f(x)$, predočene grafom na slici, u točkama x_1 i x_2. U točki T_1 graf ima tangentu usporednu sa osi x pa je $f'(x_1)=0$. U točki T_2 graf nema tangentu pa ne postoji $f'(x_2)$. Točke T_1 i T_2 nas navode na uvođenje jednog pojma.

Točka x_0 je **kritična točka** (**prvog reda**) funkcije $f(x)$ neprekinute u x_0, ako je $f'(x_0)=0$ ili ako $f'(x_0)$ ne postoji. Posebno se točka x_0 za koju je $f'(x_0)=0$ zove **stacionarna točka** (**prvog reda**) funkcije $f(x)$.

Apscise ekstrema su uvijek kritične točke dok obrat općenito ne vrijedi, tj. kritična točka ne mora uvijek biti apscisa ekstrema.



kritična točka ne mora biti apscisa ekstrema

Odredimo sada uvjet pod kojim će kritična točka x_0 biti apscisa ekstrema funkcije. Ako derivacija prilikom prolaza kroz x_0 negativan predznak mijenja u pozitivan, tada pad funkcije prelazi u rast pa je x_0 apscisa minimuma. Pri obrnutoj promjeni predznaka derivacije izlazi da je x_0 apscisa maksimuma. Dakle, ako derivacija prilikom prolaza kroz x_0 mijenja predznak, tada je x_0 apscisa ekstrema.

Iz ovih promatranja proizlazi vrlo općenito pravilo za pronalaženje ekstrema funkcije koja je derivabilna lijevo i desno od kritičnih točaka.

Pravilo za određivanje ekstrema funkcije $f(x)$ pomoću prve derivacije, u dva koraka:

- pronalaženje kritičnih točaka
- određivanje predznaka derivacije oko svake kritične točke x_0 i odluka

$f'(x)$ mijenja predznak oko $x_0 \Rightarrow f(x_0)$ je ekstrem

$f'(x)$ zadržava predznak oko $x_0 \Rightarrow f(x_0)$ nije ekstrem

U primjerima što slijede vrlo često ćemo koristiti baš ove činjenice:

elementarna funkcija je neprekinuta

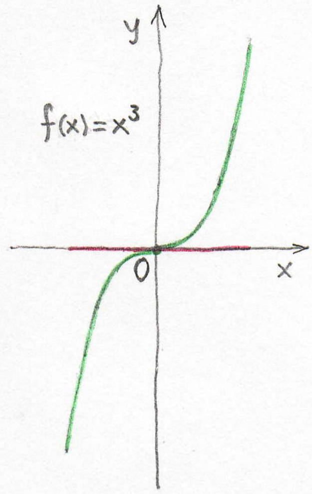
$f' > 0$ ($f' < 0$) na intervalu $\Rightarrow$ f raste (f pada)

Primjer 215. Ima li kubna parabola $f(x)=x^3$ kritičnih točaka?

Rješenje. Derivacija $f'(x)=3x^2$ ima smisla za svaki realni broj x, a jednadžba stacionarnih točaka (nul-točaka derivacije)

$$f'(x)=3x^2=0$$

ima jedno rješenje $x=x_0=0$. Parabola $f(x)$ ima jednu kritičnu točku i to stacionarnu točku $x_0=0$. Tangenta u ishodištu O istovremeno dira (tangira) i siječe (secira) parabolu.



□

Primjer 216. Pronaći ekstreme funkcije $f(x)=2x-3\sqrt[3]{x^2}$.

Rješenje. Derivirajmo funkciju i pronađimo njene kritične točke:

$$f(x)=2x-3x^{\frac{2}{3}} \qquad f'(x)=0$$

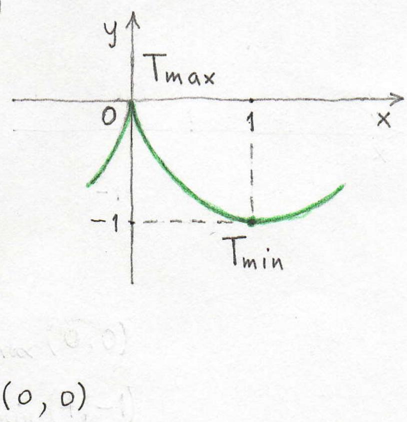
$$f'(x)=2-2x^{-\frac{1}{3}}=2\left(1-\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right) \qquad 1-\frac{1}{\sqrt[3]{x}}=0$$

$f'(x)$ ne postoji za $x=0$ $\qquad \sqrt[3]{x}=1$, $x=1$

kritične točke su $x=0$ i $x=1$

Kritične točke $x=0$ i $x=1$ razdvajaju domenu $D_f=\langle-\infty,+\infty\rangle$ na tri intervala: $\langle-\infty,0\rangle$, $\langle 0,1\rangle$ i $\langle 1,+\infty\rangle$. Derivacija $f'(x)$ je neprekinuta (elementarna funkcija) na cijelom svom području definicije $D_{f'}=\mathbb{R}\setminus\{0\}$, a ima jednu nul-točku $x=1$. Zato je njen predznak stalan na svakom od tri intervala. Odredimo predznake derivacije $f'(x)$ na tim intervalima i odlučimo jesu li kritične točke apscise ekstrema:

x	$-\infty$	-1	0	$\frac{1}{8}$	1	8	$+\infty$
$f'(x)$		4		-2	0	1	
predznak		+		−		+	
$f(x)$			0		-1		
rast, pad / min, max		↗	max	↘	min	↗	



ZELENA BOJA U TABLICI ISTIČE ONO NAJBITNIJE
CRVENA BOJA ISTIČE ONO ŠTO NIJE DEFINIRANO

$f(0)=0$ maksimum tj. $T_{max}(0,0)$
$f(1)=-1$ minimum tj. $T_{min}(1,-1)$

□

Primjer 217. Odredi ekstreme funkcije $f(x)=\frac{3+x^2}{1-x}$.

Rješenje. Pronalaženje kritičnih točaka :

$$f'(x)=\frac{2x(1-x)-(3+x^2)(-1)}{(1-x)^2}=\frac{-x^2+2x+3}{(1-x)^2} \qquad f'(x)=0$$

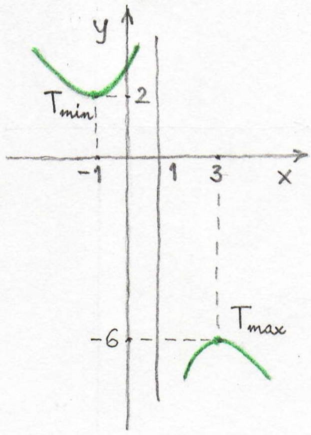
$f'(x)$ ne postoji za $x=1$, ali to nije kritična točka jer $x=1$ nije iz D_f $\qquad -x^2+2x+3=0$

$x=-1,\ x=3$

kritične točke su stacionarne točke $x=-1$ i $x=3$

Kritične točke $x=-1$ i $x=3$ razdvajaju domenu $D_f=\langle-\infty,1\rangle\cup\langle1,+\infty\rangle$ na četiri intervala ; $\langle-\infty,-1\rangle$, $\langle-1,1\rangle$, $\langle1,3\rangle$ i $\langle3,+\infty\rangle$. Slijedi određivanje predznaka derivacije na tim intervalima i odluka :

x	$-\infty$	-2	-1	0	1	2	3	4	$+\infty$
$f'(x)$		$-\frac{5}{9}$	0	3		3	0	$-\frac{5}{9}$	
predznak		$-$		$+$		$+$		$-$	
$f(x)$			2				-6		
rast, pad min, max		↘	min	↗		↗	max	↘	



$f(-1)=2$ min tj. $T_{min}(-1,2)$

$f(3)=-6$ max tj. $T_{max}(3,-6)$

□

Primjer 218. Ispitaj ekstreme funkcije $f(x)=x-\arctan x$.

Rješenje. Pronalaženje kritičnih točaka :

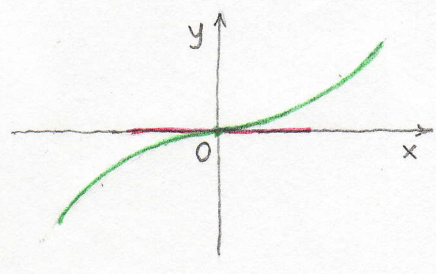
$$f'(x)=1-\frac{1}{x^2+1}=\frac{x^2}{x^2+1} \qquad f'(x)=0$$

$f'(x)$ postoji za svaki x iz $\mathbb{R}$ $\qquad x^2=0,\ x=0$

kritična točka je stacionarna točka $x=0$

Određivanje predznaka derivacije na intervalima razdvojenim kritičnom točkom i odluka :

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
$f'(x)$		$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	
predznak		$+$		$+$	
$f(x)$			0		
rast, pad min, max		↗	nije	↗	



□

Primjer 219. Ispitaj ekstreme funkcije $f(x) = \frac{1}{x} - e^x$.

Rješenje. Domena funkcije $f(x)$ je skup $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Njena je derivacija

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2} - e^x = -\left(\frac{1}{x^2} + e^x\right) < 0 \quad \text{za svaki } x \text{ iz } D_f.$$

Zato funkcija $f(x)$ pada na cijeloj domeni D_f pa nema ekstrema.

□

Primjer 220. Potraži ekstreme funkcije $f(x) = x^x$ na intervalu $\langle 0, +\infty\rangle$.

Rješenje. Pronađimo kritične točke:

$$f(x) = x^x \quad /\ln \qquad\qquad f'(x) = 0$$

$$\ln f(x) = x \ln x \quad /' \qquad\qquad x^x(\ln x + 1) = 0$$

$$\frac{1}{f(x)} f'(x) = \ln x + 1 \qquad\qquad \ln x + 1 = 0, \quad x^x \neq 0$$

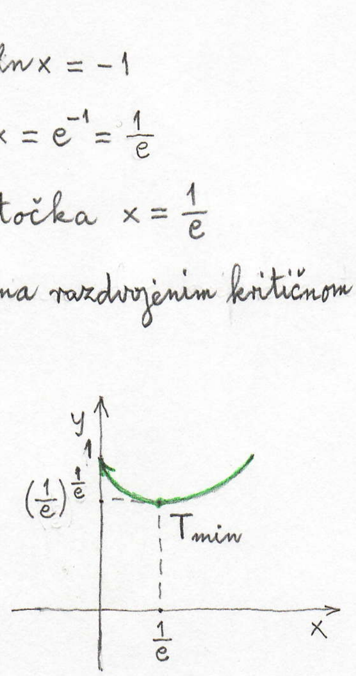
$$f'(x) = x^x(\ln x + 1) \qquad\qquad \ln x = -1$$

$$f'(x) \text{ postoji za svaki } x > 0 \qquad\qquad x = e^{-1} = \frac{1}{e}$$

kritična točka je stacionarna točka $x = \frac{1}{e}$

Odredimo predznake derivacije na intervalima razdvojenim kritičnom točkom i odlučimo je li ona apscisa ekstrema:

x	0	$\frac{1}{e^2}$	$\frac{1}{e}$	e	$+\infty$
$f'(x)$		$-e^{-\frac{2}{e^2}}$	0	$2e^e$	
predznak		$-$		$+$	
$f(x)$			$\left(\frac{1}{e}\right)^{\frac{1}{e}}$		
rast, pad min, max		↘	min	↗	



□

Nekad je korisno u provjeru stacionarnih točaka (funkcije $f(x)$) uključiti i drugu derivaciju. Neka je x_0 stacionarna točka, tj. $f'(x_0) = 0$ i neka postoji $f''(x_0)$. Tada je funkcija $f'(x)$ neprekinuta u okolini točke x_0. Zbog predpostavke $f'(x_0) = 0$ i neprekinutosti funkcije $f'(x)$ izlazi da je $f(x) < 0$ lijevo od x_0 te $f'(x) > 0$ desno od x_0. Dakle, funkcija $f(x)$ pada lijevo od x_0 te raste desno od x_0, odakle proizlazi da je x_0 apscisa minimuma. Slično, ako je $f''(x_0) < 0$, slijedi da je x_0 apscisa maksimuma.

Sažmimo to u pravilo za pronalaženje ekstrema funkcije koja je dvaput derivabilna u stacionarnim točkama.

Pravilo za određivanje ekstrema funkcije $f(x)$ u njenim stacionarnim točkama pomoću prve i druge derivacije, u dva koraka:

- pronalaženje stacionarnih točaka
- određivanje predznaka druge derivacije u svakoj stacionarnoj točki x_0 i odluka

$$f''(x_0) > 0 \Rightarrow f(x_0) \text{ je minimum}$$
$$f''(x_0) < 0 \Rightarrow f(x_0) \text{ je maksimum}$$

Primjer 221. Odredi ekstreme funkcije $f(x) = x^3 + 3x^2 + 5$ pomoću prve i druge derivacije.

Rješenje. $D_f = \mathbb{R}$

$f(x) = x^3 + 3x^2 + 5$ $\qquad$ $f'(x) = 0$

$f'(x) = 3x^2 + 6x = 3x(x+2)$ $\qquad$ $x(x+2) = 0$

$f''(x) = 6x + 6 = 6(x+1)$ $\qquad$ $x = 0,\ x = -2$

stacionarne točke su $x = 0$ i $x = -2$

$f''(0) = 6 > 0 \Rightarrow f(0) = 5$ minimum

$f''(-2) = -6 < 0 \Rightarrow f(-2) = 9$ maksimum

□

Primjer 222. Odredi ekstreme funkcije $f(x) = 2\ln x - \frac{1}{2}x^2$ pomoću prve i druge derivacije.

Rješenje. $D_f = \langle 0, +\infty \rangle$

$f(x) = 2\ln x - \frac{1}{2}x^2$ $\qquad$ $f'(x) = 0$

$f'(x) = \frac{2}{x} - x = 2x^{-1} - x$ $\qquad$ $\frac{2}{x} - x = 0,\ x^2 = 2$

$f''(x) = -2x^{-2} - 1 = -\left(\frac{2}{x^2} + 1\right)$ $\qquad$ $x = \sqrt{2},\ x = -\sqrt{2} \notin D_f$

stacionarna točka je $x=\sqrt{2}$

$$f''(\sqrt{2})<0 \Rightarrow f(\sqrt{2}) = 2\ln\sqrt{2} - 1 = \ln 2 - 1 \text{ maksimum}$$

□

Napomena. Pri određivanju ekstrema funkcije $f(x)$, koje uključuje i njenu drugu derivaciju, koristi se samo predznak druge derivacije u stacionarnim točkama. Računanje druge derivacije može biti zamorno. Zato je u nekim slučajevima korisna implikacija:

$$f'(x) = u(x)\,v(x),\ u(x_0)=0,\ v(x_0)>0 \Rightarrow \operatorname{sgn} f''(x_0) = \operatorname{sgn} u'(x_0).$$

Dokaz implikacije:

$$f''(x) = u'(x)\,v(x) + u(x)\,v'(x)$$

$$f''(x_0) = u'(x_0)\,v(x_0) + u(x_0)\,v'(x_0) = u'(x_0)\,v(x_0)$$

$$\operatorname{sgn} f''(x_0) = \operatorname{sgn} u'(x_0)$$

Primjer 223. Odredi ekstreme funkcije $f(x) = \frac{e^x}{x-1}$ koristeći se predhodnom Napomenom.

Rješenje. $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

$$f'(x) = \frac{e^x(x-1) - e^x}{(x-1)^2} = (x-2)\frac{e^x}{(x-1)^2} \qquad f'(x) = 0$$

$$u(x) = x-2,\ u'(x) = 1,\ v(x) = \frac{e^x}{(x-1)^2} \qquad x-2=0$$

$$u(2)=0,\ u'(2)=1>0,\ v(2)=e^2>0 \Rightarrow f''(2)>0 \qquad x=2$$

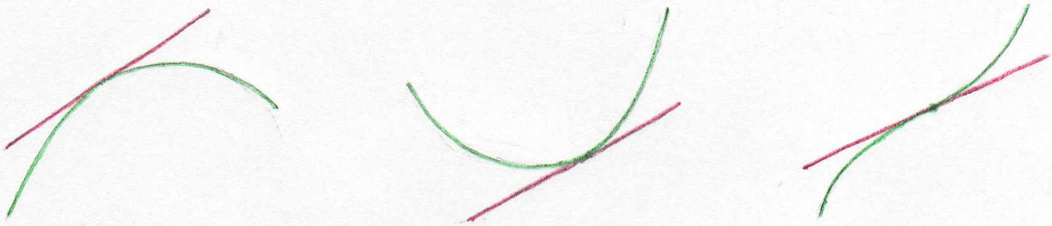
stacionarna točka je $x=2$

$$f''(2)>0 \Rightarrow f(2)=e^2 \text{ minimum}$$

□

15. Konveksnost, konkavnost, infleksija

Za **krivulju** kažemo da je **gladka** ako u svakoj njenoj točki možemo odrediti tangentu. **Luk** gladke krivulje (dio krivulje, komad krivulje) je **konveksan** ili **izbočen** ako su njegove tangente iznad njega, a **konkavan** ili **udubljen** ako su njegove tangente ispod njega. Točka glatke krivulje u kojoj se izmjenjuju konveksnost i konkavnost je **točka infleksije ili pregiba**.



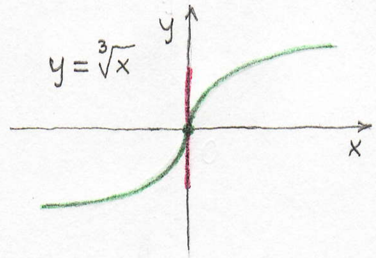
konveksan luk konkavan luk točka infleksije

Napomena. Inače se u matematici definiraju pojmovi **konveksne** i **konkavne funkcije** neovisno o tangenti, i to tako da je konveksno izbočeno prema dolje, a konkavno izbočeno prema gore.

Primjer 224. Provjeri gladkost krivulje $y = \sqrt[3]{x}$. Odredi njena područja izbočenosti i udubljenosti te njene točke pregiba.

Rješenje. Prva derivacija

$$y' = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$$



postoji za svaki $x \neq 0$ pa se tangenta može odrediti u svakoj točki krivulje za koju je $x \neq 0$. Ima li krivulja tangentu i u ishodištu $O(0,0)$?

Granična vrijednost

$$\lim_{x\to 0} y' = \lim_{x\to 0} \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} = +\infty$$

govori da koeficijent nagiba $y' = \tan\varphi \to +\infty$ tj. da $\varphi \to \frac{\pi}{2}$. Prema tome os y $(x=0)$ je tangenta ove krivulje u ishodištu O. Dakle, krivulja je glatka.

Uz pomoć grafa možemo procijeniti da je lijevi dio krivulje za $x<0$ udubljen, a desni za $x>0$ izbočen (analitička procjena razlike između tangente i krivulje je teška).

Ishodište O je točka pregiba krivulje jer ono dijeli krivulju na udubljeni i izbočeni dio.

$\square$

Napomena. Krivulja zadana eksplicitnom jednadžbom $y=f(x)$ je glatka ako je funkcija $f(x)$ derivabilna u širem smislu, tj. ako ima konačne ili beskonačne derivacije. Isti se pridjev glatka može koristiti i za funkciju $f(x)$.

Za određivanje područja rasta, područja pada i ekstrema funkcije koristi se prva derivacija. Kod konkavnosti, konveksnosti i točaka infleksije se sve vrti uglavnom oko druge derivacije.

Istražimo vezu druge derivacije sa konkavnošću i konveksnošću. Neka je funkcija $f(x)$ dvaput derivabilna, ima drugu derivaciju $f''(x)$, na otvorenom intervalu D. Predpostavimo prvo da je $f''(x)>0$ za svaki x iz D. Tada je $f'(x)$ rastuća funkcija na D. Koeficijenti nagiba tangenti krivulje $y=f(x)$, vrijednosti $f'(x)$, rastu pa je krivulja udubljena (konkavna) na D. Iz predpostavke $f''(x)<0$ izlazi da je krivulja izbočena (konveksna). Poopćimo i zapišimo rezultate ovog promatranja u vidu implikacija.

Za funkciju $f(x)$ dvaput derivabilnu na uniji otvorenih intervala vrijede implikacije:

$$f''(x)>0 \Rightarrow \text{graf funkcije } f(x) \text{ je konkavan}$$
$$f''(x)<0 \Rightarrow \text{graf funkcije } f(x) \text{ je konveksan}$$

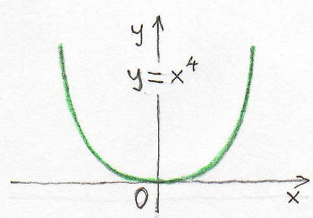
Za konkakavan ili konveksan graf funkcije $f(x)$ druga derivacija $f''(x)$ ne mora svuda biti različita od nule. Ona ponegdje može biti jednaka nuli ili uopće ne mora postojati:

$f(x)=x^4$

$f'(x)=4x^3$

$f''(x)=12x^2$

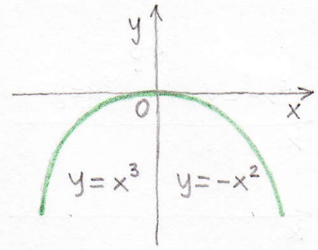
$f''(0)=0$



krivulja konkavna na $\mathbb{R}$

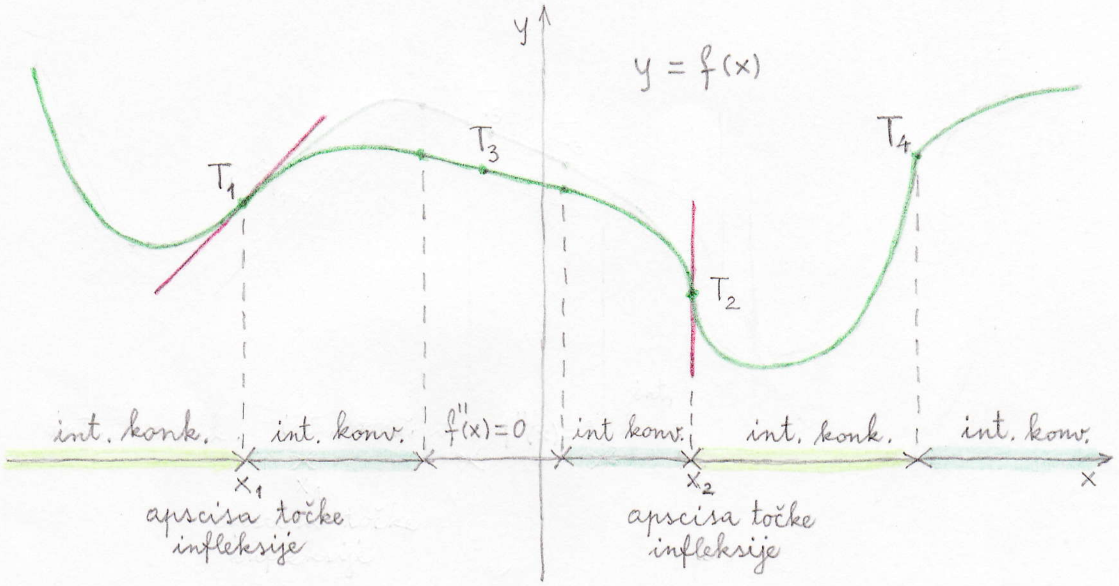
$$f(x)=\begin{cases} x^3 \text{ za } x<0 \\ -x^2 \text{ za } x\geq 0\end{cases}, \quad f'(x)=\begin{cases} 3x^2 \text{ za } x<0 \\ -2x \text{ za } x\geq 0\end{cases}$$

$$f''(x)=\begin{cases} 6x \text{ za } x<0 \\ -2 \text{ za } x>0\end{cases}, \text{ ne postoji } f''(0)$$



krivulja konveksna na $\mathbb{R}$

Ispitajmo drugu derivaciju još u točkama infleksije. Pri tome ćemo se pomoći donjom slikom.



intervali konveksnosti i konkavnosti, točke infleksije

U točki T_1 (konkavnost prelazi u konveksnost) se sastaju tangente čiji su koeficijenti nagiba manji od koeficijenta nagiba u T_1, tj. $f'(x_1+\Delta x)<f'(x_1)$. To govori da je x_1 apscisa maksimuma prve derivacije $f'(x)$ pa je $f''(x_1)=0$ ili ne postoji. Za obrnuti slučaj prijelaza konveksnosti u konkavnost izlazi isti zaključak preko apscise maksimuma. U točki T_2 tangenta je okomita na os x što znači da $f'(x_2)$ ne postoji kao broj, pa zato ne postoji ni $f''(x_2)$. Točke T_1 i T_2 opravdavaju uvođenje sljedećeg pojma.

Točka x_0 je **kritična točka drugog reda** funkcije $f(x)$ neprekinute u x_0, ako je $f''(x_0)=0$ ili ako $f''(x_0)$ ne postoji. Posebno se točka x_0 za koju je $f''(x_0)=0$ zove **stacionarna točka drugog reda funkcije** $f(x)$.

Apscise točaka infleksije su uvijek kritične točke drugog reda dok obrat općenito ne vrijedi, tj. kritična točka drugog reda ne mora uvijek biti apscisa točke infleksije (apscise točaka T_3 i T_4).

Određivanje točaka infleksije ima sličnosti s određivanjem ekstrema, ali predstavlja znatno veći posao. Formulirajmo pravilo za određivanje točaka infleksije funkcije koja je dvaput derivabilna lijevo i desno od kritičnih točaka.

Pravilo za određivanje točaka infleksije krivulje $y=f(x)$ pomoću prve i druge derivacije, u dva koraka:

- pronalaženje kritičnih točaka drugog reda u kojima je funkcija $f(x)$ gladka
- određivanje predznaka druge derivacije oko svake takve kritične točke x_0 i odluka

$f''(x)$ mijenja predznak oko $x_0 \Rightarrow (x_0, f(x_0))$ je točka infleksije

$f''(x)$ zadržava predznak oko $x_0 \Rightarrow (x_0, f(x_0))$ nije točka infleksije

Primjer 225. Pronaći točke infleksije te područja konveksnosti i konkavnosti krivulje $y = 9x^{\frac{5}{3}} - 5x^2$.

Rješenje. Derivirajmo dvaput jednadžbu krivulje i pronađimo njene kritične točke drugog reda:

$$y' = 15x^{\frac{2}{3}} - 10x = 15\sqrt[3]{x^2} - 10x \qquad y''=0$$

$$y'' = 10x^{-\frac{1}{3}} - 10 = 10\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x}} - 1\right) \qquad \frac{1}{\sqrt[3]{x}} - 1 = 0$$

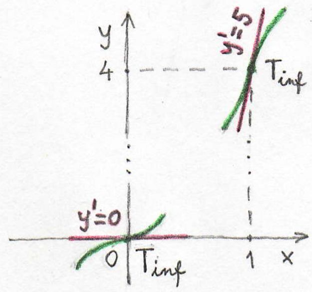
$$y'' \text{ ne postoji za } x=0 \qquad \sqrt[3]{x} = 1,\ x=1$$

kritične točke drugog reda su $x=0$ i $x=1$

Krivulja je gladka u izračunatim kritičnim točkama zato što postoje prve derivacije $y'=0$ za $x=0$ i $y'=5$ za $x=1$.

Kritične točke drugog reda $x=0$ i $x=1$ razdvajaju domenu $D_f = \langle -\infty, +\infty\rangle$ na tri intervala: $\langle -\infty, 0\rangle$, $\langle 0, 1\rangle$ i $\langle 1, +\infty\rangle$. Druga derivacija y'' je neprekinuta (elementarna funkcija) na cijeloj svojoj domeni $D_{y''} = \mathbb{R} - \{0\}$, a ima jednu nul-točku $x=1$. Zato je njen predznak stalan na svakom od tri intervala. Odredimo predznake druge derivacije y'' na tim intervalima i odlučimo jesu li kritične točke drugog reda apscise točaka infleksije:

x	$-\infty$	-1	0	$\frac{1}{8}$	1	8	$+\infty$
y''		-20		10	0	-5	
predznak		$-$		$+$		$-$	
y			0		4		
conv, conc inf		$\cap$	inf	$\cup$	inf	$\cap$	



$T_{inf}(0,0)$, $T_{inf}(1,4)$, $\mathcal{D}_{\cap} = \langle -\infty, 0\rangle \cup \langle 1, +\infty\rangle$, $\mathcal{D}_{\cup} = \langle 0, 1\rangle$

□

Primjer 226. Odredi točke pregiba te područja izbočenosti i udubljenosti krivulje $y = \frac{1}{5} + \frac{1}{3}x^4 - \frac{1}{10}x^5$.

Rješenje. Pronalaženje kritičnih točaka drugog reda:

$$y' = \frac{4}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^4 \qquad y'' = 0$$

$$y'' = 4x^2 - 2x^3 = 2x^2(2-x) \qquad x^2(2-x) = 0\ ;\ x=0,\ x=2$$

kritične točke drugog reda su $x=0$ i $x=2$

Određivanje predznaka druge derivacije na intervalima razdvojenim kritičnim točkama drugog reda i odluka:

x	$-\infty$	-1	0	1	2	3	$+\infty$
y''		6	0	2	0	-18	
predznak		$+$		$+$		$-$	
y			$\frac{1}{5}$		$\frac{7}{3}$		
conv, conc inf		$\cup$	nije	$\cup$	inf	$\cap$	

$T_{inf}\left(2, \frac{7}{3}\right)$

$\mathcal{D}_{\cap} = \langle 2, +\infty\rangle$

$\mathcal{D}_{\cup} = \langle -\infty, 2\rangle$

□

U provjeru stacionarnih točaka drugog reda funkcije $f(x)$ se može uključiti i treća derivacija. Neka je x_0 stacionarna točka drugog reda, tj. $f''(x_0) = 0$ i neka postoji $f'''(x_0)$. Ako je $f'''(x_0) \neq 0$, može se zaključiti da druga derivacija $f''(x)$ mijenja predznak oko x_0, a odatle proizlazi da je $(x_0, f(x_0))$ točka infleksije krivulje $y = f(x)$.

Zapišimo to kao pravilo za pronalaženje točaka infleksije funkcije koja je triput derivabilna u stacionarnim točkama drugog reda.

Pravilo za određivanje točaka infleksije krivulje $y=f(x)$ (u njenim stacionarnim točkama drugog reda) pomoću druge i treće derivacije, u dva koraka:

- pronalaženje stacionarnih točaka drugog reda
- određivanje predznaka treće derivacije u svakoj stacionarnoj točki drugog reda x_0 i odluka

$$f'''(x_0) \neq 0 \Rightarrow (x_0, f(x_0)) \text{ je točka infleksije}$$

Primjer 227. Pronaći točke pregiba krivulje $y = xe^x$ pomoću druge i treće derivacije.

Rješenje. $y=f(x)$, $D_f = \mathbb{R}$

$$f'(x) = (x+1)e^x \qquad f''(x)=0$$
$$f''(x) = (x+2)e^x \qquad x+2=0$$
$$f'''(x) = (x+3)e^x \qquad x=-2$$

stacionarna točka drugog reda je $x=-2$

$$f'''(-2) = (-2+3)e^{-2} = \frac{1}{e^2} \neq 0 \Rightarrow T_{inf}\left(-2, -\frac{2}{e^2}\right)$$

□

Napomena. Da se izbjegne cjelovito računanje treće derivacije može se koristiti implikacija:

$$f''(x) = u(x)v(x),\ u(x_0)=0,\ v(x_0)\neq 0 \Rightarrow \operatorname{sgn} f'''(x_0) = \pm \operatorname{sgn} u'(x_0)$$

Primjer 228. Pronaći točke pregiba krivulje $y = \frac{5-3x}{(2-x)^2}$ uz pomoć predhodne Napomene.

Rješenje. $y=f(x)$, $D_f = \mathbb{R} \setminus \{2\}$

$$f'(x) = \frac{4-3x}{(2-x)^3},\quad f''(x) = (1-x)\frac{6}{(2-x)^4} \qquad f''(x)=0$$

$$u(x) = 1-x,\ u'(x) = -1,\ v(x) = \frac{6}{(2-x)^4} \qquad 1-x=0$$

$$u(1)=0,\ u'(1)=-1\neq 0,\ v(1)=6\neq 0 \Rightarrow f'''(1)\neq 0 \qquad x=1$$

stacionarna točka drugog reda je $x=1$

$$f'''(1)\neq 0 \Rightarrow T_{inf}(1, 2)$$

□

16. Tok funkcije

Tok funkcije podrazumijeva njeno ponašanje, njen "izgled", način na koji funkcija "teče", u sažetom obliku njen graf. Ispitivanje toka zadane funkcije se provodi kroz nekoliko točaka od kojih su neizostavne :

određivanje domene, ispitivanje ekstrema i crtanje grafa.

U ovoj ćemo se lekciji oslanjati na poznavanje osnovnih elementarnih funkcija, opće poznavanje funkcija i primjenu diferencijalnog računa. Iskoristit ćemo sve svoje znanje o funkcijama.

Primjer 229. Ispitaj tok i nacrtaj graf funkcije $f(x)=3x-x^3$.

Rješenje. Treba poznavati polinome.

Domena : $D=\mathbb{R}=\langle-\infty,+\infty\rangle$

ponašanje na rubovima domene . . . $\lim\limits_{x\to\mp\infty}(3x-x^3)=\lim\limits_{x\to\mp\infty}x^3\left(\frac{3}{x^2}-1\right)=\pm\infty$

Parnost :

$f(-x)=-f(x)$ neparna funkcija

graf simetričan u odnosu na O

Nul-točke :

$f(x)=x(3-x^2)=x(\sqrt{3}-x)(\sqrt{3}+x)$

$x=-\sqrt{3},\ x=0,\ x=\sqrt{3}$

Ekstremi :

$f'(x)=3-3x^2=3(1-x)(1+x)$

$x=-1,\ x=1$ stac. toč. 1. reda

Pregibi :

$f''(x)=-6x\ ,\quad f'''(x)=-6$

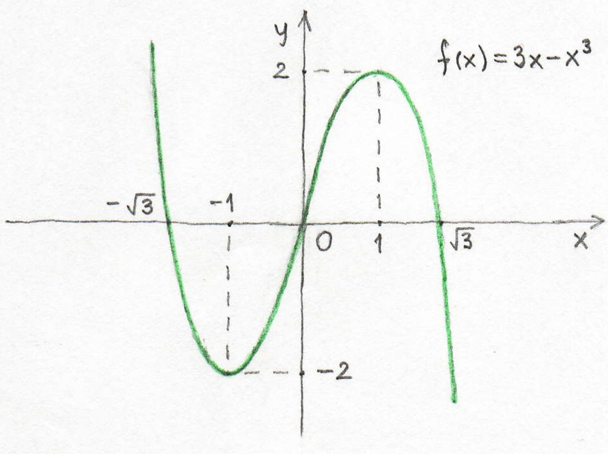
$x=0$ stac. toč. 2. reda, $T_{inf}(0,0)$

Tablica :

x	0	1	2	$+\infty$
$f'(x)$	3	0	-9	
predznak	+		−	
lim				$-\infty$
$f(x)$		2		
rast, pad min, max	↗	max	↘	
lim				$-\infty$

Limes se računa samo na rubovima domene. Za parne i neparne funkcije obično se pravi samo desna polovina tablice.

Graf :



□

Primjer 230. Ispitaj tok i nacrtaj graf funkcije $f(x)=\dfrac{x^2}{x+1}$.

Rješenje. Treba poznavati racionalne funkcije.

Domena: $\mathcal{D}=\mathbb{R}\setminus\{-1\}=\langle-\infty,-1\rangle\cup\langle-1,+\infty\rangle$

ponašanje na rubovima domene – asimptote

$$\lim_{x\to-1\mp} f(x)=\lim_{x\to-1\mp}\frac{x^2}{x+1}=\mp\infty\ ,\quad \boxed{x=-1} \text{ okomita asimptota}$$

$$a=\lim_{x\to\mp\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\mp\infty}\frac{x}{x+1}=1\ ,\quad b=\lim_{x\to\mp\infty}[f(x)-ax]=\lim_{x\to\mp\infty}\frac{-x}{x+1}=-1$$

$$\boxed{y=x-1} \text{ kosa asimptota}$$

Ekstremi:

$$f'(x)=\frac{2x(x+1)-x^2}{(x+1)^2}=\frac{x^2+2x}{(x+1)^2}$$

$f'(x)=0\ ,\quad x^2+2x=x(x+2)=0$

$\boxed{x=-2,\ x=0}$ stacionarne točke

Pregibi:

$$f''(x)=\frac{2}{(x+1)^3}\neq 0 \quad \text{nema pregiba}$$

$f''(x)<0$ za $x<-1$ izbočen graf

$f''(x)>0$ za $x>-1$ udubljen graf

Tablica:

x	$-\infty$	-3	-2	$-\frac{3}{2}$	-1	$-\frac{1}{2}$	0	2	$+\infty$
$f'(x)$		$\frac{3}{4}$	0	-3		-3	0	$\frac{8}{9}$	
predznak		$+$		$-$		$-$		$+$	
lim	1				$-\infty$				1
$f(x)$			-4				0		
rast, pad min, max		↗	max	↘		↘	min	↗	
lim	$-\infty$				$\mp\infty$				$+\infty$

Nul-točke:

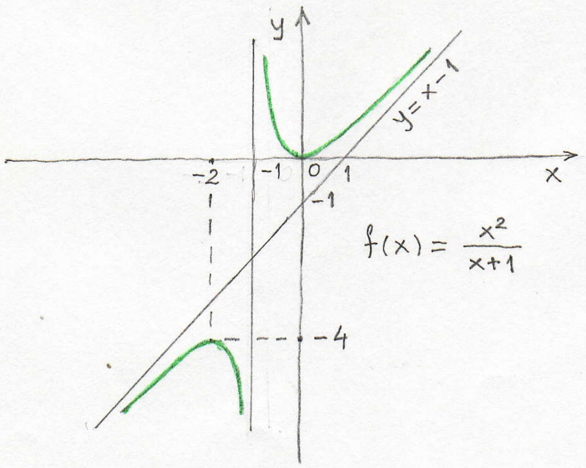
$f(x)=0\ ,\quad x^2=0$

$x=0$

nul-točka 2. reda

Uputa-skraćenje: za brojeve odabrane u intervalima je dovoljno odrediti predznak prve derivacije

Graf:



Odakle početi:

npr. od ekstrema i asimptota

□

Primjer 231. Ispitaj tok i nacrtaj graf funkcije $f(x) = x\ln^2 x$.

Rješenje. Treba poznavati logaritamske funkcije.

Domena: $\mathcal{D} = \langle 0, +\infty\rangle$

ponašanje na rubovima domene

$$\lim_{x\to 0+} x\ln^2 x = \lim_{x\to 0+} \frac{\ln^2 x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0+} \frac{\frac{2}{x}\ln x}{-\frac{1}{x^2}} =$$

$$= \lim_{x\to 0+} \frac{-2\ln x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0+} \frac{-\frac{2}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0+} 2x = 0$$

$$\lim_{x\to +\infty} x\ln^2 x = +\infty$$

Ekstremi:

$f'(x) = \ln^2 x + 2\ln x = (\ln x + 2)\ln x$

$f'(x) = 0$, $(\ln x + 2)\ln x = 0$

$\ln x = -2$, $\ln x = 0$

$\boxed{x = \frac{1}{e^2},\ x = 1}$ stacionarne točke

Pregibi:

$f''(x) = \frac{2}{x}(\ln x + 1)$, $u'(x) = \frac{1}{x}$

$f''(x) = 0$, $\ln x + 1 = 0$

$x = \frac{1}{e}$ apscisa pregiba

$\boxed{T_{inf}\left(\frac{1}{e}, \frac{1}{e}\right)}$ točka pregiba

Tablica:

x	0	$\frac{1}{e^3}$	$\frac{1}{e^2}$	$\frac{1}{e}$	1	e	$+\infty$
$f'(x)$		3	0	-1	0	3	
predznak		$+$		$-$		$+$	
lim	$+\infty$						$+\infty$
$f(x)$			$\frac{4}{e^2}$		0		
rast, pad min, max		$\nearrow$	max	$\searrow$	min	$\nearrow$	
lim	0						$+\infty$

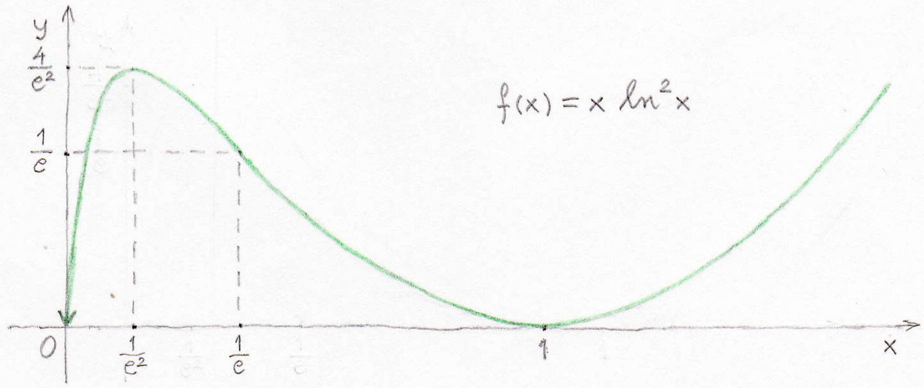
Nul-točke:

$f(x) = 0$, $\ln^2 x = 0$

$x = 1$

nul-točka 2. reda

Graf:



□

Primjer 232. Ispitaj tok i nacrtaj graf funkcije $f(x)=x^2e^{-x}$.

Rješenje. Treba poznavati eksponencijalne funkcije.

Domena: $\mathcal{D}=\mathbb{R}=\langle-\infty,+\infty\rangle$

ponašanje na rubovima domene

$$\lim_{x\to-\infty} x^2e^{-x}=+\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{e^x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{e^x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{e^x}=0$$

$\boxed{y=0}$ usporedna asimptota u pozitivnoj beskonačnosti

Ekstremi:

$$f'(x)=\frac{2x-x^2}{e^x}=\frac{x(2-x)}{e^x}$$

$f'(x)=0\,,\quad x(2-x)=0$

$\boxed{x=0\,,\ x=2}$ stacionarne točke

Pregibi:

$$f''(x)=\frac{x^2-4x+2}{e^x}\,,\quad u'(x)=2x-4$$

$f''(x)=0\,,\quad x^2-4x+2=0$

$\boxed{x=2\mp\sqrt{2}}$ apscise pregiba

Tablica:

x	$-\infty$	-1	0	1	2	3	$+\infty$
$f'(x)$		$-3e$	0	$\frac{1}{e}$	0	$-\frac{3}{e^3}$	
predznak		$-$		$+$		$-$	
lim	$-\infty$						0
$f(x)$			0		$\frac{4}{e^2}$		
rast, pad min, max		↘	min	↗	max	↘	
lim	$+\infty$						0

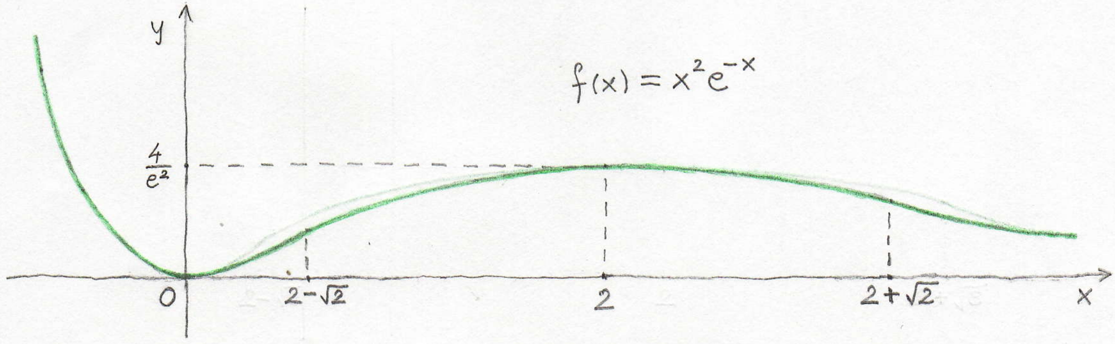
Nul-točke:

$f(x)=0\,,\quad x^2=0$

$x=0$

nul-točka 2. reda

Graf:



□

Primjer 233. Ispitaj tok i nacrtaj graf funkcije $f(x)=\sqrt{x^2+2x+5}$.

Rješenje. Uz dobro poznavanje polinoma drugog stupnja i drugog korijena primjer se može riješiti i bez pomoći diferencijalnog računa.

Prikaz

$$\sqrt{x^2+2x+5} = \sqrt{(x+1)^2+4} \geq \sqrt{4} = 2$$

omogućava određivanje domene i ekstrema:

$$\mathcal{D}=\mathbb{R}=\langle -\infty, +\infty\rangle, \quad \boxed{f(-1)=2 \text{ minimum}}.$$

Kose asimptote:

u negativnoj beskonačnosti $(x=-\sqrt{x^2})$

$$a=\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2+2x+5}}{-\sqrt{x^2}}=-\lim_{x\to-\infty}\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{5}{x^2}}=-1$$

$$b=\lim_{x\to-\infty}[f(x)+x]=\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+2x+5}+x\right)=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x+5 \quad /:x}{\sqrt{x^2+2x+5}-x \quad /:x}=\frac{2}{-1-1}=-1$$

$$\boxed{y=-x-1}$$

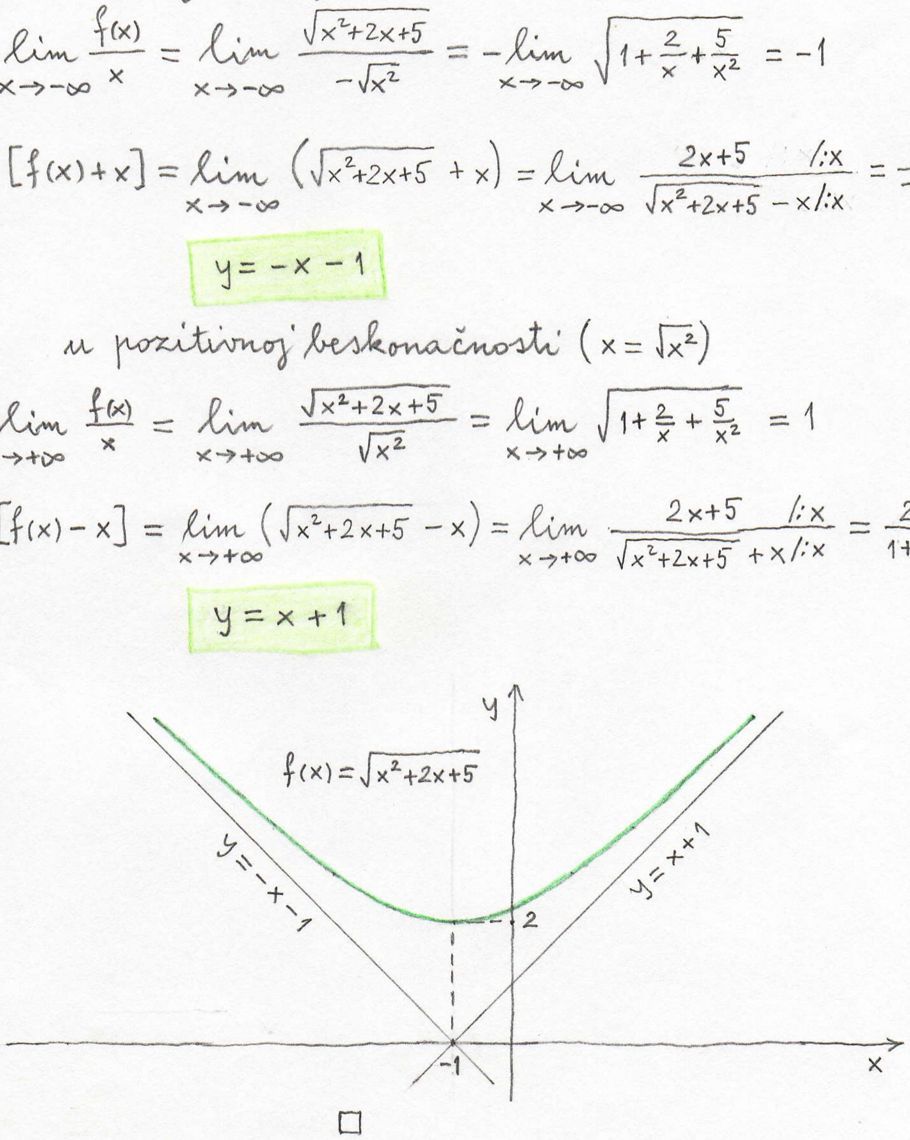
u pozitivnoj beskonačnosti $(x=\sqrt{x^2})$

$$a=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2+2x+5}}{\sqrt{x^2}}=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{5}{x^2}}=1$$

$$b=\lim_{x\to+\infty}[f(x)-x]=\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+2x+5}-x\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x+5 \quad /:x}{\sqrt{x^2+2x+5}+x \quad /:x}=\frac{2}{1+1}=1$$

$$\boxed{y=x+1}$$

Graf:



□

Primjer 234. Ispitaj tok i nacrtaj graf funkcije $f(x) = \frac{2}{3}x - x^{-\frac{2}{3}}$.

Rješenje. Treba poznavati opće potencije, odnosno korijene.

$$f(x) = \frac{2}{3}x - \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$$

Domena: $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{0\} = \langle -\infty, 0 \rangle \cup \langle 0, +\infty \rangle$

ponašanje na rubovima domene – asimptote

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} \left(\frac{2}{3}x - \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} \right) = -\infty$$

$\boxed{x = 0}$ okomita asimptota

$$a = \lim_{x \to \mp\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \mp\infty} \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{x\sqrt[3]{x^2}} \right) = \frac{2}{3}$$

$$b = \lim_{x \to \mp\infty} \left[f(x) - \frac{2}{3}x \right] = \lim_{x \to \mp\infty} \left(-\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} \right) = 0$$

$\boxed{y = \frac{2}{3}x}$ kosa asimptota

Ekstremi:

$$f'(x) = \frac{2}{3} + \frac{2}{3}x^{-\frac{5}{3}} = \frac{2}{3}\left(1 + \frac{1}{\sqrt[3]{x^5}}\right)$$

$f'(x) = 0$, $\boxed{x = -1}$ stacionarna točka

Pregibi:

$$f''(x) = -\frac{10}{9\sqrt[3]{x^8}} \neq 0 \quad \text{nema pregiba}$$

$f''(x) < 0$ za $x \neq 0$ izbočen graf

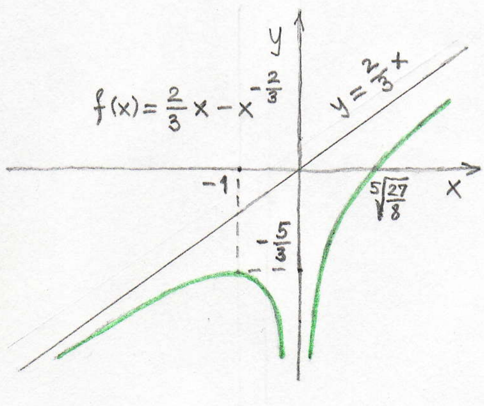
Nul-točke:

$$f(x) = 0, \quad \frac{2}{3}x - x^{-\frac{2}{3}} = 0 \,/\cdot x^{\frac{2}{3}}, \quad \frac{2}{3}x^{\frac{5}{3}} = 1, \quad x = \sqrt[5]{\frac{27}{8}}$$

Tablica:

x	$-\infty$	-8	-1	$-\frac{1}{8}$	0	8	$+\infty$
$f'(x)$		$\frac{31}{48}$	0	$-\frac{62}{3}$		$\frac{11}{16}$	
predznak		$+$		$-$		$+$	
lim	$\frac{2}{3}$				$\mp\infty$		$\frac{2}{3}$
$f(x)$			$-\frac{5}{3}$				
rast, pad / min, max		↗	max	↘		↗	
lim	$-\infty$				$-\infty$		$+\infty$

Graf:



□

Primjer 235. Ispitaj tok i nacrtaj graf funkcije $f(x) = 3\sqrt[3]{x^2} - 2x$.

Rješenje. Treba poznavati opće potencije, odnosno korijene.

Domena: $D = \mathbb{R} = \langle -\infty, +\infty \rangle$

ponašanje na rubovima domene–asimptote

$$\lim_{x \to \mp\infty} \left(3\sqrt[3]{x^2} - 2x\right) = \lim_{x \to \mp\infty} x\left(\frac{3}{\sqrt[3]{x}} - 2\right) = \pm\infty$$

$$a = \lim_{x \to \mp\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \mp\infty} \left(\frac{3}{\sqrt[3]{x}} - 2\right) = -2$$

$$b = \lim_{x \to \mp\infty} [f(x) + 2x] = \lim_{x \to \mp\infty} 3\sqrt[3]{x^2} = +\infty$$

nema kosih asimptota

$f(x) = 3x^{\frac{2}{3}} - 2x$

Ekstremi:

$f'(x) = 2x^{-\frac{1}{3}} - 2 = 2\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x}} - 1\right)$

$f'(x)$ ne postoji za $x = 0$

$f'(x) = 0$, $x = 1$ stac. točka

$x = 0$, $x = 1$ kritične točke

Pregibi:

$f''(x) = -\frac{2}{3\sqrt[3]{x^4}} \neq 0$ nema pregiba

$f''(x) < 0$ za $x \neq 0$ izbočen graf

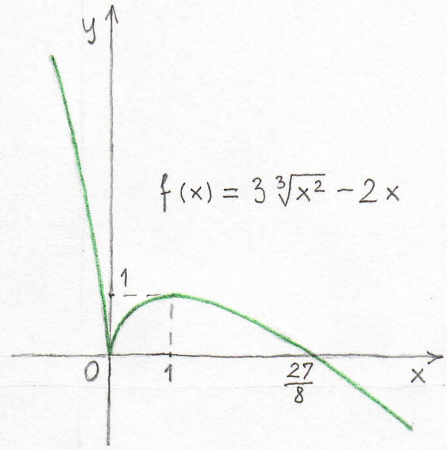
Nul-točke:

$f(x) = 0$, $x\left(\frac{3}{\sqrt[3]{x}} - 2\right) = 0$, $x = 0$, $x = \frac{27}{8}$

Tablica:

x	$-\infty\ \langle$	-1	$\rangle\ 0\ \langle$	$\frac{1}{8}$	$\rangle\ 1\ \langle$	8	$\rangle\ +\infty$
$f'(x)$		-4		2	0	-1	
predznak		$-$		$+$		$-$	
lim	-2		$\mp\infty$				-2
$f(x)$			0		1		
rast, pad min, max		↘	min	↗	max	↘	
lim	$+\infty$						$-\infty$

Graf:



□

Primjer 236. Ispitaj tok i nacrtaj graf funkcije $f(x) = 2 - xe^{\frac{1}{x-2}}$.

Rješenje. Treba poznavati racionalne i eksponencijalne funkcije.

Domena: $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{2\} = \langle -\infty, 2 \rangle \cup \langle 2, +\infty \rangle$

ponašanje na rubovima domene - asimptote

$$\lim_{x \to 2-} \left(2 - xe^{\frac{1}{x-2}}\right) = 2 - \lim_{x \to 2-} x \cdot \lim_{x \to 2-} e^{\frac{1}{x-2}} = 2 - 2 \cdot 0 = 2$$

$$\lim_{x \to 2+} \left(2 - xe^{\frac{1}{x-2}}\right) = -\infty \quad \text{jer je} \quad \lim_{x \to 2+} e^{\frac{1}{x-2}} = +\infty$$

$\boxed{x = 2}$ jednostrana okomita asimptota

$$a = \lim_{x \to \mp\infty} \frac{f(x)}{x} = -1 \qquad b = \lim_{x \to \mp\infty} [f(x) + x] = 1$$

$\boxed{y = -x + 1}$ kosa asimptota

Ekstremi:

$$f'(x) = \frac{(x-1)(4-x)}{(x-2)^2} e^{\frac{1}{x-2}}$$

$\boxed{x = 1, x = 4}$ stac. točke

Predznaci:

za određivanje predznaka derivacije $f'(x)$ dovoljan je izraz $(x-1)(4-x)$

Tablica:

x	$-\infty$	0	1	$\frac{3}{2}$	2	3	4	5	$+\infty$
$f'(x)$			0				0		
predznak		$-$		$+$		$+$		$-$	
lim	-1				$0, +\infty$				-1
$f(x)$			$2 - \frac{1}{e}$				$2 - 4\sqrt{e}$		
rast, pad min, max		$\searrow$	min	$\nearrow$		$\nearrow$	max	$\searrow$	
lim	$+\infty$				$2, -\infty$				$-\infty$

Pregibi:

$$f''(x) = \frac{-5x+8}{(x-2)^4} e^{\frac{1}{x-2}}, \quad u'(x) = -5$$

$$f''(x) = 0, \quad -5x + 8 = 0$$

$\boxed{x = \frac{8}{5}}$ apscisa pregiba

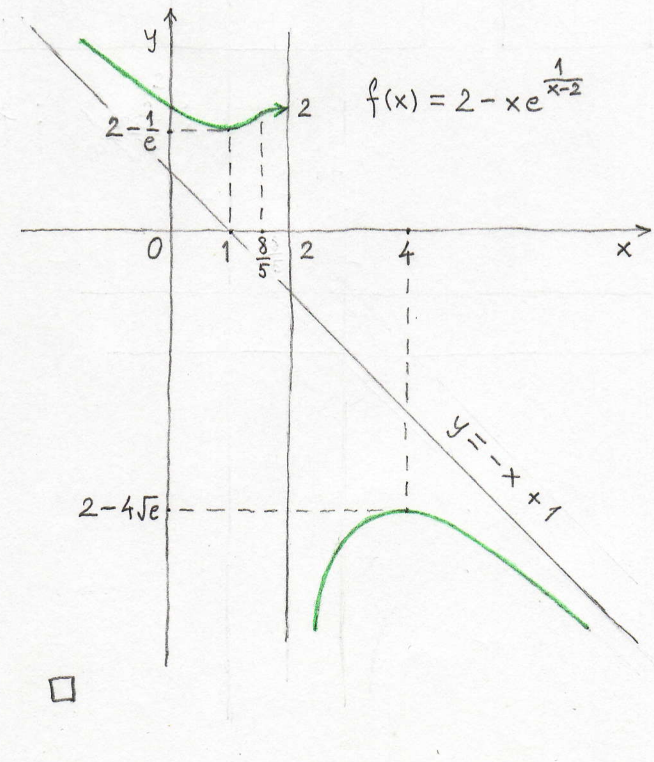
$f''(x) > 0$ za $x < \frac{8}{5}$

udubljen graf

$f''(x) < 0$ za $x > \frac{8}{5}$, $x \neq 2$

izbočen graf

Graf:



$\square$

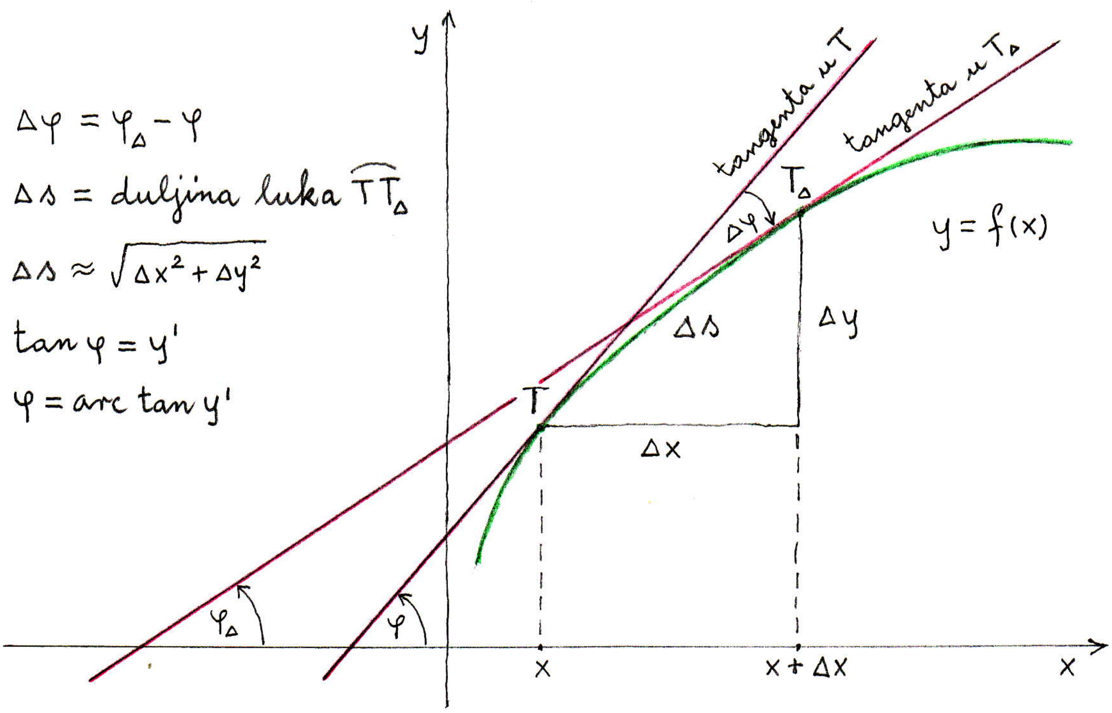
17. Zakrivljenost

Pojam zakrivljenosti se na prirodan način više veže uz krivulju nego uz funkciju. Kao i do sada, krivulju će predstavljati graf funkcije $y=f(x)$. U ovoj lekciji predpostavljamo da je krivulja dovoljno gladka, ili da je barem njen dio oko promatrane točke T (luk oko točke T) dovoljno gladak. Određenije, predpostavljamo da funkcija $y=f(x)$ ima neprekinutu drugu derivaciju barem oko promatranog broja x.

Zakrivljenost krivulje u njenoj točki T, opisno govoreći, "mjeri" otklon krivulje od tangente u točki T. Definicija je složena, i kaže da je **zakrivljenost** krivulje u njenoj točki T broj

$$\varkappa(T) = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta \varphi}{\Delta s},$$

tj. granična vrijednost količnika kuta kontingencije $\Delta\varphi$ (lat. contingere = hrv. dostići) i duljine luka Δs kada se luk krivulje "skraćuje" u točku T.



kut kontingencije $\Delta\varphi$ i duljina luka Δs

Pokušajmo nekako uz pomoć diferencijalâ izvesti formulu za računanje zakrivljenosti:

$$K(T) = K(x) = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta s} = \frac{d\varphi}{ds} = \frac{\frac{d\varphi}{dx}}{\frac{ds}{dx}}$$

$$\frac{d\varphi}{dx} = (\arctan y')' = \frac{y''}{1+y'^2}$$

$$\frac{ds}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0\pm} \frac{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}}{\pm\sqrt{\Delta x^2}} =$$

$$= \pm \lim_{\Delta x \to 0\pm} \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2} = \pm\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = \pm\sqrt{1+y'^2}$$

$$K(x) = \frac{\frac{y''}{1+y'^2}}{\pm\sqrt{1+y'^2}} = \pm\frac{y''}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Izraz ds predstavlja **diferencijal luka** krivulje, a može se izraziti i formulom $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$. Predznaci u izrazu za $K(x)$ stvaraju poteškoće, a nisu bitni kao ni predznak druge derivacije y'' (govori o konkavnosti ili konveksnosti krivulje). Zato ćemo formulu za računanje zakrivljenosti zapisati kao nenegativnu veličinu

$$\boxed{K(x) = \frac{|y''|}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}}\,.$$

Primjer 237. Izračunaj zakrivljenost parabole $y = x^2$, prvo u bilo kojoj točki, a zatim u točkama s ordinatom $y = 2$. U kojoj je točki parabole zakrivljenost najveća?

Rješenje. Zakrivljenost u bilo kojoj točki, s apscisom x:

$$y = x^2 \quad , \quad y' = 2x \quad , \quad y'' = 2$$

$$K(x) = \frac{2}{[1+(2x)^2]^{\frac{3}{2}}} = \frac{2}{\sqrt{(1+4x^2)^3}}$$

Zakrivljenost u točkama s ordinatom $y=2$:

$$x^2=2\ ,\quad x=\pm\sqrt{2}$$

$$K(\pm\sqrt{2})=\frac{2}{\sqrt{(1+4\cdot 2)^3}}=\frac{2}{27}$$

Najveća zakrivljenost:

Zakrivljenost $K(x)$ je najveća kad je izraz u nazivniku najmanji, a to se postiže za $x=0$. Najveća je zakrivljenost u tjemenu $(0,0)$ i iznosi

$$K(0)=2\,.$$

□

Primjer 238. Odredi zakrivljenost prirodnog logaritma $y=\ln x$ i pronađi njegovo tjeme, tj. točku u kojoj je zakrivljenost najveća ili najmanja.

Rješenje. Zakrivljenost:

$$y=\ln x\ ,\quad y'=\frac{1}{x}\ ,\quad y''=-\frac{1}{x^2}\ ;\ x>0$$

$$K(x)=\frac{\frac{1}{x^2}}{\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^{\frac{3}{2}}}=\frac{\frac{1}{x^2}}{\sqrt{\left(\frac{x^2+1}{x^2}\right)^3}}=\frac{x}{\sqrt{(1+x^2)^3}}$$

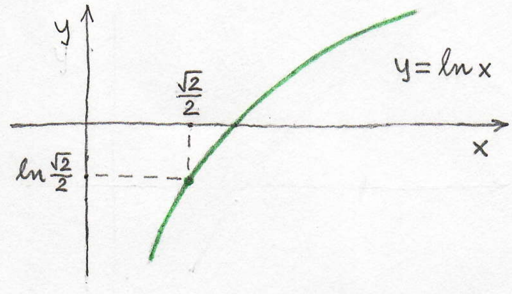
Tjeme, ekstrem funkcije $K(x)$:

$$K(x)=x\,(1+x^2)^{-\frac{3}{2}}$$

$$K'(x)=(1+x^2)^{-\frac{3}{2}}-3x^2\,(1+x^2)^{-\frac{5}{2}}=\frac{1-2x^2}{\sqrt{(1+x^2)^5}}$$

$$K'(x)=0\ ,\quad 1-2x^2=0\ ,\quad x=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

x	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	$+\infty$
$K'(x)$			0		
predznak		$+$		$-$	
$K(x)$			$\frac{2\sqrt{3}}{9}$		
rast, pad / min, max		↗	max	↘	



tjeme prirodnog logaritma

□

Primjer 239. Izračunaj zakrivljenost krivulje $xy = \ln(x-y)$ u njenom sjecištu s ordinatom.

Rješenje. Apscisa sjecišta s ordinatom iznosi nula, tj. $x=0$.

$$xy = \ln(x-y) \;\Big|\; x=0 \Rightarrow y=-1$$

$$y + xy' = \frac{1-y'}{x-y} \;\Big|\; x=0,\ y=-1 \Rightarrow y'=2$$

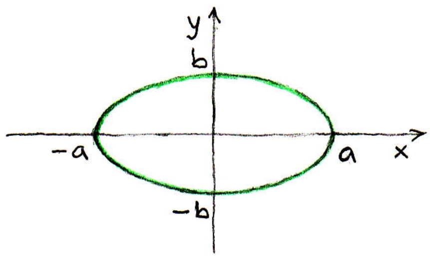
$$2y' + xy'' = -\frac{(x-y)y'' + (1-y')^2}{(x-y)^2} \;\Big|\; x=0,\ y=-1,\ y'=2 \Rightarrow y''=-5$$

$$\varkappa(0) = \frac{|y''|}{\sqrt{(1+y'^2)^3}} = \frac{|-5|}{\sqrt{(1+2^2)^3}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

□

Primjer 240. Izračunaj najveću i najmanju zakrivljenost elipse s poluosima a i b, $a>b$.

Rješenje. Poslužimo se parametarskim jednadžbama elipse te izrazimo njenu zakrivljenost:



$$x = a\cos t \qquad y = b\sin t$$

$$\dot{x} = -a\sin t \qquad \dot{y} = b\cos t$$

$$\ddot{x} = -a\cos t \qquad \ddot{y} = -b\sin t$$

$$y' = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = -\frac{b\cos t}{a\sin t}\,, \quad \dot{(y')} = \frac{b}{a\sin^2 t}\,, \quad y'' = (y')' = \frac{\dot{(y')}}{\dot{x}} = -\frac{b}{a^2\sin^3 t}$$

$$\varkappa = \frac{ab}{\sqrt{(a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t)^3}}$$

Najveća zakrivljenost je u tjemenima $(\pm a, 0)$ za $t=0$ i $t=\pi$, a iznosi

$$\varkappa_{max} = \frac{a}{b^2}\,.$$

Najmanja zakrivljenost je u tjemenima $(0, \pm b)$ za $t=\frac{\pi}{2}$ i $t=\frac{3\pi}{2}$, a iznosi

$$\varkappa_{min} = \frac{b}{a^2}\,.$$

□

18. Taylorova formula

Polinomi, kao najjednostavnije funkcije, zauzimaju posebno mjesto u matematičkoj analizi. Osnovna je ideja funkcijske analize, bilo teorijske bilo praktične, funkciju zamijeniti polinomom. Ostvarenje te ideje su omogućile derivacije. Vrlo jasan putokaz toj zamisli je približna jednakost

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

koja nastaje iz jednadžbe tangente zamjenom $y-a$ s $f(x)$.

Primjer 241. Bazu x, polinoma $f(x) = 3x^2 - 2x + 4$, promijeni u bazu $x-2$.

Rješenje. Neka je $x - 2 = t$, odnosno $x = t+2$. Prvo u izraz za $f(x)$ umjesto x uvrstimo $t+2$,

$$f(t+2) = 3(t+2)^2 - 2(t+2) + 4 = 3t^2 + 12t + 12 - 2t - 4 + 4 =$$
$$= 3t^2 + 10t + 12,$$

a zatim u ovaj izraz umjesto t uvrstimo $x-2$,

$$f(x) = 3(x-2)^2 + 10(x-2) + 12.$$

$\square$

Dakle, promjena baze nije neka poteškoća. Ona se može postići za svaki polinom. Mi ćemo funkciju $f(x)$ promatrati u okolini točke x_0 za što je pogodna baza $x - x_0$.

Koeficijente polinoma možemo izraziti pomoću derivacija. To ćemo sada napraviti za linearni i kvadratni polinom s bazom $x - x_0$. Zbog cjeline i sklada, krenut ćemo od konstante. Neka je x_0 bilo koji broj.

Prikaz konstante pomoću x_0

$$f(x) = a_0 \;\big|\; x = x_0 \quad \Rightarrow \quad f(x_0) = a_0$$

$$f(x) = f(x_0)$$

Prikaz linearnog polinoma pomoću x_0 i derivacije

$$f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) \quad | \; x = x_0 \quad \Rightarrow \quad f(x_0) = a_0$$
$$f'(x) = a_1 \quad | \; x = x_0 \quad \Rightarrow \quad f'(x_0) = a_1$$

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

Prikaz kvadratnog polinoma pomoću x_0 i derivacija

$$f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 \quad | \; x = x_0 \quad \Rightarrow \quad f(x_0) = a_0$$
$$f'(x) = a_1 + 2a_2(x - x_0) \quad | \; x = x_0 \quad \Rightarrow \quad f'(x_0) = a_1$$
$$f''(x) = 2a_2 \quad | \; x = x_0 \quad \Rightarrow \quad f''(x_0) = 2a_2$$

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2} f''(x_0)(x - x_0)^2$$

Istim postupkom dolazimo do prikaza polinoma trećeg stupnja

$$f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + a_3(x - x_0)^3 =$$
$$= f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2!} f''(x_0)(x - x_0)^2 + \frac{1}{3!} f'''(x_0)(x - x_0)^3,$$

a poopćenjem ovih rezultata do prikaza polinoma n-tog stupnja

$$f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \cdots + a_n(x - x_0)^n =$$
$$= f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2!} f''(x_0)(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n.$$

Pomoću znaka za zbrajanje ovaj se prikaz može kraće zapisati kao

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} f^{(k)}(x_0)(x - x_0)^k$$

gdje je $f^{(0)}(x_0) = f(x_0)$. Faktorijeli ili umnožaci su definirani pravilom:

$$0! = 1, \quad 1! = 1, \quad 2! = 2 \cdot 1, \quad 3! = 3 \cdot 2 \cdot 1, \quad \ldots, \quad n! = n(n-1)\ldots 1.$$

Prikaz gotovo istovjetan gornjem prikazu polinoma može se postići za svaku funkciju $f(x)$ koja ima derivacije u točki x_0. Jedina je razlika pojava ostatka R na desnoj strani. Takav prikaz funkcije $f(x)$ je poznata **Taylorova formula**:

$$\boxed{\begin{aligned} f(x) &= f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2!} f''(x_0)(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n + R = \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} f^{(k)}(x_0)(x - x_0)^k + R. \end{aligned}}$$

Desna strana formule sadrži polinom stupnja manjeg od n (ako je $f^{(n)}(x_0)=0$) ili jednakog n (ako je $f^{(n)}(x_0)\neq 0$) i ostatak R. Ostatak R (inače) izgleda poput zadnjeg člana pa je to manji što je n veći i što je x bliže x_0. Gledano u okolini točke x_0, za funkciju f(x) i članove formule se može reći: prvi član formule je najbolja zamjena funkcije konstantom, prva dva člana su najbolja zamjena linearnom funkcijom (ako je $f'(x_0)\neq 0$), prva tri člana su najbolja zamjena kvadratnom funkcijom (ako je $f''(x_0)\neq 0$), itd.

Taylorov prikaz funkcije f(x) u okolini točke x_0, za $x_0=0$ to je i Maclaurinov prikaz, predstavlja jednu od najvažnijih formula matematičke analize.

Primjer 242. Odredi Taylorov polinom trećeg stupnja za funkciju $f(x)=\sqrt{x^3}$ u okolini broja $x_0=4$.

Rješenje. Za određivanje koeficijenata polinoma potrebno je izračunati brojeve $f(4)$, $f'(4)$, $f''(4)$ i $f'''(4)$:

$$f(x)=x^{\frac{3}{2}}=\sqrt{x^3} \qquad f(4)=8$$

$$f'(x)=\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}=\frac{3\sqrt{x}}{2} \qquad f'(4)=3$$

$$f''(x)=\frac{3}{4}x^{-\frac{1}{2}}=\frac{3}{4\sqrt{x}} \qquad f''(4)=\frac{3}{8}$$

$$f'''(x)=-\frac{3}{8}x^{-\frac{3}{2}}=-\frac{3}{8\sqrt{x^3}} \qquad f'''(4)=-\frac{3}{64}$$

$$f_{poč}(x)=8+3(x-4)+\frac{\frac{3}{8}}{2!}(x-4)^2+\frac{-\frac{3}{64}}{3!}(x-4)^3=$$
$$=8+3(x-4)+\frac{3}{16}(x-4)^2-\frac{1}{128}(x-4)^3$$

□

Primjer 243. Odredi Taylorov polinom četvrtog stupnja za funkciju $f(x)=\cos x$ u okolini točke $x_0=0$. Očituje li se parnost kosinusa u tom polinomu? Ima li funkcija kosinus Taylorov polinom neparnog stupnja?

Rješenje.

$$f(x)=\cos x \qquad f(0)=1$$
$$f'(x)=-\sin x \qquad f'(0)=0$$
$$f''(x)=-\cos x \qquad f''(0)=-1$$
$$f'''(x)=\sin x \qquad f'''(0)=0$$
$$f^{IV}(x)=\cos x \qquad f^{IV}(0)=1$$

$$f_{pol}(x)=1-\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{4!}x^4$$

□

Primjer 244. Odredi Taylorov polinom četvrtog stupnja za funkciju $f(x)=\ln x$ u okolini jedinice ($x_0=1$).

Rješenje.

$$f(x)=\ln x \qquad f(1)=0$$
$$f'(x)=\frac{1}{x} \qquad f'(1)=1$$
$$f''(x)=-\frac{1}{x^2} \qquad f''(1)=-1$$
$$f'''(x)=\frac{2}{x^3} \qquad f'''(1)=2$$
$$f^{IV}(x)=-\frac{6}{x^4} \qquad f^{IV}(1)=-6$$

$$f_{pol}(x)=(x-1)-\frac{1}{2!}(x-1)^2+\frac{2}{3!}(x-1)^3-\frac{6}{4!}(x-1)^4=$$
$$=(x-1)-\frac{1}{2}(x-1)^2+\frac{1}{3}(x-1)^3-\frac{1}{4}(x-1)^4$$

□

Primjer 245. Odredi Taylorov polinom četvrtog stupnja za funkciju $f(x)=e^x$ u okolini nule ($x_0=0$). Izračunaj približne vrijednosti brojeva e i $\sqrt{e}$. Kalkulatorom provjeri koja je približna vrijednost bolja. Zašto je bolja?

Rješenje.

$$f(x)=f'(x)=f''(x)=f'''(x)=f^{IV}(x)=e^x$$
$$f(0)=f'(0)=f''(0)=f'''(0)=f^{IV}(0)=1$$

$$f_{pol}(x)=1+x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{24}x^4$$

$$e=f(1)\approx f_{pol}(1)=1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{24}=\frac{65}{24}$$

$$\sqrt{e}=f(\tfrac{1}{2})\approx f_{pol}(\tfrac{1}{2})=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{8}+\frac{1}{48}+\frac{1}{384}=\frac{211}{128}$$

Bolja je približna vrijednost za $\sqrt{e}$ zato što je $x = \frac{1}{2}$ bliže nuli $x_0 = 0$ nego $x = 1$.

□

Primjer 246. Odredi Taylorov polinom trećeg stupnja za funkciju $f(x) = \frac{1}{1-2x}$ u okolini nule. Izračunaj $f_{pol}(1)$ i $f(1)$. Što opažaš?

Rješenje.

$$f(x) = (1-2x)^{-1} \qquad f(0) = 1$$

$$f'(x) = 2(1-2x)^{-2} \qquad f'(0) = 2$$

$$f''(x) = 8(1-2x)^{-3} \qquad f''(0) = 8$$

$$f'''(x) = 48(1-2x)^{-4} \qquad f'''(0) = 48$$

$$f_{pol}(x) = 1 + 2x + 4x^2 + 8x^3$$

$$f_{pol}(1) = 15 \quad , \quad f(1) = -1$$

□

Primjedba. Ovako velika razlika između $f_{pol}(1)$ i $f(1)$ u predhodnom primjeru upućuje na vrlo važan problem konvergencije. Dalji razvoj teorije o Taylorovim polinomima prirodno vodi u teoriju redova. Središnji dio te teorije su redovi potencija od x, ili općenito, redovi potencija od $x - x_0$.

Srednjoškolsku formulu za geometrijski red

$$\frac{1}{1-q} = 1 + q + q^2 + \cdots \qquad \text{za } |q| < 1$$

primijenimo na funkciju $f(x) = \frac{1}{1-2x}$:

$$\frac{1}{1-2x} = 1 + 2x + 4x^2 + \cdots \qquad \text{za } |2x| < 1 .$$

Red na desnoj strani ima smisla samo uz ograničenje $|x| < \frac{1}{2}$.