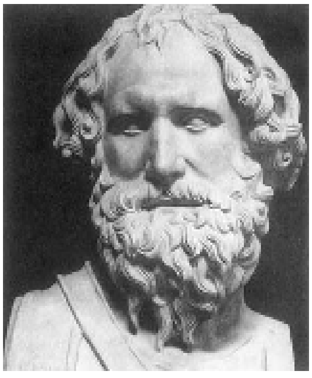
II. ODREĐENI INTEGRALI

Uvod s povijesnim osvrtom

Račun derivacija zajedno s računom integrala tvori infinitezimalni račun. To je najvažniji znanstveni račun. Za prirodne i tehničke znanosti infinitezimalni račun predstavlja neku vrstu "nosive konstrukcije".

Najveći starogrčki filozof i matematičar Arhimed (oko 287-212 prije Krista) je u 3. stoljeću prije Krista usavršio jednu metodu za računanje površine i obujma. Gotovo dvije tisuće godina kasnije, u 17. stoljeću, iz te je metode razvijena integralna metoda. Sama Arhimedova metoda je tada prozvana metodom ekshaustije, tj. metodom iscrpljivanja (lat. exauriere = hrv. iscrpiti).

Određeni integral, kakvim ga poznajemo danas, potječe od njemačkog matematičara Georga Riemanna (1826 – 1866).



Arhimed

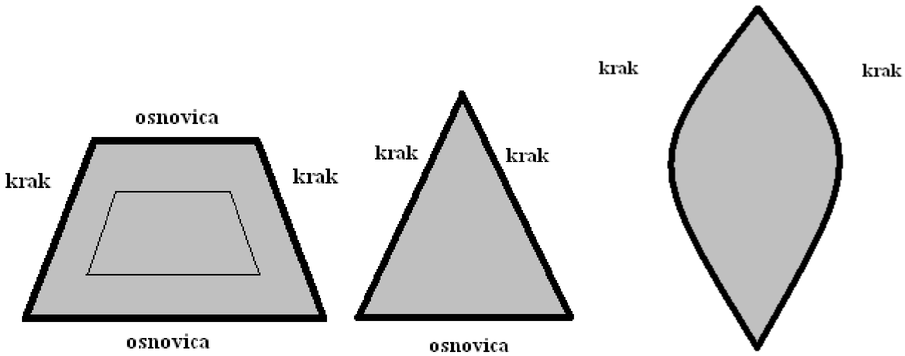
Georg Riemann

Lekcije

1. Problem površine

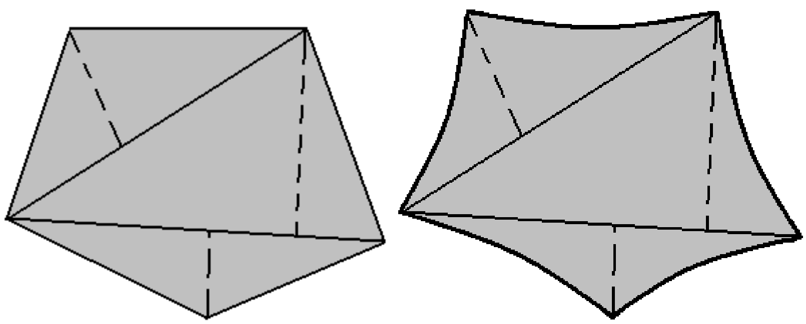
1.1. Krivuljni trapez

Kada se dopusti da krakovi trapeza mogu biti krivulje, nastane lik koji se zove krivuljni trapez. Isti se naziv koristi za srodan lik omeđen s jednom osnovicom i dva kraka, te za lik omeđen s dva kraka. Po ovoj općenitoj definiciji i trokut je krivuljni trapez.



krivuljni trapezi

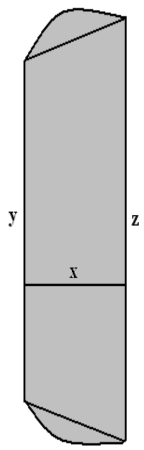
Mnogokut se može rastaviti na trokute, ako je potrebno na pravokutne trokute. Ravninski lik omeđen krivuljama, „krivuljni mnogokut", se može rastaviti na krivuljne trapeze, po potrebi pravokutne. Ovi rastavi su općenito korisni, a naročito su pogodni za računanje površina.



rastav ravnog i krivuljnog mnogokuta

1.2. Površina krivuljnog trapeza

Površina krivuljnog trapeza čiji su krakovi relativno mali spram osnovica ("tanki trapez") se može približno odrediti pomoću ravnog trapeza ili pravokutnika.



$$P \approx x * \frac{y+z}{2}$$

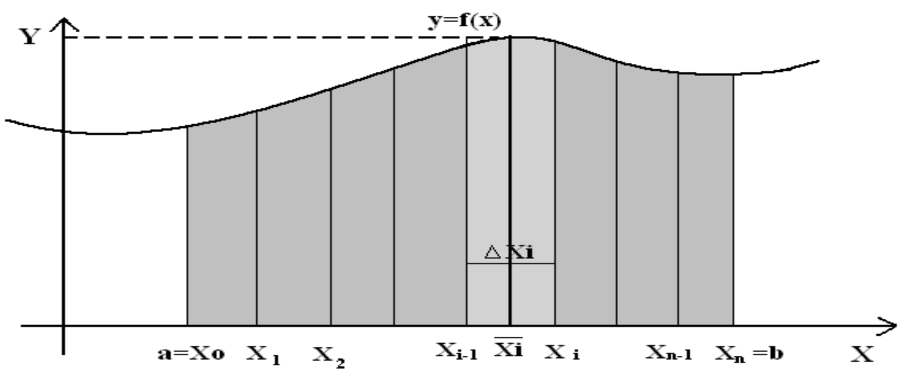
$$\approx x * \mathrm{y}$$

$$\approx x * \mathrm{z}$$

$$\approx x * \mathrm{f(x)}, \quad \mathrm{y} \leq \mathrm{f(x)} \leq \mathrm{z}$$

približna površina krivuljnog trapeza relativno male visine x

Želimo odrediti površinu krivuljnog trapeza ispod grafa neke funkcije f(x). Promatrajmo dakle funkciju f(x) na zatvorenom intervalu [a,b]. Radi lakšeg računanja, a bez sumnjanja općenitosti, pretpostavimo da je funkcija f(x) pozitivna na intervalu [a,b]. Promatrat ćemo pravokutni krivuljni trapez omeđen pravcima x = a, x = b, y = 0 i grafom krivulje y = f(x).



pravokutni krivuljni trapez ispod grafa pozitivne funkcije

Prvo odredimo približnu površinu ovog krivuljnog trapeza. Rastavimo trapez na mnoštvo od n “tankih“ pravokutnih krivuljnih trapeza kao na slici. Približna površina ΔP_i i-tog krivuljnog trapeza, izračunata pomoću površine pravokutnika sa stranicama Δx_i i $f\left(\overline{x_i}\right)$, iznosi

$$\Delta P_i = \Delta x_i f\left(\overline{x_i}\right).$$

Zbrajanjem približnih površina svih n “tankih“ krivuljnih trapeza, dobiva se približna površina $P_n = \Delta P(n)$ cijelog krivuljnog trapeza:

$$P_n = \Delta P(n) = \sum_{i=1}^{n} \Delta P_i = \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i f\left(\overline{x_i}\right).$$

Približna površina P_n ovisi o broju “tankih“ krivuljnih trapeza, tj. o broju n. Zamislimo da taj broj n raste i da pri tom niz približnih površina (P_n) konvergira. Tada broj

$$P = \lim_{n\to\infty} P_n$$

predstavlja površinu krivuljnog trapeza.

Napomena. Površina P ovisi samo o funkciji f(x) i zatvorenom intervalu [a,b]. Kao što smo upravo vidjeli do površine P se dolazi preko niza približnih površina (Pn). Približna površina P_n, pored funkcije f(x) i zatvorenog intervala [a,b], ovisi još o rastavu tog intervala na n podintervala i izboru po jednog broja iz svakog podintervala.Za smislenost definicije broja P ključno je pitanje kakav mora biti rastav intervala [a,b] na n podintervala, a za postojanje broja P ključno je pitanje kakva mora biti funkcija f(x). Same odgovore na ova dva teška pitanja nudi sljedeća lekcija, bez strogih obrazloženja i u smanjenoj općenitosti.

2. Određeni integral

2.1. Definicija određenog integrala

Neka je funkcija f(x) neprekinuta na zatvorenom intervalu [a,b]. Odaberimo jedan prirodni broj n (broj n treba zamišljati kao veliki broj). Rastavimo interval [a,b] na n podintervala ($x_0 = a$, $x_n = b$):

$$[a,b] = [x_0, x_1] \cup [x_1, x_2] \cup \ldots \cup [x_{n-1}, x_n],$$

ali tako da se svaki od tih podintegrala steže u jednu točku kada se dopusti da n neograničeno raste. Takav je npr. rastav na n podintervala iste duljine. Iz svakog podintervala $[x_{i-1}, x_i]$ odaberimo po jedan broj x_i, a duljinu dotičnog podintervala označimo s $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$. Na isti način kao u prethodnoj lekciji definira se n-ti djelomični zbroj

$$\sum_{i=1}^{n} f\left(\overline{x_i}\right)\Delta x_i \ .$$

Definicija. **Određeni integral** funkcije $f\left(x\right)$ koja je neprekinuta na zatvorenom intervalu $\left[a,b\right]$ je vrijednost niza djelomičnih zbrojeva, a bilježi se oznakom

$$\int_a^b f\left(x\right)dx .$$

Zanimljivo je da broj

$$\int_a^b f\left(x\right)dx = \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{i=1}^{n} f\left(\overline{x_i}\right)\Delta x_i\right)$$

ne ovisi o rastavu intervala [a,b] na podintervale (rastav jedino mora udovoljavati zahtjevu da se svaki od podintervala steže u jednu točku kada se dopusti da n neograničeno raste) kao ni o izboru brojeva $\overline{x_i}$ iz podintervala $[x_{i-1}, x_1]$. Postojanje granične vrijednosti niza djelomičnih zbrojeva osigurava neprekinutost funkcije f(x).

Dodatak definiciji.

$$\int_a^a f(x)\,dx = 0 \quad , \quad \int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx$$

Primjer 68. Izračunaj po definiciji $\int_0^1 x dx$.

Rješenje. Odaberimo prirodni broj n. Interval [0,4] rastavimo na n jednakih podintervala (duljina svakog podintervala iznosi $\Delta x = \frac{1}{n}$):

$$[0, \tfrac{1}{n}] , [\tfrac{1}{n} , \tfrac{2}{n}] , \; .... \; , [\tfrac{i-1}{n} , \tfrac{i}{n}] , ... , [\tfrac{n-2}{n} , \tfrac{n-1}{n}] , [\tfrac{n-1}{n} , 1].$$

Uzmemo li za brojeve $\overline{x_i}$ desne krajeve podintervala, slijede vrijednosti funkcije

$$f\left(\overline{x_i}\right) = \overline{x_i} = \frac{i}{n} \quad \text{za} \quad i = 1,\ldots,n$$

i n-ti djelomični zbroj

$$\sum_{i=1}^{n} f(xi)\,\Delta xi \; = \; \sum_{i=1}^{n} \frac{i}{n}\,\frac{i}{n} = \; \frac{i}{n^2} \sum_{i=1}^{n} i = \; \frac{i}{n^2}\,\frac{n(n+1)}{2} = \frac{n+1}{2n}.$$

Granična vrijednost niza djelomičnih zbrojeva

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{2n} = \frac{1}{2} \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = \frac{1}{2} * 1 = \frac{1}{2}$$

predstavlja traženi broj, pa je

$$\int_0^1 x dx = \frac{1}{2}.$$

□

2.2. Računska pravila određenog integrala

Ako su funkcije $f(x)$ i $g(x)$ neprekinute na zatvorenom intervalu [a,b], tada vrijede pravila:

$$\int_a^b \big(f(x) + g(x)\big)dx \; = \; \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$$

$$\int_a^b \big(f(x) - g(x)\big)dx \; = \; \int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx$$

$$\int_a^b [cf(x)]dx = c\int_a^b f(x)dx$$

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx \ , \quad a \le c \le b$$

2.3. Integralna metoda

U definiciji određenog integrala je sadržana jedna znanstvena metoda,integralna metoda,koja se može provesti u tri koraka.Pretpostavimo da želimo odrediti točnu vrijednost Q neke veličine.

Prvi korak. Promatranu veličinu rastavimo na n malih dijelova sličnih cjelini. Vrijednost svakog malog istog dijela zamijenimo približnom, nama promatranom vrijednošću

$$\Delta Qi.$$

Drugi korak. Odredimo zbroj Qn svih približnih vrijednosti ΔQi :

$$\mathrm{Qn} = \sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{n}} \Delta \mathrm{Qi}\,.$$

Treći korak. Graničnim prijelazom (puštanjem da $n \to \infty$), ako ima smisla, izračunamo točnu vrijednost

$$\mathrm{Q} = \lim_{n\to\infty} \mathrm{Q}n.$$

3. Računanje određenog integrala

3.1. Leibniz-Newtonova formula

Računanje određenog integrala neposredno po definiciji je vrlo sporo i teško.U to smo se uvjerili u Primjeru 68 iz predhodne lekcije.Tako će nam dobro doći formula iz sljedećeg teorema koja uvelike skraćuje "muke po računanju".

Teorem (Leibniz-Newtonova formula). Neka je funkcija $f(x)$ neprekinuta na $[a,b]$ i neka je $F(x)$ bilo koja njena antiderivacija.Tada je

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Po mnogima,ovo je najvažnija znanstvena formula. Bez ove formule ni sam infinitezimalni račun ne bi bio ono što jest,središnji znanstveni račun. Pored Leibniza i Newtona za ovu su formulu znali još neki matematičari 17. stoljeća.

Formula je toliko važna zato što povezuje dva, moglo bi se reći udaljena pojma. Na lijevoj strani formule je određeni integral $\int_a^b f(x)\,dx$ koji predstavlja površinu, a na desnoj strani je samo razlika, $F(b) - F(a)$,dviju vrijednosti antiderivacije $F(x)$. Uzmu li se u obzir mnogobrojne primjene određenog integrala,formula dobiva još veće značenje. Zbog ove formule je oznaka određenog integrala,uz ispuštanje granica, preuzeta i kao oznaka za skup antiderivacija koji je prozvan neodređenim integralom.

Primjer 69. Pomoću Leibniz-Newtonove formule izračunaj

$$\int_1^2 (3x^2 - 2x + 1)dx.$$

Rješenje. Određivanje jedne antiderivacije $F(x)$:

$$F(x) = \int (3x^2 - 2x + 1)dx = x^3 - x^2 + x$$

Računanje razlike $F(2) - F(1)$:

$$F(2) - F(1) = (2^3 - 2^2 + 2) - (1^3 - 1^2 + 1) = 5$$

Primjena formule:

$$\int_1^2 (3x^2 - 2x + 1)dx = 5$$

□

Napomena. Sve napisano u prethodnom primjeru se obično kraće piše ovako:

$$\int_1^2 (3x^2 - 2x + 1)dx = (x^3 - x^2 + x)\Big|_1^2 = (2^3 - 2^2 + 2) - (1^3 - 1^2 + 1) = 5$$

Primjer 70. Pomoću Leibniz-Newtonove formule izračunaj

$$\int_0^\pi (\sin x - \cos x)\,dx .$$

Rješenje.

$$\int_0^\pi (\sin x - \cos x)\,dx = (-\cos x - \sin x)\Big|_0^\pi = (-\cos \pi - \sin \pi) - (-\cos 0 - \sin 0) = 2$$

□

Primjer 71. Izračunaj $\int_{-1}^{0} \frac{x}{2x^2-3}\, dx$.

Rješenje.

$$\int \frac{x}{2x^2-3}\, dx \left| \begin{matrix} 2x^2-3=t \\ x\,dx = \frac{1}{4}dt \end{matrix} \right| = \frac{1}{4}\int \frac{1}{t}dt = \frac{1}{4}\ln|t| = \frac{1}{4}\ln|2x^2-3|$$

$$\int_{-1}^{0} \frac{x}{2x^2-3}dx = \frac{1}{4}\ln\left|2x^2-3\right| \Big|_{-1}^{0} = \frac{1}{4}\left(\ln|-3| - \ln|-1|\right) = \frac{1}{4}\ln 3$$

□

Primjer 72. Izračunaj $\int_1^e x^2 \ln x\, dx$.

Rješenje.

$$\int x^2 \ln x\, dx \left| \begin{matrix} u=\ln x & dv = x^2dx \\ du = \frac{1}{x}dx & v = \frac{1}{3}x^3 \end{matrix} \right| =$$

$$= \frac{1}{3}x^3\ln x - \frac{1}{3}\int x^2 dx = \frac{1}{9}x^3(3\ln x - 1) =$$

$$= \int_1^e x^2 \ln x\, dx = \frac{1}{9}x^3(3\ln x - 1) \Big|_1^e =$$

$$= \frac{1}{9}[e^3(3\ln e - 1) - 1^3(3\ln 1 - 1)] = \frac{1}{9}(2e^3+1)$$

□

3.2. Integrali s promjenljivim granicama

Kada je promjenljiva veličina granica određenog integrala tada se radi o integralu s promjenljivim granicama.

Primjer 73. Odredi funkciju $f(x)$ i izračunaj $f(2)$, ako je $f(x) = \int_1^x t^2 dt$.

Rješenje.

$$f(x) = \int_1^x t^2 dt = \frac{1}{3}t^3 \Big|_1^x = \frac{1}{3}(x^3-1)$$

$$f(2) = \frac{1}{3}\left(2^3-1\right) = \frac{7}{3}$$

□

Primjer 74. Odredi funkciju $f(x)$ i izračunaj $f(-1)$, ako je $f(x) = \int_{x+1}^{4} \sqrt{t}\, dt$.

Rješenje.

$$f(x) = \int_{x+1}^{4} \sqrt{t}\, dt = \frac{2}{3}\sqrt{t^3}\,\Big|_{x+1}^{4} = \frac{2}{3}\left(8 - \sqrt{(x+1)^3}\right)$$

$$f(-1) = \frac{2}{3}\left(8 - \sqrt{(-1+1)^3}\right) = \frac{16}{3}$$

□

Primjer 75. Odredi $f(x) = \int_{3x}^{x+2} t^{-1} dt$ i izračunaj $f(4)$.

Rješenje.

$$f(x) = \int_{3x}^{x+2} \frac{1}{t} dt = \ln|t|\,\Big|_{3x}^{x+2} = \ln|x+2| - \ln|3x| = \ln\left|\frac{x+2}{3x}\right|$$

$$f(4) = \ln\left|\frac{4+2}{3 \cdot 4}\right| = \ln\frac{1}{2} = -\ln 2$$

□

Primjer 76. Deriviraj funkciju $F(x) = \int_{a}^{x} f(t)\, dt$, ako je $f(t) = t - \cos t$. Je li $F'(x) = f(x)$?

Rješenje.

$$F(x) = \int_{a}^{x} (t - \cos t)\, dt = \left(\frac{1}{2}t^2 - \sin t\right)\Big|_{a}^{x} =$$

$$= \frac{1}{2}x^2 - \sin x - \frac{1}{2}a^2 + \sin a$$

$$F'(x) = x - \cos x = f(x)$$

□

Primjer 77. Odredi $f(x) = \int_{x}^{x-1} \frac{t}{t-1} dt$.

Rješenje.

$$\int \frac{t}{t-1} dt \left|\begin{matrix} t-1 = s \\ dt = ds \end{matrix}\right| = \int \frac{s+1}{s} ds = \int \left(1 + \frac{1}{s}\right) ds =$$

$$= s + \ln|s| + C_1 = t - 1 + \ln|t-1| + C_1 = t + \ln|t-1| + C$$

$$f(x) = \int_x^{x-1} \frac{t}{t-1} dt = (t + \ln|t-1|) \Big|_x^{x-1} =$$

$$= (x - 1 + \ln|x-2|) - (x + \ln|x-1|) = \ln\left|\frac{x-2}{x-1}\right| - 1$$

□

Primjer 78. Odredi $f(x) = \int_x^{2x} \ln t \, dt$.

Rješenje.

$$\int \ln t \, dt \left| \begin{matrix} u = \ln t & dv = dt \\ du = \frac{1}{t} dt & v = t \end{matrix} \right| = t \ln t - \int dt = t \ln t - t = t(\ln t - 1)$$

$$f(x) = \int_x^{2x} \ln t \, dt = t(\ln t - 1) \Big|_x^{2x} = 2x(\ln 2x - 1) - x(\ln x - 1) =$$

$$= x(2\ln 2x - 2 - \ln x + 1) = x\left(\ln 4x^2 - \ln x - \ln e\right) = x \ln \frac{4x}{e}$$

□

3.3. Teorem o srednjoj vrijednosti

Primjer 76 govori da svaka neprekinuta funkcija $f(x)$ ima antiderivaciju

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt ,$$

koju na žalost ne možemo uvijek izraziti kao elementarnu funkciju. Ako je funkcija $f(x)$ neprekinuta na zatvorenom intervalu $[a, b]$, tada se može dokazati da je funkcija $F(x)$ također neprekinuta na $[a, b]$ i da je $F'(x) = f(x)$ za svaki x iz $\langle a, b \rangle$.

Teorem o srednjoj vrijednosti integralnog računa. Neka je funkcija $f(x)$ neprekinuta na zatvorenom intervalu $[a, b]$. Tada postoji bar jedna međuvrijednost c iz $\langle a, b \rangle$ za koju je

$$\int_a^b f(x) dx = f(c)\,(b - a).$$

Dokaz. Funkcija

$$F(x) = \int_a^x f(t)\, dt$$

zadovoljava uvjete Lagrangeovog teorema o srednjoj vrijednosti diferencijalnog računa: $F(x)$ je neprekinuta na $[a,b]$ i derivabilna na $\langle a,b\rangle$. Zato za funkciju $F(x)$ postoji bar jedna međuvrijednost c iz $\langle a,b\rangle$ za koju je

$$F'(c)=\frac{F(b)-F(a)}{b-a}\ .$$

Budući da je $F(x)$ antiderivacija od $f(x)$, slijedi:

$$\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a)=\frac{F(b)-F(a)}{b-a}\,(b-a)=$$

$$=F'(c)(b-a)=f(c)(b-a)\ .$$

□

Geometrijski smisao teorema leži u činjenici da se postojanjem međuvrijednosti c površina krivuljnog trapeza pretvara u površinu pravokutnika čije su stranice $b-a$ i $f(c)$.

Primjer 79. Pronađi srednju vrijednost za $\int_0^3 x^2dx$.

Rješenje.

$$\int_0^3 x^2dx=\frac{1}{3}x^3\Big|_0^3=9$$

$$9=f(c)(b-a)=3c^2$$

$$c=\pm\sqrt{3}$$

Jedina srednja vrijednost zadanog određenog integrala je $c=\sqrt{3}$ jer samo ona pripada intervalu $\langle 0,3\rangle$.

□

4. Nepravi integrali

Za $\int_a^b f(x)\,dx$ se kaže da je **nepravi integral** ako vrijedi bar jedan od slučajeva:

- ne postoji $f(a)$
- ne postoji $f(b)$
- ne postoji $f(c)$ za neki $c \in < a,b >$
- $a = -\infty$
- $b = +\infty$

Za neprave integrale čija se vrijednost može izračunati pomoću limesa se kaže da konvergiraju, u suprotnom se kaže da divergiraju.

Primjer 80. Izračunaj vrijednost nepravog integrala $\int\limits_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$.

Rješenje. Izražavanje integrala graničnom vrijednošću:

$$\int\limits_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \lim_{a\to 0+} = \int\limits_a^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx$$

Računanje određenog integrala:

$$\int\limits_a^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx = 2\sqrt{x}\int\limits_a^1 \;=\; 2\,(\,1 - \sqrt{a}\,)$$

Računanje granične vrijednosti:

$$\lim_{a\to 0+} 2\,(\,1 - \sqrt{a}\,) = 2$$

Zapisivanje završnog rješenja:

$$\int\limits_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = 2$$

□

Primjer 81. Izračunaj vrijednost nepravog integrala $\int\limits_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x}}dx$.

Rješenje. Izražavanje integrala graničnom vrijednošću:

$$\int\limits_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x}}dx = \lim_{a\to1-} \int\limits_0^b \frac{1}{\sqrt{1-x}}dx$$

Računanje određenog integrala:

$$\int\limits_0^b \frac{1}{\sqrt{1-x}}dx = -2\sqrt{1-x}\,\Big|_0^b = 2\,(\,1 - \sqrt{1-b}\,)$$

Računanje granične vrijednosti:

$$\lim_{b\to1-} 2\,(\,1 - \sqrt{1-b}\,) = 2$$

Zapisivanje završnog rješenja:

$$\int\limits_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x}}dx = 2$$

□

Primjer 82. Izračunaj vrijednost nepravog integrala $\int\limits_{-1}^8 \frac{1}{\sqrt[3]{x}}dx$.

Rješenje. Izražavanje integrala graničnom vrijednošću:

$$\int\limits_{-1}^8 \frac{1}{\sqrt[3]{x}}dx = \int\limits_{-1}^0 \frac{1}{\sqrt[3]{x}}dx + \int\limits_0^8 \frac{1}{\sqrt[3]{x}}dx =$$

$$= \lim_{b\to0-} \int\limits_{-1}^b \frac{1}{\sqrt[3]{x}}dx + \lim_{a\to0+} \int\limits_a^8 \frac{1}{\sqrt[3]{x}}dx$$

Računanje određenih integrala:

$$\int_{-1}^{b} \frac{1}{\sqrt[3]{x}} dx = \frac{3}{2} \sqrt[3]{x^2} \Big|_{-1}^{b} = \frac{3}{2} (\sqrt[3]{b^2} - 1)$$

$$\int_{a}^{8} \frac{1}{\sqrt[3]{x}} dx = \frac{3}{2} \sqrt[3]{x^2} \Big|_{a}^{8} = \frac{3}{2} (4 - \sqrt[3]{a^2})$$

Računanje graničnih vrijednosti:

$$\lim_{b\to 0-} \frac{3}{2} (\sqrt[3]{b^2} - 1) = -\frac{3}{2}$$

$$\lim_{a\to 0+} \frac{3}{2} (4 - \sqrt[3]{a^2}) = 6$$

Zapisivanje završnog rješenja:

$$\int_{-1}^{8} \frac{1}{\sqrt[3]{x}} dx = -\frac{3}{2} + 6 = \frac{9}{2}$$

□

Primjer 83. Izračunaj vrijednost nepravog integrala $\int_{-\infty}^{0} e^x dx$.

Rješenje. Izražavanje integrala graničnom vrijednošću:

$$\int_{-\infty}^{0} e^x dx = \lim_{a\to -\infty} \int_{a}^{0} e^x dx$$

Računanje određenog integrala:

$$\int_{a}^{0} e^x dx = e^x \Big|_{a}^{0} = e^0 - e^a = 1 - e^a$$

Računanje granične vrijednosti:

$$\lim_{b\to -\infty} (1 - e^a) = 1 - 0 = 1$$

Zapisivanje završnog rješenja:

$$\int_{-\infty}^{0} e^x dx = 1$$

□

Primjer 84. Izračunaj vrijednost nepravog integrala $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^3} dx$.

Rješenje. Izražavanje integrala graničnom vrijednošću:

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^3} dx = \lim_{a \to +\infty} \int_1^{b} \frac{1}{x^3} dx$$

Računanje određenog integrala:

$$\int_1^{b} \frac{1}{x^3} dx = -\frac{1}{2x^2}\Big|_1^{b} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{b^2}\right)$$

Računanje granične vrijednosti:

$$\lim_{b \to +\infty} \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{b^2}\right) = \frac{1}{2}(1-0) = \frac{1}{2}$$

Zapisivanje završnog rješenja:

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^3} dx = \frac{1}{2}$$

□

Primjer 85. Izračunaj vrijednost nepravog integrala $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^2+1} dx$.

Rješenje. Izražavanje integrala graničnom vrijednošću:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^2+1}dx = \int_{-\infty}^{c} \frac{1}{x^2+1}dx + \int_{c}^{+\infty} \frac{1}{x^2+1}dx =$$

$$= \lim_{a\to-\infty} \int_{a}^{c} \frac{1}{x^2+1}dx + \lim_{b\to+\infty} \int_{c}^{b} \frac{1}{x^2+1}dx$$

Računanje određenih integrala:

$$\int_{a}^{c} \frac{1}{x^2+1}dx = \text{arc tanx} \int_{a}^{c} = \text{arc tan c - arc tan a}$$

$$\int_{c}^{b} \frac{1}{x^2+1}dx = \text{arc tanx} \int_{c}^{b} = \text{arc tan b - arc tanc}$$

Računanje granične vrijednosti:

$$\lim_{a\to-\infty} (\text{ arc tan c - arc tan a }) = \text{arc tan c} + \frac{\pi}{2}$$

$$\lim_{a\to+\infty} (\text{ arc tan b - arc tanc }) = \frac{\pi}{2} - \text{arc tan c}$$

Zapisivanje završnog rješenja:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^2+1}dx = \text{arc tan c} + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} - \text{arc tan c} = \pi$$

□

Primjer 86. Ispitaj konvergenciju nepravih integrala:

(1) $\int_{0}^{1} \frac{1}{x} \text{dx}$ (2) $\int_{\frac{1}{e}}^{1} \frac{1}{x\ln x}dx$ (3) $\int_{0}^{3} \frac{2}{x^2-1}dx$

Rješenje.

$$(1)\quad \int_0^1 \frac{1}{x}\,\mathrm{dx} = \lim_{a\to 0+} \int_a^1 \frac{1}{x}\,\mathrm{dx} = \lim_{a\to 0+}\left(\ln|x| \Big|_a^1 \right)$$

$$= \lim_{a\to 0+} (\,-\ln a) = +\infty$$

Integral (1) ne konvergira (divergira u $+\infty$).

$$(2)\quad \int_{\frac{1}{e}}^{1} \frac{1}{x\ln x}dx = \lim_{b\to 1-} \int_{\frac{1}{e}}^{b} \frac{1}{x\ln x}dx = \lim_{b\to 1-}\left(\ln|\ln x| \Big|_{\frac{1}{e}}^{b} \right)$$

$$= \lim_{b\to 1-} (\,\ln \ln b\,) = -\infty$$

Integral (2) ne konvergira (divergira u $-\infty$).

$$(3)\quad \int_0^3 \frac{2}{x^2-1}dx = \int_0^1 \frac{2}{x^2-1}dx + \int_1^3 \frac{2}{x^2-1}dx$$

Račun za prvi integral-pribrojnik:

$$\int_0^1 \frac{2}{x^2-1}dx = \lim_{b\to 1-} \int_0^b \frac{2}{x^2-1}dx = \lim_{b\to 1-}\left(\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| \Big|_0^b \right) =$$

$$= \lim_{b\to 1-}\left(\ln\frac{1-b}{1+b} - \ln\frac{1}{2} \right) = -\infty$$

Prvi integral-pribrojnik ne konvergira (divergira u $-\infty$). Neovisno o računu za drugi integral-pribrojnik može se reći da integral (3) ne konvergira (divergira).

□

Primjer 87. Ispitaj konvergenciju nepravih integrala:

$$(1)\ \int_{-\infty}^{\pi} \cos x\,dx \qquad (2)\ \int_4^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}}dx \qquad (3)\ \int_{-\infty}^{+\infty} e^x dx$$

Rješenje.

$$(1)\quad \int_{-\infty}^{\pi} \cos x\mathrm{dx} = \lim_{a\to-\infty} \int_{a}^{\pi} \cos x\mathrm{dx} = \lim_{a\to-\infty} \left(\sin x \Big|_{a}^{\pi} \right) =$$
$$= \lim_{a\to-\infty} (\text{-sin a})$$

Granična vrijednost ne postoji pa integral (1) ne konvergira (divergira).

$$(2)\quad \int_{4}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}}dx = \lim_{b\to+\infty} \int_{4}^{b} \frac{1}{\sqrt{x}}dx = \lim_{b\to+\infty} \left(2\sqrt{x} \Big|_{4}^{b} \right) =$$
$$= \lim_{b\to+\infty} (2\sqrt{b} - 4) = +\infty$$

Granična vrijednost ne postoji kao broj pa integral (2) ne konvergira (divergira u $+\infty$).

$$(3)\quad \int_{-\infty}^{+\infty} e^x dx = \int_{-\infty}^{c} e^x dx + \int_{c}^{+\infty} e^x dx$$

Račun za prvi integral-pribrojnik:

$$\int_{-\infty}^{c} e^x dx = \lim_{a\to-\infty} \int_{a}^{c} e^x dx = \lim_{a\to-\infty} \left(e^x \Big|_{a}^{c} \right) = \lim_{a\to-\infty} \left(e^c - e^a \right) = e^c$$

Račun za drugi integral-pribrojnik:

$$\int_{c}^{+\infty} e^x dx = \lim_{b\to+\infty} \int_{c}^{b} e^x dx = \lim_{b\to+\infty} \left(e^x \Big|_{c}^{b} \right) = \lim_{b\to+\infty} \left(e^b - e^c \right) = +\infty$$

Prvi integral-pribrojnik konvergira dok drugi integral-pribrojnik ne konvergira (divergira u $+\infty$). Zato integral (3) ne konvergira (divergira u $+\infty$).

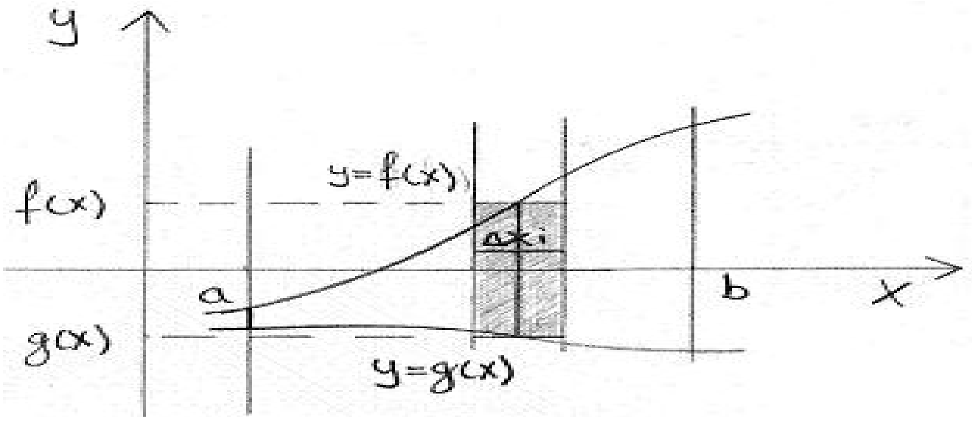
□

5. Primjene određenog integrala

U ovoj lekciji ćemo obraditi četiri osnovne geometrijske primjene određenog integrala. Sve potrebne formule ćemo izvesti pomoću integralne metode.

5.1. Površina ravninskog lika

Izvedimo formulu za računanje površine krivuljnog trapeza omeđenog grafovima funkcija y=f(x) i y=g(x), te pravcima x=a i x=b, uz pretpostavku da je f(x) $\geq$ g(x) za a $\leq$ x $\leq$ b



Površina malog pravokutnika:

$$\Delta P_i = \left[f\left(\overline{x_i}\right) - g\left(\overline{x_i}\right) \right] \Delta xi$$

Zbroj površina svih pravokutnika:

$$P_n = \sum_{i=1}^{n} \Delta P_i = \sum_{i=1}^{n} \left[f\left(\overline{x_i}\right) - g\left(\overline{x_i}\right) \right] \Delta x_i$$

Granični prijelaz ($n \to \infty$):

$$P = \lim P_n = \int_a^b \left[f(x) - g(x) \right] dx$$

Iskoristimo izvedenu formulu uz odgovarajuće slike u koordinatnom sustavu za dva međusobno inverzna slučaja: prvi slučaj, kada su jednadžbe krivulja $y = f(x)$ i $y = g(x)$, te drugi obrnuti slučaj, kada su jednadžbe krivulja $x = f(y)$ i $x = g(y)$.

$f(x) \geq g(x)$ za $x \in [a,b]$ $\qquad\qquad$ $f(y) \geq g(y)$ za $y \in [c,d]$

$$P = \int_a^b \left[f(x) - g(x) \right] dx \qquad\qquad P = \int_c^d \left[f(y) - g(y) \right] dy$$

površina krivuljnog trapeza

Sada ćemo u nekoliko primjera iskoristiti izvedene formule. Površinu ravninskog lika je najbolje računati kroz tri koraka:

- skiciranje zadanog lika
- izražavanje površine lika određenim integralima
- računanje određenih integrala

U jednostavnijim primjerima nije nužno posebno isticati svaki korak, a vrlo često se drugi i treći korak stapaju u jedan.

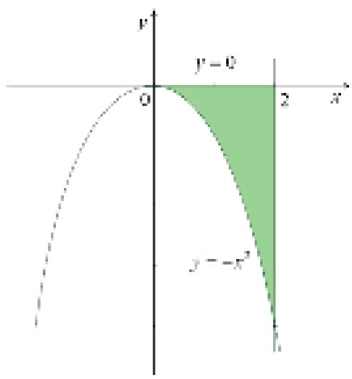
Primjer 88. Izračunaj površinu lika omeđenog krivuljama $x = 2$, $y = 0$ i $y = -x^2$.

Rješenje.

$$P = \int_0^2 \left[0 - \left(-x^2 \right) \right] dx =$$

$$= \int_0^2 x^2 dx = \frac{1}{3} x^3 \Big|_0^2 = \frac{8}{3}$$

Dakle, površina lika iznosi 8/3 kvadratnih jedinica.



□

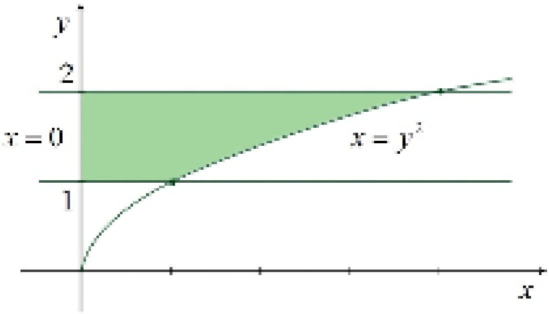
Primjer 89. Izračunaj površinu lika omeđenog krivuljama $x=0$, $y=1$, $y=2$ i $y=\sqrt{x}$.

Rješenje.

$$y=\sqrt{x} \quad \Leftrightarrow \quad y^2=x \text{ za } y\geq 0$$

$$P=\int_1^2\left(y^2-0\right)dy=\int_1^2 y^2dy=$$

$$=\frac{1}{3}y^3\Big|_1^2=\frac{7}{3}$$

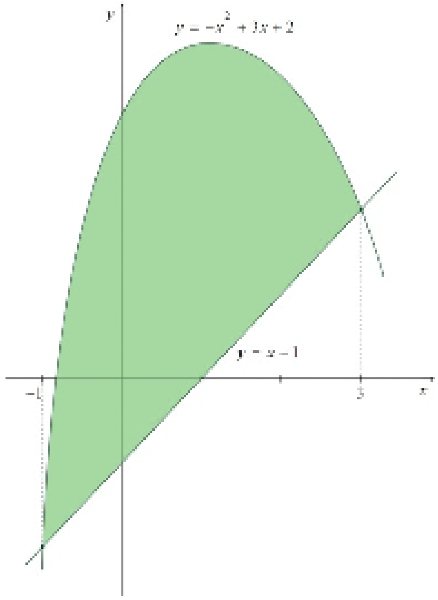


□

Primjer 90. Izračunaj površinu lika omeđenog parabolom $y=-x^2+3x+2$ i pravcem $y=x-1$.

Rješenje. Skica lika uz predhodno računanje koordinata sjecišta parabole i pravca:

$$y=y$$
$$-x^2+3x+2=x-1$$
$$-x^2+2x+3=0$$
$$x_1=-1 \;,\; x_2=3$$
$$y_1=-2 \;,\; y_2=2$$



Izražavanje i računanje površine lika određenim integralom:

$$P=\int_{-1}^{3}\left[\left(-x^2+3x+2\right)-\left(x-1\right)\right]dx=$$

$$=\int_{-1}^{3}\left(-x^2+2x+3\right)dx=$$

$$=\left(-\frac{1}{3}x^3+x^2+3x\right)\Big|_{-1}^{3}=\frac{32}{3}$$

□

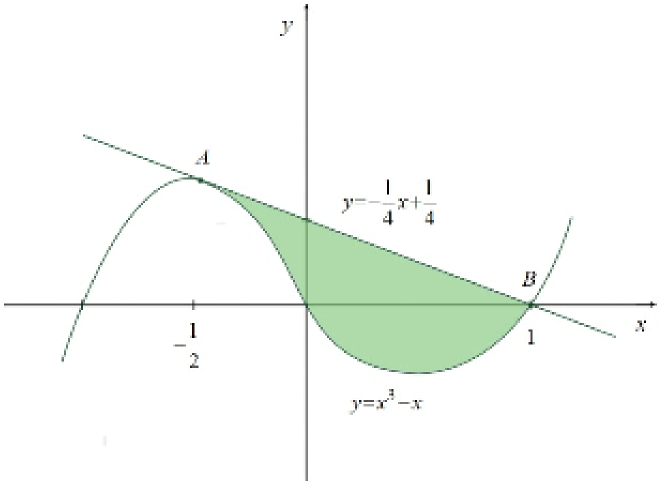
Primjer 91. Izračunaj površinu lika omeđenog kubnim polinomom $y=x^3-x$ i njegovom tangentom u točki $A\left(-\frac{1}{2},\frac{3}{8}\right)$.

Rješenje. Jednadžba tangente:

$$x_0 = -\frac{1}{2} \;,\; y_0 = \frac{3}{8} \;,\; y' = 3x^2 - 1 \;,\; y_0' = -\frac{1}{4} \;:\; y = -\frac{1}{4}x + \frac{1}{4}$$

Zajedničke točke polinoma i tangente (dirališe A i sjecište B) te skica lika:

$$y = y$$
$$x^3 - x = -\frac{1}{4}x + \frac{1}{4}$$
$$4x^3 - 4x + x - 1 = 0$$
$$4x\left(x^2 - 1\right) + \left(x - 1\right) = 0$$
$$\left(2x + 1\right)^2 \left(x - 1\right) = 0$$
$$x_A = -\frac{1}{2} \quad , \quad x_B = 1$$
$$y_A = \frac{3}{8} \quad , \quad y_B = 0$$



Površina lika:

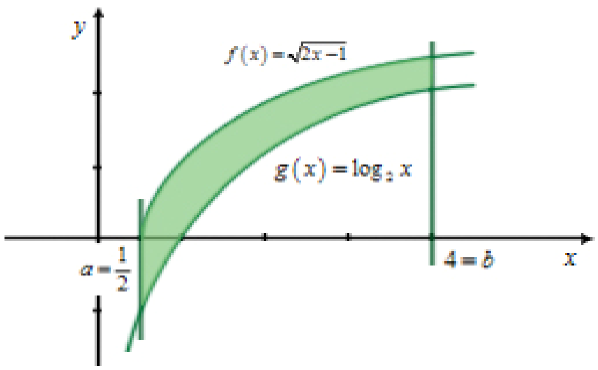
$$P = \int_{-\frac{1}{2}}^{1} \left[\left(-\frac{1}{4}x + \frac{1}{4}\right) - \left(x^3 - x\right)\right] dx = \int_{-\frac{1}{2}}^{1} \left(\frac{1}{4} + \frac{3}{4}x - x^3\right) dx = \frac{27}{64}$$

□

Primjer 92. U tri navedena koraka odredi površinu lika omeđenog krivuljama $x = \frac{1}{2}$, $x = 4$, $y = \sqrt{2x-1}$ i $y = \log_2 x$.

Rješenje. Skiciranje lika:

tablica krajnjih vrijednosti		
x	$\frac{1}{2}$	4
$f(x)$	0	$\sqrt{7}$
$g(x)$	-1	2



Izražavanje površine lika određenim integralima:

$$P=\int_{\frac{1}{2}}^{4}\left(\sqrt{2x-1}-\log_2 x\right)dx=\int_{\frac{1}{2}}^{4}\sqrt{2x-1}dx-\int_{\frac{1}{2}}^{4}\log_2 xdx$$

Računanje određenih integrala i završno rješenje:

$$\int_{\frac{1}{2}}^{4}\sqrt{2x-1}dx\ \left[\!\left[\begin{matrix}2x-1=t & x=4\Rightarrow t=7\\ 2dx=dt & x=\frac{1}{2}\Rightarrow t=0\end{matrix}\right]\!\right]=\frac{1}{2}\int_0^7\sqrt{t}dt=\frac{1}{3}\sqrt{t^3}\Big|_0^7=\frac{7\sqrt{7}}{3}$$

$$\int\log_2 xdx\ \left[\!\left[\begin{matrix}u=\log_2 x & , & dv=dx\\ du=\frac{1}{x\ln 2}dx & , & v=x\end{matrix}\right]\!\right]=x\log_2 x-\frac{1}{\ln 2}\int dx=x\log_2 x-\frac{x}{\ln 2}$$

$$\int_{\frac{1}{2}}^{4}\log_2 xdx=\left(x\log_2 x-\frac{x}{\ln 2}\right)\Big|_{\frac{1}{2}}^{4}=\left(8-\frac{4}{\ln 2}\right)-\left(-\frac{1}{2}-\frac{1}{2\ln 2}\right)=\frac{17}{2}-\frac{7}{2\ln 2}$$

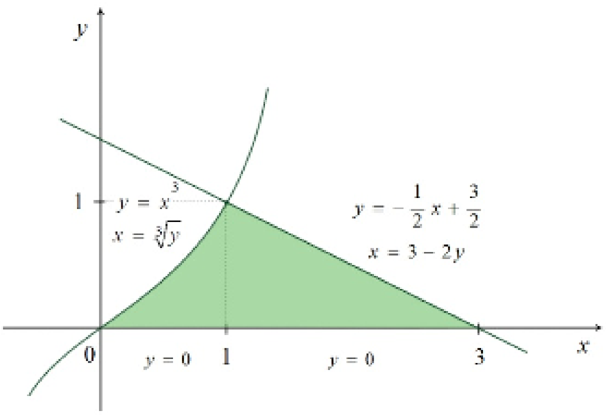
$$P=\frac{7\sqrt{7}}{3}+\frac{7}{2\ln 2}-\frac{17}{2}=\frac{1}{6}\left(14\sqrt{7}+21\log_2 e-51\right)\approx 2,72$$

□

Primjer 93. Izračunaj površinu lika omeđenog krivuljama $y=0$, $y=-\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}$ i $y=x^3$.

Rješenje. Skica lika uz predhodno pronalaženje sjecišta kubne parabole i pravca:

$$\begin{gathered}y=y\\ x^3=-\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}\\ 2x^3+x-3=0\\ 2x^3-2x+3x-3=0\\ 2x\left(x^2-1\right)+3\left(x-1\right)=0\\ \left(2x^2+2x+3\right)\left(x-1\right)=0\\ x=1\\ y=1\end{gathered}$$



Površina lika se može izraziti i izračunati određenim integralima na dva načina:

integriranjem po x

$$P = P_1 + P_2 = \int_0^1 x^3 dx + \int_1^3 \left(-\frac{1}{2}x + \frac{3}{2} \right) dx = \frac{1}{4} + 1 = \frac{5}{4}$$

integriranjem po y

$$P = \int_0^1 \left(3 - 2y - \sqrt[3]{y} \right) dy = \frac{5}{4}$$

□

Primjer 94. Izračunaj površinu lika omeđenog krivuljama $y = 0$, $y = \ln x$ i $y = 2\ln(x-2)$.

Rješenje. Skiciranje lika uz određivanje sjecišta logaritamskih krivulja na području $x > 2$:

$$y = y$$
$$\ln x = \ln(x-2)^2$$
$$x = (x-2)^2$$
$$x^2 - 5x + 4 = 0$$
$$x = 4 \quad , \quad x = 1$$
$$y = \ln 4$$

Izražavanje površine lika *integriranjem po* x:

$$P_1 = \int_1^4 \ln x dx = \left(x\ln x - x \right) \Big|_1^4 = 8\ln 2 - 3$$

$$P_2 = \int_3^4 2\ln(x-2) dx \quad \left[\!\left[\begin{matrix} x - 2 = t \\ dx = dt \end{matrix} \right]\!\right] = 2\int_1^2 \ln t dt = 2\left(t\ln t - t \right) \Big|_1^2 = 4\ln 2 - 2$$

$$P = P_1 - P_2 = 4\ln 2 - 1$$

Izražavanje površine lika *integriranjem po* y:

$$P = \int_0^{\ln 4} \left(e^{\frac{1}{2}y} + 2 - e^y \right) dy = \left(2e^{\frac{1}{2}y} + 2y - e^y \right) \Big|_0^{\ln 4} = 4\ln 2 - 1$$

□

5.2. Obujam rotacijskog tijela

Neka je pravokutni krivuljni trapez omeđen grafom funkcije $y = f\left(x\right)$ te pravcima $y = 0$, $x = a$ i $x = b$. Zamislimo tijelo koje nastaje vrtnjom tog trapeza oko osi x. Izvedimo formulu za obujam tog rotacijskog tijela.

Obujam malog valjka:

$$\Delta V_i = \pi \left[f\left(\overline{x_i}\right)\right]^2 \Delta x_i$$

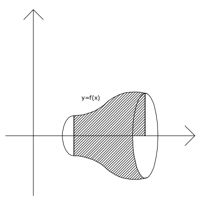
Zbroj obujmova svih n malih valjaka:

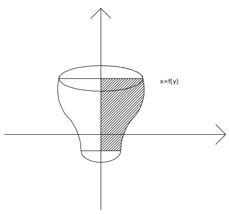
$$V_n = \sum_{i=1}^{n} \Delta V_i = \sum_{i=1}^{n} \left[f\left(\overline{x_i}\right)\right]^2 \Delta x_i$$

Granični prijelaz ($n \to \infty$):

$$V = \lim V_n = \pi \int_a^b \left[f(x)\right]^2 dx$$

Zapišimo izvedenu formulu uz odgovarajuće slike u koordinatnom sustavu za dva međusobno inverzna slučaja: slučaj kada je $y = f\left(x\right)$ i slučaj kada je $x = f\left(y\right)$.





$$V = \pi \int_a^b \left[f(x)\right]^2 dx = \pi \int_a^b y^2 dx \qquad V = \pi \int_c^d \left[f(y)\right]^2 dy = \pi \int_c^d x^2 dy$$

obujam tijela nastalog vrtnjom pravokutnog krivuljnog trapeza

Primjer 95. Izračunaj obujam tijela nastalog vrtnjom, oko osi x, lika omeđenog krivuljama $y=\sqrt{x}$, $y=0$ i $x=3$.

Rješenje:

$$V=\pi\int_0^3\left(\sqrt{x}\right)^2dx=\pi\int_0^3 xdx=$$

$$=\frac{\pi}{2}x^2\Big|_0^3=\frac{9\pi}{2}$$

Dakle, obujam ovog tijela iznosi $9\pi/2$ kubnih jedinica.

□

Primjer 96. Izračunaj obujam tijela nastalog vrtnjom, oko osi x, lika omeđenog parabolom $y=\left(x-1\right)^2$ i pravcem $y=-x+3$.

Rješenje.

Sjecišta parabole i pravca:

$$y=y$$
$$x^2-2x+1=-x+3$$
$$x^2-x-2=0$$
$$x_1=-1\ ,\ x_2=2$$
$$y_1=4\ ,\ y_2=1$$

Računanje obujma $V=V_1-V_2$:

$$V_1=\pi\int_{-1}^{2}\left(-x+3\right)^2dx\ \left\|\begin{matrix}-x+3=t\\ dx=-dt\\ x=2\Rightarrow t=1\\ x=-1\Rightarrow t=4\end{matrix}\right\|=-\pi\int_4^1 t^2dt=-\frac{\pi}{3}t^3\Big|_4^1=21\pi$$

$$V_2=\pi\int_{-1}^{2}\left(x-1\right)^4dx\ \left\|\begin{matrix}x-1=t\\ dx=dt\\ x=2\Rightarrow t=1\\ x=-1\Rightarrow t=-2\end{matrix}\right\|=\pi\int_{-2}^1 t^4dt=\frac{\pi}{5}t^4\Big|_{-2}^1=\frac{33\pi}{5}$$

$$V=21\pi-\frac{33\pi}{5}=\frac{72\pi}{5}$$

□

Primjer 97. Izračunaj obujam tijela nastalog vrtnjom, oko osi y, lika omeđenog krivuljama $y=\sqrt[3]{x}$, $y=\sqrt[7]{7}$ i $x=0$.

Rješenje:

$$y=\sqrt[3]{x} \Leftrightarrow y^3=x$$

$$V=\pi\int_0^{\sqrt[7]{7}}\left(y^3\right)^2 dy=\pi\int_0^{\sqrt[7]{7}} y^6 dy=$$

$$=\frac{\pi}{7}y^7\Big|_0^{\sqrt[7]{7}}=\pi$$

□

Primjer 98. Izračunaj obujam tijela nastalog vrtnjom, oko osi y, lika omeđenog krivuljama $y=\ln x$, $y=0$ i $x=e$.

Rješenje:

$$y=\ln x \quad \Leftrightarrow \quad e^y=x$$

$$V=V_1-V_2:$$

$$V_1=\pi\int_0^1 e^2 dy=\pi e^2\int_0^1 dy=\pi e^2 y\Big|_0^1=\pi e^2$$

$$V_2=\pi\int_0^1\left(e^y\right)^2 dy=\pi\int_0^1 e^{2y}dy=\frac{\pi}{2}e^{2y}\Big|_0^1=$$

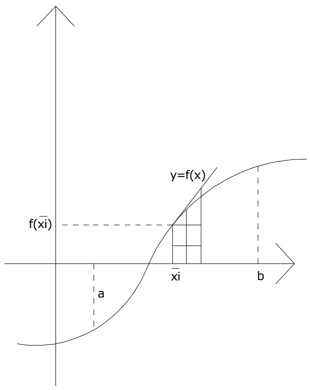
$$=\frac{\pi}{2}\left(e^2-1\right)$$

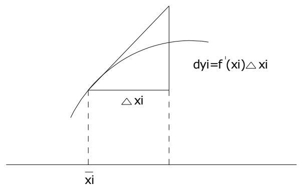
$$V=\pi e^2-\frac{\pi}{2}\left(e^2-1\right)=\frac{\pi}{2}\left(e^2+1\right)$$

□

5.3. Duljina luka ravninske krivulje

Promotrimo luk grafa funkcije y = f(x) za $a \le x \le b$. Odredimo duljinu tog luka integralnom metodom.





Duljina diferencijala malog luka krivulje:

$$\Delta L_i = ds_i = \sqrt{\Delta x_i^{\,2} + \left[f'\left(\overline{x_i}\right) \Delta x_i \right]^2} = \sqrt{1 + \left[f'\left(\overline{x_i}\right) \right]^2}\, \Delta x_i$$

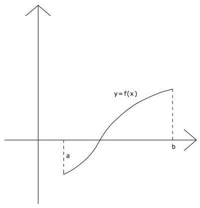
Zbroj diferencijala svih n diferencijala malih lukova:

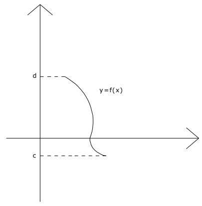
$$L_n = \sum_{i=1}^{n} \Delta L_i = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + \left[f'\left(\overline{x_i}\right) \right]^2}\, \Delta x_i$$

Granični prijelaz (n$\to\infty$):

$$L = \lim L_n = \int_a^b \sqrt{1 + \left[f'(x) \right]^2}\, dx$$

Izvedeni integralni izraz za duljinu L ima smisla uz uvjet da je podintegralni izraz neprekinuta funkcija. Taj će uvjet sigurno biti ispunjen, ako funkcija $f\left(x\right)$ ima neprekinutu derivaciju $f'\left(x\right)$. Zapišimo izvedenu formulu uz odgovarajućeslike u koordinatnom sustavu za oba međusobno inverzna slučaja: slučaj $y = f\left(x\right)$ i slučaj $x = f\left(y\right)$.





$$L=\int_{b}^{a}\sqrt{1+\left[f'(x)\right]^2}\,dx= \qquad\qquad L=\int_{c}^{d}\sqrt{1+\left[f'(y)\right]^2}\,dy=$$

$$=\int_{a}^{b}\sqrt{1+y'^2}\,dx \qquad\qquad =\int_{c}^{d}\sqrt{1+x'^2}\,dy$$

duljina luka grafa funkcije

Primjer 99. Izračunaj duljinu luka krivulje $y=\sqrt{x^3}$ za $0\le x\le\frac{4}{3}$.

Rješenje.

$$y=x^{\frac{3}{2}} \quad , \quad y'=\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}$$

$$L=\int_{0}^{\frac{4}{3}}\sqrt{1+\frac{9}{4}x}\,dx \quad \left\|\begin{matrix}1+\frac{9}{4}x=t\\ dx=\frac{4}{9}dt\end{matrix}\right\| =$$

$$=\frac{4}{9}\int_{1}^{4}\sqrt{t}\,dt=\frac{8}{27}\sqrt{t^3}\,\Big|_{1}^{4}=\frac{56}{27}$$

Dakle, duljina ovog luka iznosi $\frac{56}{27}$ dužnih jedinica.

□

Primjer 100. Izračunaj duljinu luka parabole $y=\frac{1}{2}x^2+x$ koji se nalazi ispod pravca $y=\frac{7}{18}$.

Rješenje. Skica luka uz računanje apscisa sjecišta parabole i pravca:

$$y=y$$
$$\frac{1}{2}x^2+x=\frac{7}{18}$$
$$9x^2+18x-7=0$$
$$x=-\frac{7}{3}\ ,\ x=\frac{1}{3}$$

Duljina luka ($y'=x+1$):

$$L=\int_{-\frac{7}{3}}^{\frac{1}{3}}\sqrt{1+(x+1)^2}\,dx\ \left[\!\left[\begin{matrix}x+1=t\\ dx=dt\end{matrix}\right]\!\right]=\int_{-\frac{4}{3}}^{\frac{4}{3}}\sqrt{t^2+1}dt=2\int_{0}^{\frac{4}{3}}\sqrt{t^2+1}dt=$$

$$\left(t\sqrt{t^2+1}+\ln\left|t+\sqrt{t^2+1}\right|\right)\Big|_0^{\frac{4}{3}}=\frac{20}{9}+\ln 3$$

□

Primjer 101. Izračunaj duljinu luka krivulje $x=\ln\left(y^2-1\right)$ za $2\le y\le 5$.

Rješenje.

$$x=\ln\left(y^2-1\right)\ ,\ x'=\frac{2y}{y^2-1}$$

$$L=\int_2^5\sqrt{1+\frac{4y^2}{\left(y^2-1\right)^2}}dy=\int_2^5\frac{y^2+1}{y^2-1}dy=$$

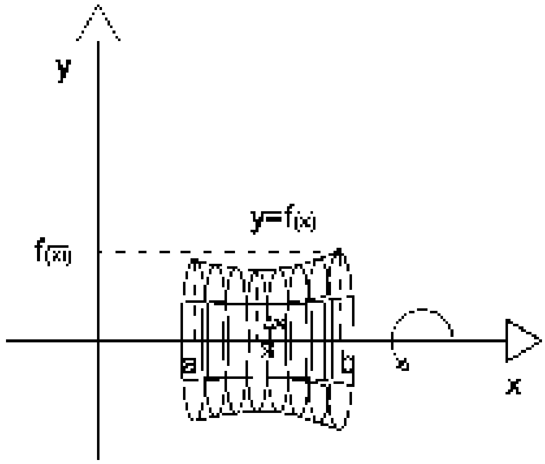
$$=\int_2^5\left(1+\frac{2}{y^2-1}\right)dy=\left(y+\ln\left|\frac{y-1}{y+1}\right|\right)\Big|_2^5=$$

$$=\left(5+\ln\frac{2}{3}\right)-\left(2+\ln\frac{1}{3}\right)=3+\ln 2$$

□

5.4. Površina rotacijske plohe

Pri vrtnji luka grafa funkcije $y = f(x) \geq 0$ za $a \leq x \leq b$, oko osi x, nastaje ploha. Želimo izvesti integralnu formulu za površinu te rotacijske plohe.



Površina plašta malog valjka polumjera $R = f\left(\overline{x_i}\right)$ i visine $H = ds_i$:

$$\Delta P_i = 2\pi RH = 2\pi f\left(\overline{x_i}\right) ds_i = 2\pi f\left(\overline{x_i}\right)\sqrt{1+\left[f'\left(\overline{x_i}\right)\right]^2}\,\Delta x_i$$

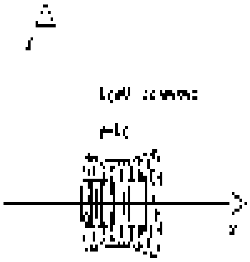
Zbroj površina plaštova svih n malih valjaka:

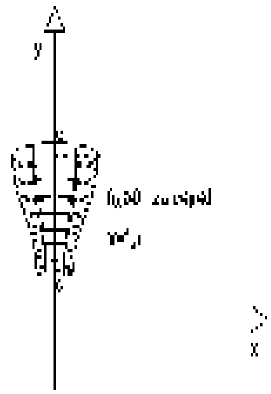
$$P_n = \sum_{i=1}^{n} \Delta P_i = 2\pi \sum_{i=1}^{n} f\left(\overline{x_i}\right)\sqrt{1+\left[f'\left(\overline{x_i}\right)\right]^2}\,\Delta x_i$$

Granični prijelaz ($n \to \infty$):

$$P = \lim P_n = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1+\left[f'(x)\right]^2}\,dx$$

Integralna formula za površinu P ima smisla kada funkcija $f(x)$ ima neprekinutu derivaciju $f'(x)$ jer je tada podinegralna funkcija sigurno neprekinuta. Zapišimo izvedenu formulu uz odgovarajuće slike u koordinatnom sustavu za oba međusobno inverzna slučaja: slučaj $y = f(x)$ i slučaj $x = f(y)$.





$$P = 2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+\left[f'(x)\right]^2}\,dx = \qquad P = 2\pi\int_c^d f(y)\sqrt{1+\left[f'(y)\right]^2}\,dy =$$

$$= 2\pi\int_a^b y\sqrt{1+y'^2}\,dx \qquad = 2\pi\int_c^d x\sqrt{1+x'^2}\,dy$$

površine plohe nastale vrtnjom luka grafa funkcije

Primjer 102. Izračunaj površinu plohe nastale vrtnjom, oko osi x, luka krivulje $y = 2\sqrt{x}$ za $3 \le x \le 8$.

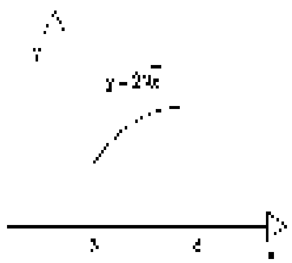
Rješenje.

$$y = 2\sqrt{x} = 2x^{\frac{1}{2}} \quad , \quad y' = x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{x}}$$

$$P = 2\pi\int_3^8 2\sqrt{x}\sqrt{1+\frac{1}{x}}\,dx =$$

$$= 4\pi\int_3^8 \sqrt{1+x}\,dx \quad \left[\!\left[\begin{matrix} 1+x=t \\ dx=dt \end{matrix}\right]\!\right] =$$

$$= 4\pi\int_4^9 \sqrt{t}\,dt = \frac{8\pi}{3}\sqrt{t^3}\,\Big|_4^9 = \frac{152\pi}{3}$$



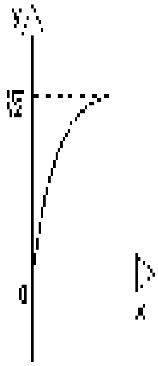
Dakle, površina ove rotacijske plohe iznosi $152\pi/3$ kvadratnih jedinica.

□

Primjer 103. Izračunaj površinu plohe nastale vrtnjom, oko osi y, luka krivulje $x=\frac{2}{3}y^3$ za $0\le y\le \sqrt[4]{2}$.

Rješenje.

$$x=\frac{2}{3}y^3 \quad , \quad x'=2y^2$$



$$P=2\pi\int_0^{\sqrt[4]{2}}\frac{2}{3}y^3\sqrt{1+\left(2y^2\right)^2}\,dy=$$

$$=\frac{4\pi}{3}\int_0^{\sqrt[4]{2}}y^3\sqrt{1+4y^4}\,dy \quad \left[\!\left[\begin{array}{l}1+4y^4=t\\ 16y^3dy=dt\end{array}\right]\!\right]=$$

$$=\frac{\pi}{12}\int_1^9\sqrt{t}\,dt=\frac{\pi}{18}\sqrt{t^3}\Big|_1^9=\frac{13\pi}{9}$$

□

Primjer 104. Odredi površinu sfere, odnosno oplošje kugle polumjera duljine a.

Rješenje. Iz kanonske jednadžbe $x^2+y^2=a^2$ (kružnice sa središtem u ishodištu polumjera a) slijedi eksplicitna jednadžba $y=\sqrt{a^2-x^2}$ (gornjeg luka polukružnice). Vrtnjom polovine tog luka (smještenog u prvom kvadrantu) oko osi x nastaje polusfera. Površina cijele sfere iznosi

$$P=4\pi\int_0^a y\sqrt{1+y'^2}\,dx=$$

$$=4\pi a\int_0^a dx=4\pi ax\Big|_0^a=$$

$$=4\pi a^2$$

jer nakon deriviranja i sređivanja izlazi $y\sqrt{1+y'^2}=a$.

□

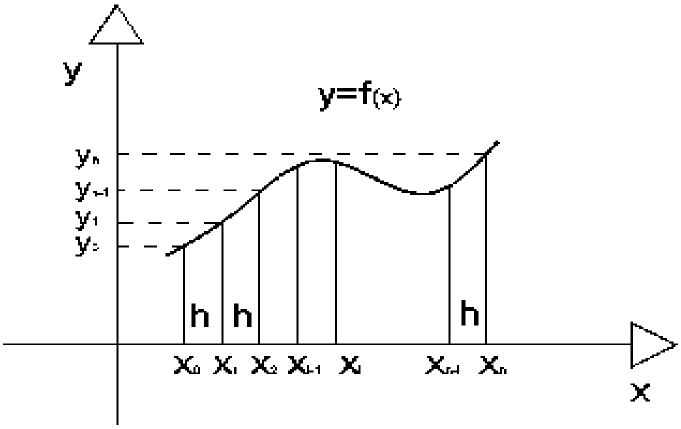
6. Numerička integracija

6.1. Osnovni problem

Osnovni problem numeričke integracije je približno izračunavanje određenog integrala $\int_a^b f(x)dx$. Najlakše je funkciju $f(x)$ zamijeniti polinomom $f_{pol}(x)$ uz uvjet da je $f(x) \approx f_{pol}(x)$. Iz ove jednostavne ideje, koja se provodi već nekoliko stotina godina, nastaje približna formula

$$\int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b f_{pol}(x)dx.$$

6.2. Trapezna formula



Govoreći geometrijski, trapezna formula nastaje zamjenom krivulje pravcima. Analitički, ova formula nastaje zamjenom integranda linearnim ili konstantnim funkcijama, a njen izvod teče kroz tri koraka:

- rastav zatvorenog inervala $[a,b]$ na n podintervala iste duljine $h = \dfrac{b-a}{n}$
- zamjena funkcije $f(x)$ na svakom podintervalu $[x_{i-1}, x_i]$ pravcem koji prolazi rubnim točkama $T_{i-1}(x_{i-1}, y_{i-1})$ i $T_i(x_i, y_i)$
- zbrajanje površina $P_i = \dfrac{h}{2}(y_{i-1} + y_i)$ svih n trapeza $(i = 1,2,...,n)$ daje desnu stranu približne formule

$$\int_a^b f(x)dx \approx h\left(\frac{y_0 + y_n}{2} + y_1 + y_2 + ... + y_{n-1}\right)$$

Za pogrješku ε koja se pojavljuje pri ovom postupku vrijedi ocjena:

$$\varepsilon \le \frac{1}{12} h^2 (b-a) \cdot \max\left\{ \left| f''(x) \right| : a \le x \le b \right\}$$

Primjer 105. Trapeznom formulom izračunaj približnu vrijednost određenog inegrala $\int_3^4 x \ln x dx$ uz korak $h = 0,2$.

Rješenje.

x	$y = x \ln x$
$x_0 = 3,0$	$y_0 = 3,296$
$x_1 = 3,2$	$y_1 = 3,722$
$x_2 = 3,4$	$y_2 = 4,161$
$x_3 = 3,6$	$y_3 = 4,611$
$x_4 = 3,8$	$y_4 = 5,073$
$x_5 = 4,0$	$y_5 = 5,545$

$$\int_3^4 x \ln x dx \approx$$

$$\approx h\left(\frac{y_0 + y_5}{2} + y_1 + y_2 + y_3 + y_4 \right) =$$

$$= 4,398$$

□

Primjer 106. Trapeznom formulom približno odredi $\int_{4,8}^{6} 2^x \sin x dx$ za $h = 0,3$.

Rješenje.

x	$y = 2^x \sin x$
$x_0 = 4,8$	$y_0 = -27,751$
$x_1 = 5,1$	$y_1 = -31,752$
$x_2 = 5,4$	$y_2 = -32,629$
$x_3 = 5,7$	$y_3 = -28,627$
$x_4 = 6,0$	$y_4 = -17,883$

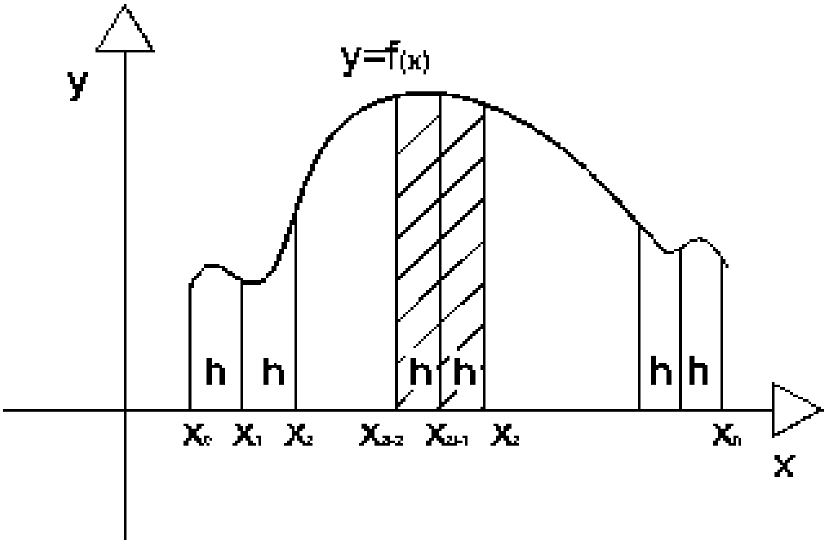
$$\int_{4,8}^{6} 2^x \sin x dx \approx$$

$$\approx h\left(\frac{y_0 + y_4}{2} + y_1 + y_2 + y_3 \right) =$$

$$= -34,748$$

□

6.3. Simpsonova formula



Tumačeći geometrijski, Simpsonova formula nastaje zamjenom krivulje parabolama ili pravcima. Analitički, ova formula nastaje zamjenom integranda kvadratnim ili linearnim ili konstantnim funkcijama, a njen izvod teče kroz tri koraka:

- rastav zatvorenog intervala $\left[a,b\right]$ na $2n$ podintervala iste duljine $h=\dfrac{b-a}{2n}$
- zamjena funcije $f\left(x\right)$ na svakom dvointervalu $\left[x_{2i-2},x_{2i-1}\right]\cup\left[x_{2i-1},x_{2i}\right]$ parabolom koja prolazi točkama $T_{2i-2}\left(x_{2i-2},y_{2i-2}\right),T_{2i-1}\left(x_{2i-1},y_{2i-1}\right)$ i $T_{2i}\left(x_{2i},y_{2i}\right)$ (ili pravcem ako su točke kolinearne)
- zbrajanje površina $P_{2i}=\dfrac{h}{3}\left(y_{2i-2}+4y_{2i-1}+y_{2i}\right)$ svih n parabolnih ili ravnih trapeza ($i=1,2,...,n$) daje desnu stranu približne formule

$$\int\limits_a^b f\left(x\right)dx\approx\frac{h}{3}\left(y_0+y_{2n}+4y_1+4y_3+...+4y_{2n-1}+2y_2+2y_4+...+2y_{2n-2}\right)$$

Za pogrješku ε koja nastaje pri ovom postupku vrijedi ocjena:

$$\varepsilon\le\frac{1}{180}h^4\left(b-a\right)\cdot\max\left\{\left|f^{IV}\left(x\right)\right|:a\le x\le b\right\}$$

Primjer 107. Simpsonovom formulom izračunaj približnu vrijednost određenog integrala $\int_1^2 x^2 \arctan x dx$ uz korak $h = 0,25$.

Rješenje.

x	$y = x^2 \arctan x$
$x_0 = 1,00$	$y_0 = 0,785$
$x_1 = 1,25$	$y_1 = 1,400$
$x_2 = 1,50$	$y_2 = 2,211$
$x_3 = 1,75$	$y_3 = 3,221$
$x_4 = 2,00$	$y_4 = 4,429$

$$\int_1^2 x^2 \arctan x dx \approx$$
$$\approx \frac{h}{3}\left(y_0 + y_4 + 4y_1 + 4y_3 + 2y_2\right) =$$
$$= 2,343$$

□

Primjer 108. Simpsonovom formulom približno izračunaj $\int_{-1}^{0,2} \frac{3\cos x - 2}{x^3 + 2} dx$ za korak $h = 0,2$.

Rješenje.

x	$y = \frac{3\cos x - 2}{x^3 + 2}$
$x_0 = -1,0$	$y_0 = -0,379$
$x_1 = -0,8$	$y_1 = \ 0,061$
$x_2 = -0,6$	$y_2 = \ 0,267$
$x_3 = -0,4$	$y_3 = \ 0,394$
$x_4 = -0,2$	$y_4 = \ 0,472$
$x_5 = \ 0,0$	$y_5 = \ 0,500$
$x_6 = \ 0,2$	$y_6 = \ 0,468$

$$\int_{-1}^{0,2} \frac{3\cos x - 2}{x^3 + 2} dx \approx$$
$$\approx \frac{h}{3}\left(y_0 + y_6 + 4y_1 + 4y_3 + 4y_5 + 2y_2 + 2y_4\right) =$$
$$= 0,461$$

□

Primjer 109. Odredi približne vrijednosti broja π računajući površinu jediničnog kruga po trapeznoj i Simpsonovoj formuli za korak $h = 0,1$.

Rješenje.

x	$y = \sqrt{1-x^2}$
$x_0 = 0,0$	$y_0 = 1,000$
$x_1 = 0,1$	$y_1 = 0,995$
$x_2 = 0,2$	$y_2 = 0,980$
$x_3 = 0,3$	$y_3 = 0,954$
$x_4 = 0,4$	$y_4 = 0,917$
$x_5 = 0,5$	$y_5 = 0,866$
$x_6 = 0,6$	$y_6 = 0,800$
$x_7 = 0,7$	$y_7 = 0,714$
$x_8 = 0,8$	$y_8 = 0,600$
$x_9 = 0,9$	$y_9 = 0,436$
$x_{10} = 1,0$	$y_{10} = 0,000$

Površina jediničnog kruga iznosi

$$\pi = 4\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx$$

pa trapeznom i Simpsonovom formulom treba izračunati približnu vrijednost $\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx$ za korak $h = 0,1$:

$$\pi_{tra} = 4h\left(\frac{y_0 + y_{10}}{2} + y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 + y_6 + y_7 + y_8 + y_9\right) = 3,105$$

$$\pi_{Sim} = \frac{4h}{3}\left(y_0 + y_{10} + 4y_1 + 4y_3 + 4y_5 + 4y_7 + 4y_9 + 2y_2 + 2y_4 + 2y_6 + 2y_8\right) =$$

$$= 3,127$$

□