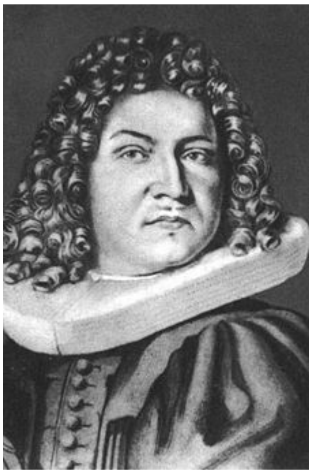
III. DIFERENCIJALNE JEDNADŽBE

Uvod s povijesnim osvrtom

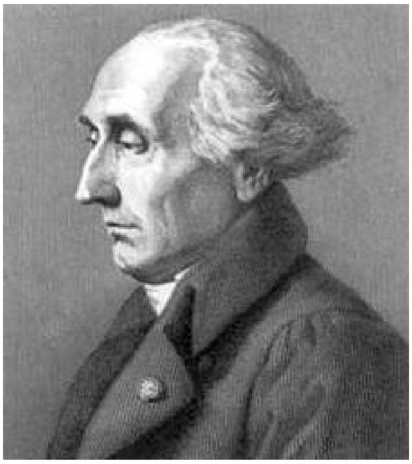
Diferencijalne jednadžbe se pojavljuju kao matematički modeli u rješavanju važnih prirodnih i tehničkih problema. Takvi su problemi provođenje topline i različita titranja.

Rješavanje diferencijalnih jednadžbi je vrlo teško i zauzima pažnju znanstvenika od početka razvoja diferencijalnog računa do danas. Na prijelazu s 19. u 20. stoljeće to je bio pravi izazov za mnoge matematičare.

Diferencijalne jednadžbe prvog reda uspješno je rješavao švicarski matematičar Jacob Bernoulli (1654–1705). Jednu važnu i vrlo općenitu metodu za rješavanje diferencijalnih jednadžbi uveo je francuski matematičar Joseph Lagrange (1736–1813).



Jacob Bernoulli



Joseph Lagrange

Lekcije

1. Opis diferencijalne jednadžbe i vrste rješenja

2. Diferencijalne jednadžbe koje se rješavaju neposrednim integriranjem

3. Diferencijalne jednadžbe prvog reda

4. Diferencijalne jednadžbe drugog reda

1. Opis diferencijalne jednadžbe i vrste rješenja

Ako su veličine x i y povezane jednadžbom u kojoj se pojavljuju njihovi diferencijali dx i dy (raspoređeni tako da se iz diferencijalnog oblika može prijeći u derivacijski), tada takvu jednadžbu zovemo **diferencijalnom jednadžbom** veličina x i y . Evo tri primjera diferencijalnih jednadžbi:

$$(1) \quad y^3 dx + 2x dy = 0$$

$$(2) \quad \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \ln x = \sin\frac{x}{y}$$

$$(3) \quad d^2x \cdot dy - dx \cdot (dy)^2 = (dy)^3$$

Diferencijal (odnosno derivacija) najvišeg reda u nekoj diferencijalnoj jednadžbi određuje ujedno i **red** te **diferencijalne jednadžbe**. Diferencijalne jednadžbe iz (1) i (2) su prvog reda, dok je diferencijalna jednadžba iz (3) drugog reda.

Zapišimo prvu diferencijalnu jednadžbu kao derivacijsku jednadžbu. Nakon dijeljenja s dx i uvrštavanja y' umjesto $\dfrac{dy}{dx}$ dobiva se derivacijski oblik

$$y^3 + 2xy' = 0$$

s nepoznatom funkcijom $y = y(x)$. Ista se diferencijalna jednadžba nakon dijeljenja s dy i uvrštavanja x' umjesto $\dfrac{dx}{dy}$ može zapisati u derivacijskom obliku

$$y^3x' + 2x = 0$$

s nepoznatom funkcijom $x = x(y)$.

Treća diferencijalna jednadžba se može zapisati samo u jednom derivacijskom obliku

$$x'' - x' = 1$$

s nepoznatom funkcijom $x = x(y)$.

Rješenje diferencijalne jednadžbe je svaka funkcijska veza (općenito implicitna) koja dotičnu diferencijalnu jednadžbu prevodi u identitet (neku poznatu jednakost), tj. funkcijska veza iz koje se nakon diferenciranja i uvrštavanja u diferencijalnu jednadžbu može dobiti trivijalanan identitet $0 = 0$.

Primjer 110. Provjeri jesu li implicitne funkcije

(1) $x^2 = y^3$ (2) $x^2 = y^3 + 1$ (3) $x^2 = y^3 + y$

rješenja diferencijalne jednadžbe

$$2xdx - 3y^2dy = 0 .$$

Rješenje.

(1) $$x^2 = y^3 \quad / \quad \frac{d}{dy} \quad \text{tj. diferenciranje po } y$$

$$2xx'dy = 3y^2dy \quad / \text{ zamjena } x' \text{ s } \frac{dx}{dy}$$

$$2xdx = 3y^2dy \quad / \text{ uvrštavanje u diferencijalnu jednadžbu}$$

$$3y^2dy - 3y^2dy = 0 \quad / \text{ oduzimanje}$$

$$0 = 0$$

Nakon diferenciranja i uvrštavanja u diferencijalnu jednadžbu postigli smo identitet što nam govori da je funkcija $x^2 = y^3$ rješenje diferencijalne jednadžbe.

(2) Isti postupak dovodi do zaključka da je i funkcija $x^2 = y^3 + 1$ također rješenje diferencijalne jednadžbe.

(3) $$x^2 = y^3 + y \quad / \quad \frac{d}{dy} \quad \text{tj. diferenciranje po } y$$

$$2xx'dy = 3y^2dy + dy \quad / \text{ zamjena } x' \text{ s } \frac{dx}{dy}$$

$$2xdx = \left(3y^2 + 1\right)dy \quad / \text{ uvrštavanje u diferencijalnu jednadžbu}$$

$$\left(3y^2 + 1\right)dy - 3y^2dy = 0 \quad / \text{ oduzimanje i dijeljenje s } dy$$

$$1 = 0$$

Nakon diferenciranja i uvrštavanja u diferencijalnu jednadžbu ne postiže se identitet, već neistina, a to govori da funkcija $x^2 = y^3 + y$ nije rješenje diferencijalne jednadžbe.

□

Pogledajmo u primjeru što slijedi koje sve vrste rješenja može imati jedna diferencijalna jednadžba.

Primjer 111. Pokaži da su eksplicitne funkcije

(1) $y = Cx + C^2$ (2) $y = 3x + 9$ (3) $y = -\frac{1}{4}x^2$

rješenja diferencijalne jednadžbe

$$y'^2 + xy' - y = 0 .$$

Rješenje.

(1) Uvrštavanjem funkcije $y = Cx + C^2$ i derivacije $y' = C$ u diferencijalnu jednadžbu slijedi:

$$\begin{aligned} C^2 + xC - \left(Cx + C^2\right) = 0 \\ 0 = 0 \end{aligned},$$

dakle identitet, pa je funkcija $y = Cx + C^2$ njezino rješenje za svaku realnu vrijednost C. Obitelj funkcija s parametrom C,

$$y_{gen} = y(x;C) = Cx + C^2,$$

se zove **opće** ili **generalno rješenje**.

(2) Funkciju $y = 3x + 9$ i njezinu derivaciju $y' = 3$ nije potrebno posebno uvrštavati u diferencijalnu jednadžbu zato što se ova funkcija dobiva iz općeg rješenja za $C = 3$. Za svaku pojedinu vrijednost parametra $C = c$ funkcija obitelji

$$y_{par} = y(x;c)$$

se zove **pojedinačno** ili **partikularno rješenje**. Dakle, funkcija

$$y_{par} = y(x;3) = 3x + 9$$

predstavlja jedno takvo pojedinačno rješenje.

(3) Uvrštavanjem funkcije $y = -\frac{1}{4}x^2$ i njezine derivacije $y' = -\frac{1}{2}x$ u diferencijalnu jednadžbu slijedi:

$$\begin{aligned} \left(-\frac{1}{2}x\right)^2 + x\left(-\frac{1}{2}x\right) - \left(-\frac{1}{4}x^2\right) = 0 \\ 0 = 0 \end{aligned},$$

također identitet, pa je i ova funkcija rješenje diferencijalne jednadžbe. Ona se ne može dobiti iz općeg rješenja ni za jednu određenu vrijednost parametra C. Kaže se da je funkcija

$$y_{sin} = y(x) = -\frac{1}{4}x^2$$

zasebno ili **singularno rješenje**.

□

Odavno je uočeno da je brzina promjene mnogih prirodnih zakona razmjerna tim istim zakonima. Kako se u matematici brzina promjene izražava derivacijom , to se uočeno stanje može zapisati jednostavnom diferencijalnom jednadžbom $y' = ky$. Rješenja te jednadžbe su prirodne eksponencijalne funkcije $y = Ce^{kx}$. Iste funkcije određuju rješenja mnogih diferencijalnih jednadžbi nastalih proučavanjem važnih prirodnih zakona. Ove činjenice ukazuju na eksponencijalnu bit tih prirodnih zakona. Spoznaja da se prirodni zakoni mogu izraziti eksponencijalom funkcijom s bazom e daju toj bazi, odnosno Eulerovom broju e, ogromno značenje.

U ovoj se knjizi dalje proučavaju najjednostavnije diferencijalne jednadžbe višeg reda, a to su one koje se rješavaju neposrednim integriranjem . Još se proučavaju samo osnovne diferencijalne jednadžbe prvog reda, i na kraju, jedna važna diferencijalna jednadžba drugog reda.

Knjiga se ne bavi provjeravanjem Cauchyevih predpostavki koje osiguravaju postojanje i jedinstvenost rješenja neke diferencijalne jednadžbe uz zadane uvjete. Ne istražuju se posebno ni singularna rješenja promatranih diferencijalnih jednadžbi.

2. Diferencijalne jednadžbe koje se rješavaju neposrednim integriranjem

Najjednostavnije su diferencijalne jednadžbe koje se mogu riješiti neposrednim integriranjem. Njihov kanonski oblik

$$y^{(n)} = f(x)$$

sadrži: n-tu derivaciju $y^{(n)}$ nepoznate funkcije $y = y(x)$ na lijevoj strani i zadanu funkciju $f(x)$ na desnoj strani. Rješavaju se n-terostrukim integriranjem desne strane.

Primjer 112. Odredi opće rješenje diferencijalne jednadžbe trećeg reda $y''' = \sin x$.

Rješenje.

$$y''' = \sin x \quad / \int \dots dx$$

$$y'' = \int \sin x dx = -\cos x + K_1 \quad / \int \dots dx$$

$$y' = \int (-\cos x + K_1) dx = -\sin x + K_1 x + K_2 \quad / \int \dots dx$$

$$y = \int (-\sin x + K_1 x + K_2) dx = \cos x + \frac{1}{2} K_1 x^2 + K_2 x + K_3$$

Sređeni oblik općeg rješenja s parametrima-konstantama $C_1 = \frac{1}{2} K_1$, $C_2 = K_2$, $C_3 = K_3$:

$$y = y(x; C_1, C_2, C_3) = \cos x + C_1 x^2 + C_2 x + C_3$$

□

U dva sljedeća primjera ćemo pokazati kako se pronalazi jedno točno određeno rješenje diferencijalne jednadžbe. Naime, radi se o pojedinačnom rješenju diferencijalne jednadžbe koje zadovoljava neke uvjete. Broj uvjeta će biti jednak redu diferencijalne jednadžbe. Kao što će u primjerima biti pokazano prvo treba odrediti opće rješenje.

Primjer 113. Pronađi pojedinačno rješenje diferencijalne jednadžbe drugog reda $y'' + 6x = e^x$ koje zadovoljava uvjete: $y = 3$ za $x = 0$ i $y' = 5$ za $x = 0$.

Rješenje. Svođenje jednadžbe na kanonski oblik i određivanje općeg rješenja dvostrukim integriranjem:

$$y'' = e^x - 6x \quad / \int \ldots dx$$
$$y' = \int \left(e^x - 6x\right) dx = e^x - 3x^2 + C_1 \quad / \int \ldots dx$$
$$y = \int \left(e^x - 3x^2 + C_1\right) dx = e^x - x^3 + C_1 x + C_2$$
$$y_{gen} = y\left(x; C_1, C_2\right) = e^x - x^3 + C_1 x + C_2$$

Pronalaženje pojedinačnog rješenja uvrštavanjem uvjeta u opće rješenje te prvu derivaciju općeg rješenja:

$$\begin{array}{lll} y = e^x - x^3 + C_1 x + C_2 & \left| x = 0, y = 3 \right. & 3 = 1 + C_2 \\ y' = e^x - 3x^2 + C_1 & \left| x = 0, y' = 5 \right. & 5 = 1 + C_1 \\ \hline & & C_1 = 4 \ , \ C_2 = 2 \end{array}$$

$$y_{par} = y\left(x; 4, 2\right) = e^x - x^3 + 4x + 2$$

□

Primjer 114. Pronađi pojedinačno rješenje diferencijalne jednadžbe trećeg reda $x^3 y''' - 2 = 0$ koje zadovoljava uvjete: $y\left(1\right) = 3$, $y'\left(1\right) = 2$, $y''\left(\frac{1}{2}\right) = 1$.

Rješenje. Svođenje jednadžbe na kanonski oblik i određivanje općeg rješenja trostrukim integriranjem:

$$y''' = 2x^{-3} \quad / \int \ldots dx$$
$$y'' = \int 2x^{-3} dx = -x^{-2} + K_1 \quad / \int \ldots dx$$
$$y' = \int \left(-x^{-2} + K_1\right) dx = x^{-1} + K_1 x + K_2 \quad / \int \ldots dx$$
$$y = \int \left(x^{-1} + K_1 x + K_2\right) dx = \ln\left|x\right| + \frac{1}{2} K_1 x^2 + K_2 x + K_3$$
$$y_{gen} = y\left(x; C_1, C_2, C_3\right) = \ln\left|x\right| + C_1 x^2 + C_2 x + C_3$$

Pronalaženje pojedinačnog rješenja uvrštavanjem uvjeta u opće rješenje te prvu i drugu derivaciju općeg rješenja:

$$\begin{array}{lll}
y=\ln|x|+C_1x^2+C_2x+C_3 & \big|\, x=1, y=3 & 3 = C_1 + C_2 + C_3 \\
y'=\dfrac{1}{x}+2C_1x+C_2 & \big|\, x=1, y'=2 & 2 = 1 + 2C_1 + C_2 \\
y''=-\dfrac{1}{x^2}+2C_1 & \Big|\, x=\dfrac{1}{2}, y''=1 & 1 = -4 + C_1 \\
\hline
 & & C_1=5\ ,\ C_2=-9\ ,\ C_3=7
\end{array}$$

$$y_{par}=y\left(x;5,-9,7\right)=\ln|x|+5x^2-9x+7$$

□

3. Diferencijalne jednadžbe prvog reda

3.1. Diferencijalne jednadžbe s razdvojenim promjenljivim

Diferencijalna jednadžba s razdvojenim (separiranim) promjenljivim (varijablama) ima jednostavan oblik: na jednoj strani jednadžbe su "iksevi", a na drugoj "ipsiloni". U kanonskom prikazu te jednadžbe

$$f\left(x\right)dx=g\left(y\right)dy$$

funkcije $f\left(x\right)$ i $g\left(y\right)$ su zadane, a nepoznata je funkcijska veza između x i y.

Jednadžba se rješava odvojenim integriranjem lijeve i desne strane:

$$\int f\left(x\right)dx=F\left(x\right)+A\ \ ,\ \ \int g\left(y\right)dy=G\left(y\right)+B\,.$$

Uz $C=B-A$ opće rješenje se može zapisati u implicitnom obliku

$$F\left(x\right)-G\left(x\right)=C\,.$$

Primjer 115. Odredi opće rješenje diferencijalne jednadžbe prvog reda $\left(2x-\sin x\right)dx=\left(4y^3+1\right)dy$.

Rješenje. Integriranje lijeve i desne strane:

$$\int\left(2x-\sin x\right)dx=2\int xdx-\int\sin xdx=x^2+\cos x+A$$

$$\int\left(4y^3+1\right)dy=4\int y^3dy+\int dy=y^4+y+B$$

Zapisivanje općeg rješenja:

$$x^2 + \cos x - y^4 - y = C$$

□

Primjer 116. Riješi diferencijalnu jednadžbu $ydx - xdy = 0$ i grafički prikaži njena rješenja.

Rješenje. Razdvajanje promjenljivih:

$$\frac{1}{x}dx = \frac{1}{y}dy$$

Računanje integrala:

$$\int \frac{1}{x}dx = \ln|x| + A \quad , \quad \int \frac{1}{y}dy = \ln|y| + B$$

Određivanje i sređivanje rješenja:

$$\ln|x| - \ln|y| = K$$

$$\ln\left|\frac{x}{y}\right| = K$$

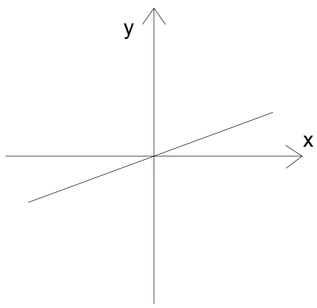
$$\frac{x}{y} = \pm e^K = \frac{1}{C}$$

$$y = Cx \ , \ C \neq 0$$

Ovim su zapisom obuhvaćeni svi pravci koji prolaze ishodištem, izuzev koordinatnih osi $y = 0$ i $x = 0$. Neposrednom provjerom u zadanoj diferencijalnoj jednadžbi možemo se uvjeriti da su konstante $y = y(x) = 0$ $(dy = 0)$ i $x = x(y) = 0$ $(dx = 0)$ također njena rješenja. Dakle, rješenja ove zadane diferencijalne jednadžbe su svi pravci koji prolaze ishodištem,

$$y = Cx \text{ i } x = 0 .$$

Grafički prikaz rješenja:



□

Primjer 117. Skiciraj obitelji krivulja općih rješenja diferencijalnih jednadžbi:

$$(1)\quad dx = 2y\,dy \qquad\qquad (2)\quad \frac{1}{y}dx = 2dy$$

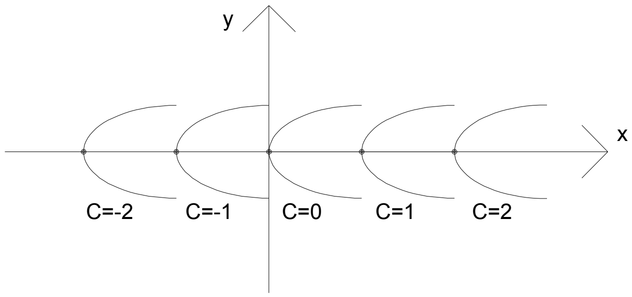
Rješenje.
(1) Računanje integrala:

$$\int dx = x + A \quad , \quad \int 2y\,dy = y^2 + B$$

Određivanje općeg rješenja:

$$x - y^2 = C \ \text{ tj. } \ x = y^2 + C$$

Skiciranje obitelji parabola općeg rješenja $x = x(y;C) = y^2 + C$:



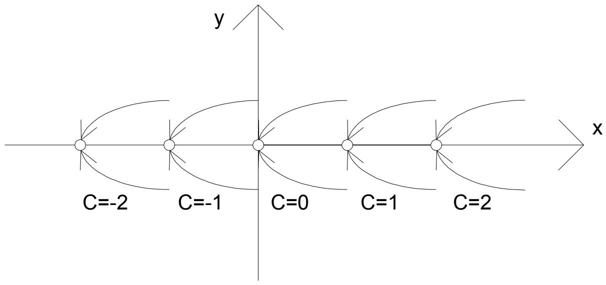
(2) Kanonski oblik:

$$dx = 2y\,dy \quad , \quad y \neq 0$$

Opće rješenje:

$$x = y^2 + C \quad , \quad y \neq 0$$

Skica obitelji parabola općeg rješenja $x = x(y;C) = y^2 + C$, $y \neq 0$:



□

Primjer 118. Odredi opće rješenje diferencijalne jednadžbe $\frac{3x}{y-1}dx + \frac{2}{x}dy = 0$.

Rješenje. Svođenje jednadžbe na kanonski oblik:

$$\frac{3x}{y-1}dx = -\frac{2}{x}dy \quad / \cdot x(y-1)$$

$$3x^2 dx = 2(1-y)\,dy$$

Računanje integrala:

$$\int 3x^2 dx = x^3 + A \quad , \quad \int 2(1-y)dy = 2y - y^2 + B$$

Zapisivanje i sređivanje općeg rješenja:

implicitno $\quad x^3 + y^2 - 2y = C - 1 \ ; \ x \neq 0 \ , \ y \neq 0$

eksplicitno $\quad x = \sqrt[3]{C - (y-1)^2} \ ; \ x \neq 0 \ , \ y \neq 0$

Skiciranje obitelji krivulja općeg rješenja:

□

Primjer 119. Pronađi pojedinačno rješenje diferencijalne jednadžbe $4y^3 y' - 1 = 3x^2$ koje zadovoljava uvjet $y = -2$ za $x = 1$.

Rješenje. Svođenje jednadžbe na kanonski oblik:

$$4y^3 \frac{dy}{dx} = 3x^2 + 1 \quad / \, dx$$

$$4y^3 dy = \left(3x^2 + 1\right) dx$$

Računanje integrala:

$$\int 4y^3 dy = y^4 + B \quad , \quad \int \left(3x^2 + 1\right) dx = x^3 + x + A$$

Zapisivanje općeg rješenja:

implicitno $\quad y^4 - x^3 - x = C$

eksplicitno $\quad y = \pm\sqrt[4]{x^3 + x + C}$

Pronalaženje pojedinačnog rješenja:

$$(-2)^4 - 1^3 - 1 = C \ \text{ tj. } \ C = 14$$

implicitno $\quad y^4 - x^3 - x = 14$

eksplicitno $\quad y = -\sqrt[4]{x^3 + x + 14}$

□

3.2. Homogena diferencijalna jednadžba

Kanonski oblik homogene diferencijalne jednadžbe

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$$

sadrži: na lijevoj strani derivaciju y' nepoznate funkcije $y = y(x)$, a na desnoj strani izraz $f\left(\frac{y}{x}\right)$ određen zadanom funkcijom f jedne promjenljive $z = \frac{y}{x}$.

Homogena jednadžba se rješava zamjenom

$$z = \frac{y}{x}$$

iz koje izlazi

$$y = xz \text{ i } y' = z + xz'.$$

Uvrštavanjem ovih izraza u kanonski oblik dobiva se diferencijalna jednadžba

$$z + xz' = f(z)$$

kojoj se mogu razdvojiti promjenjive x i z:

$$z + x\frac{dz}{dx} = f(z)$$

$$x\frac{dz}{dx} = f(z) - z \quad / \cdot \frac{dx}{x\left[f(z) - z\right]}$$

$$\frac{1}{f(z) - z}dz = \frac{1}{x}dx$$

Opće rješenje ove jednadžbe izlazi odvojenim integriranjem lijeve i desne strane, a opće rješenje homogene jednadžbe proizlazi vraćanjem $\frac{y}{x}$ umjesto z.

Homogena diferencijalna jednadžba može se još riješiti recipročnom zamjenom $z = \frac{x}{y}$.

Primjer 120. Riješi diferencijalnu jednadžbu $xy' = 2y$ uz pomoć zamjene $z = \frac{y}{x}$.

Rješenje. Svođenje jednadžbe na kanonski oblik:

$$y' = \frac{2y}{x} = 2\frac{y}{x}$$

Određivanje međurješenja s x i z pomoću priređene formule:

$$z = \frac{y}{x} \quad , \; y' = 2z \quad , \; f(z) = 2z$$

$$\frac{1}{2z - z} dz = \frac{1}{x} dx$$

$$\frac{1}{z} dz = \frac{1}{x} dx$$

$$\int \frac{1}{z} dz = \ln|z| + B \quad , \quad \int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + A$$

$$\ln|z| = \ln|x| + A - B = \ln|x| + \ln|K| = \ln|Kx|$$

$$z = \pm Kx = Cx$$

Zapisivanje završnog rješenja s x i y:

$$\frac{y}{x} = Cx \;\text{ tj. }\; y = Cx^2$$

□

Primjer 121. Riješi diferencijalnu jednadžbu $x(y' + 3) - y = 0$ služeći se zamjenom $z = \frac{y}{x}$.

Rješenje. Svođenje jednadžbe na kanonski oblik:

$$y' = \frac{y}{x} - 3$$

Određivanje međurješenja s x i z pomoću priređene formule:

$$z = \frac{y}{x} \quad , \; y' = z - 3 \quad , \; f(z) = z - 3$$

$$\frac{1}{z - 3 - z} dz = \frac{1}{x} dx$$

$$dz = -\frac{3}{x} dx$$

$$\int dz = z + B \quad , \quad \int \left(-\frac{3}{x} \right) dx = -3\ln|x| + A$$

$$z = -3\ln|x| + A - B = -3\ln|x| - 3\ln|C| = -3\ln|Cx|$$

Zapisivanje završnog rješenja s x i y:

$$\frac{y}{x} = -3\ln|Cx| \;\text{ tj. }\; y = -3x\ln|Cx|$$

□

Primjer 122. Riješi diferencijalnu jednadžbu $(x+y)y'=y$ pomoću zamjene $z=\frac{x}{y}$.

Rješenje. Svođenje jednadžbe na kanonski oblik:

$$y'=\frac{y}{x+y}=\frac{1}{\frac{x}{y}+1}$$

Određivanje međurješenja s x i z:

$$y=\frac{x}{z} \quad , \quad y'=\frac{z-xz'}{z^2}$$

$$\frac{z-xz'}{z^2}=\frac{1}{z+1}$$

$$z-xz'=\frac{z^2}{z+1}$$

$$xz'=\frac{z}{z+1}$$

$$x\frac{dz}{dx}=\frac{z}{z+1}$$

$$\frac{z+1}{z}dz=\frac{1}{x}dx$$

$$\int\frac{z+1}{z}dz=z+\ln|z|+B \quad , \quad \int\frac{1}{x}dx=\ln|x|+A$$

$$z+\ln|z|=\ln|x|+A-B=\ln|x|+\ln|C|=\ln|Cx|$$

$$z=\ln|Cx|-\ln|z|=\ln\left|C\frac{x}{z}\right|$$

Zapisivanje završnog rješenja s x i y:

$$\frac{x}{y}=\ln|Cy| \quad \text{tj.} \quad x=y\ln|Cy|$$

□

Primjer 123. Pronađi upravo onoo pojedinačno rješenje diferencijalne jednadžbe $x^2y'=xy-y^2$ koje zadovoljava uvjet $y(-1)=1$.

Rješenje. Svođenje jednadžbe na kanonski oblik:

$$y'=\frac{xy-y^2}{x^2}=\frac{y}{x}-\left(\frac{y}{x}\right)^2$$

Određivanje međurješenja s x i z:

$$z = \frac{y}{x} \quad , \ y' = z - z^2 \quad , \ f(z) = z - z^2$$

$$-\frac{1}{z^2}dz = \frac{1}{x}dx$$

$$\frac{1}{z} = \ln|x| + C$$

Određivanje općeg rješenja:

$$\frac{x}{y} = \ln|x| + C \ \text{ tj. } \ y = \frac{x}{\ln|x| + C}$$

$$y_{gen} = y(x;C) = \frac{x}{\ln|x| + C}$$

Pronalaženje pojedinačnog rješenja:

$$1 = \frac{-1}{\ln 1 + C} \quad \text{tj. } C = -1$$

$$y_{par} = y(x;-1) = \frac{x}{\ln|x| - 1}$$

□

Primjedba. Lako se provjerava da je nul-funkcija $y = 0$ $(y' = 0)$ rješenje diferencijalne jednadžbe iz predhodnog primjera. Niti za jednu realnu vrijednost konstante C iz općeg rješenja

$$y(x;C) = \frac{x}{\ln|x| + C}$$

se ne može dobiti $y(x;C) = 0$. Prema tome, nul-funkcija je zasebno rješenje dotične diferencijalne jednadžbe, tj.

$$y_{sin} = y(x) = 0 .$$

3.3. Linearna diferencijalna jednadžba

Središnja diferencijalna jednadžba prvog reda je upravo linearna diferencijalna jednadžba. S jedne strane linearna jednadžba je dosta zastupljena u primjenama, a s druge strane ona ima svoj matematički sklad. Opće rješenje te jednadžbe se izražava eksplicitno, a do njega se stiže uz pomoć najopćenitije metode za rješavanje diferencijalnih jednadžbi, Lagrangeove metode varijacije.

Kanonski oblik linearne diferencijalne jednadžbe prvog reda

$$a(x)y' + b(x)y = f(x)$$

sadrži: nepoznatu funkciju $y = y(x)$, njenu derivaciju y', zadane funkcije koeficijente $a(x) \neq 0$ i $b(x)$, te zadanu funkciju smetnje $f\left(x\right)$. Pojednostavljeni oblik za $f(x) = 0$,

$$a(x)y' + b(x)y = 0$$

nazivamo homogenom linearnom diferencijalnom jednadžbom prvog reda. Jednadžba se naziva linearnom zato sto su u njenom zapisu funkcija y i njena derivacija y' “čisto“ izdvojene, nisu dio kompozicije funkcija. U linearnoj se jednadžbi ne mogu pojaviti npr. $\sin y$ ni $\sqrt{y'}$.

Za proučavanje je pogodniji **normirani** kanonski oblik koji nastaje dijeljenjem jednadžbe s $a(x)$ uz nove oznake $p(x) = \dfrac{b(x)}{a(x)}$ i $q(x) = \dfrac{f(x)}{a(x)}$:

$$y' + p(x)y = q(x).$$

Postupak rješavanja ove normirane diferencijalne jednadžbe se može provesti u dva koraka. U prvom koraku se riješi pridružena homogena jednadžba,

$$y' + p(x)y = 0,$$

razdvajanjem promjenljivih x i y :

$$\frac{1}{y}dy = -p(x)dx$$

$$\int \frac{1}{y}dy = \ln|y| + B \ , \ \int p(x)dx = P(x) + A$$

$$\ln|y| = -P(x) + K$$

$$y = \pm e^{-P(x)+K} = \pm e^{K} e^{-P(x)} = Ce^{-P(x)}$$

$$y_{hom} = y(x;C) = Ce^{-P(x)}$$

Opće rješenje $y_{hom} = y(x;C)$ pridružene homogene jednadžbe je izraženo eksplicitno pomoću parametra-konstante C, broja e i jedne antiderivacije $P\left(x\right)$ funkcije $p\left(x\right)$.

U drugom koraku se na rješenje $y_{hom} = y(x;C)$ primjeni metoda varijacije parametra-konstante C, tj. predpostavi se da je izraz

$$y = C(x)e^{-P(x)}$$

s nepoznatom funkcijom $C\left(x\right)$ rješenje polazne linearne diferencijalne jednadžbe. Deriviranjem tog izraza i uvrštavanjem u polaznu normiranu jednadžbu

$$y' + p(x)y = q(x)$$

dobiva se nova diferencijalna jednadžba

$$C'(x)e^{-P(x)} = q(x) \quad \text{odnosno} \quad C'(x) = e^{P(x)}q(x).$$

Neposrednom integracijom izlazi

$$C(x) = \int e^{P(x)}q(x)dx = Q(x) + D,$$

odakle proizlazi opće rješenje normirane linearne diferencijalne jednadžbe u eksplicitnom obliku

$$y = y(x;D) = \left(Q(x) + D\right)e^{-P(x)}.$$

Primjer 124. Odredi opće rješenje diferencijalne jednadžbe $y' = \left(1 - y\right)\sin x$ služeći se gotovim formulama.

Rješenje. Svođenje jednadžbe na normirani kanonski oblik:

$$y' + (\sin x)y = \sin x \ , \ p(x) = q(x) = \sin x$$

Računanje antiderivacije $P(x)$ i neodređenog integrala $C(x)$:

$$\int p(x)dx = \int \sin x dx = -\cos x + A \ , \ P(x) = -\cos x$$

$$C(x) = \int e^{P(x)}q(x)dx = \int e^{-\cos x} \sin x dx \ \left[\!\left[\begin{array}{c} -\cos x = t \\ \sin x dx = dt \end{array} \right]\!\right] =$$

$$= \int e^t dt = e^t + D = e^{-\cos x} + D$$

Zapisivanje općeg rješenja:

$$y = C(x)e^{-P(x)} = \left(e^{-\cos x} + D\right)e^{\cos x} = 1 + De^{\cos x}$$

□

Primjer 125. Riješi diferencijalnu jednadžbu $xy' - y = x^2$ neposredno, bez korištenja gotovih formula.

Rješenje. Svođenje jednadžbe na normirani kanonski oblik:

$$y' - \frac{1}{x}y = x$$

Određivanjem općeg rješenja pridružene homogene jednadžbe:

$$y' - \frac{1}{x}y = 0$$

$$\frac{1}{y}dy = \frac{1}{x}dx$$

$$\ln|y| = \ln|x| + K$$

$$y = \pm e^{\ln|x| + K} = \pm e^K |x| = Cx$$

$$y_{hom} = Cx$$

Određivanje općeg rješenja zadane jednadžbe:

$$y = C(x)x \quad , \quad y' = C'(x)x + C(x)$$

$$C'(x)x + C(x) - \frac{1}{x}C(x)x = x$$

$$C'(x)x = x \quad \text{odnosno} \quad C'(x) = 1$$

$$C(x) = \int 1dx = x + D$$

$$y = (x+D)x = x^2 + Dx$$

□

Primjer 126. Pronađi pojedinačno rješenje diferencijalne jednadžbe $y' - y = e^x + 1$ koje zadovoljava uvjet $y(0) = 0$.

Rješenje. Jednadžba je zadana u normiranom kanonskom obliku:

$$p(x) = -1 \ , \ q(x) = e^x + 1$$

Računanje $P(x)$ i $C(x)$:

$$\int p(x)dx = \int \left(-1\right)dx = -x + A \quad , \quad P(x) = -x$$

$$C(x) = \int e^{P(x)} q\left(x\right)dx = \int e^{-x}(e^x + 1)dx = \int \left(1 + e^{-x}\right)dx =$$

$$= \int dx + \int e^{-x}dx = x - e^{-x} + D$$

Zapisivanje općeg rješenja:

$$y = y_{gen} = C(x)e^{-P(x)} = \left(x - e^{-x} + D\right)e^x = \left(x + D\right)e^x - 1$$

Pronalaženje pojedinačnog rješenja:

$$y = \left(x + D\right)e^x - 1 \quad \Big| x = 0, y = 0 \qquad 0 = D - 1 \ \text{tj.} \ D = 1$$

$$y_{par} = \left(x + 1\right)e^x - 1$$

□

Primjer 127. Pronađi pojedinačno rješenje diferencijalne jednadžbe $y' - y\ln 2 = 0$ koje zadovoljava uvjet $y'\left(2\right) = 4$.

Rješenje. Opće rješenje:

$$y = y_{gen} = y_{hom} = Ce^{x\ln 2} = C\left(e^{\ln 2}\right)^x = C2^x$$

Pojedinačno rješenje:

$$y' = \left(C\ln 2\right)2^x \quad \Big| x = 2, y' = 4 \qquad 4 = (C\ln 2)4 \ \text{tj.} \ C = \frac{1}{\ln 2}$$

$$y_{par} = \frac{2^x}{\ln 2}$$

□

3.4. Bernoullieva diferencijalna jednadžba

Bernoullieva diferencijalna jednadžba je poopćenje normirane linearne diferencijalne jednadžbe. Njen kanonski oblik

$$y' + p(x)y = q(x)y^a ,$$

za razliku od linearne jednadžbe, na desnoj strani sadrži još potenciju y^a nepoznate funkcije $y = y(x)$.

Bernoullieva diferencijalna jednadžba se može rješavati istim postupkom kao linearna. U prvom koraku, rješavanjem pridružene homogene jednadžbe

$$y' + p(x)y = 0 ,$$

stižemo do njenog općeg rješenja

$$y_{hom} = y(x;C) = Ce^{-P(x)} .$$

U drugom se koraku na to rješenje primijeni metoda varijacije parametra-konstante C. Predpostavi se da je

$$y = C(x)e^{-P(x)}$$

rješenje Bernoullieve jednadžbe. Odredi se y', a zatim se y' i y uvrste u Bernoullievu jednadžbu. Nakon sređivanja dobiva se diferencijalna jednadžba s razdvojenim promjenljivim x i nepoznatom funkcijom $C(x)$,

$$\left[C(x)\right]^{-a} dC(x) = e^{(1-a)P(x)}q(x)dx ,$$

a poslije integriranja i njeno rješenje

$$\left[C(x)\right]^{1-a} = (1-a)\int e^{(1-a)P(x)}q(x)dx .$$

Primjer 128. Odredi opće rješenje diferencijalne jednadžbe $y^2y' - y^3 = 3$ uz pomoć priređenih formula.

Rješenje. Svođenje jednadžbe na kanonski oblik:

$$y' - y = 3y^{-2} \ \ , \ \ p(x) = -1 \ \ , \ \ q(x) = 3 \ \ , \ \ a = -2$$

Računanje antiderivacije $P(x)$ i neodređenog integrala $C(x)$:

$$\int p(x)dx = \int(-1)dx = -x + A \ \ , \ \ P(x) = -x$$

$$\left[C(x)\right]^3 = 3\int e^{3(-x)}3dx = 9\int e^{-3x}dx = D - 3e^{-3x}$$

$$C(x) = \sqrt[3]{D - 3e^{-3x}}$$

Zapisivanje općeg rješenja:

$$y = C(x)e^{-P(x)} = \sqrt[3]{D - 3e^{-3x}}\,e^{x} = \sqrt[3]{De^{3x} - 3}$$

□

Primjer 129. Riješi diferencijalnu jednadžbu $y' = 2xy\left(x^2 y + 1\right)$ neposredno, bez korištenja priređenih formula.

Rješenje. Svođenje jednadžbe na kanonski oblik:

$$y' - 2xy = 2x^3 y^2$$

Određivanje općeg rješenja pridružene homogene jednadžbe:

$$y' - 2xy = 0$$

$$\frac{1}{y}dy = 2xdx$$

$$\ln|y| = x^2 + K$$

$$y = \pm e^{x^2 + K} = \pm e^{K} e^{x^2} = Ce^{x^2}$$

$$y_{hom} = Ce^{x^2}$$

Određivanje općeg rješenja zadane jednadžbe:

$$y = C(x)e^{x^2} \quad , \quad y' = C'(x)e^{x^2} + 2xC(x)e^{x^2}$$

$$C'(x)e^{x^2} = 2x^3\left[C(x)\right]^2 e^{2x^2}$$

$$\left[C(x)\right]^{-2} dC(x) = 2x^3 e^{x^2} dx$$

$$-\frac{1}{C(x)} = \left(x^2 - 1\right)e^{x^2} + D$$

$$C(x) = \frac{1}{\left(1 - x^2\right)e^{x^2} - D}$$

$$y = \frac{1}{\left(1 - x^2\right)e^{x^2} - D}e^{x^2} = \frac{e^{x^2}}{\left(1 - x^2\right)e^{x^2} - D}$$

□

Primjer 130. Pronađi pojedinačna rješenja diferencijalne jednadžbe $y' - \frac{y}{x+2} = 2\sqrt{(x+2)y}$ koja zadovoljavaju uvjet $y(-1) = 4$.

Rješenje. Zadanu diferencijalnu jednadžbu ćemo rješavati za $x + 2 > 0$, tj. na području $< -2, +\infty >$.

Kanonski oblik:

$$y' - \frac{1}{x+2}y = 2\sqrt{x+2}\,y^{\frac{1}{2}} \quad , \quad p(x) = -\frac{1}{x+2} \quad , \quad q(x) = 2\sqrt{x+2} \quad , \quad a = \frac{1}{2}$$

Funkcije $P(x)$ i $C(x)$:

$$\int p(x)dx = \int\left(-\frac{1}{x+2}\right)dx = -\ln(x+2) + A \quad , \quad P(x) = -\ln(x+2)$$

$$\left[C(x)\right]^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\int e^{-\frac{1}{2}(\ln(x+2))} 2\sqrt{x+2}dx = \int dx = x + D$$

$$C(x) = (x+D)^2$$

Opće rješenje:

$$y = y_{gen} = C(x)e^{-P(x)} = (x+D)^2(x+2)$$

Pojedinačna rješenja:

$y = (x+D)^2(x+2) \quad |x=-1, y=4 \qquad (D-1)^2 = 4$ tj. $D_1 = -1$, $D_2 = 3$

$$\left(y_{par}\right)_1 = (x-1)^2(x+2)$$

$$\left(y_{par}\right)_2 = (x+3)^2(x+2)$$

Primjedba. Opće rješenje također vrijedi i za $x+2<0$, tj. i na području $<-\infty,-2>$. Zato isto rješenje vrijedi za svaki $x \neq 2$.

□

4. Diferencijalne jednadžbe drugog reda

4.1. Općenito o diferencijalnim jednadžbama višeg reda

Povećanjem reda diferencijalne jednadžbe rastu napori pri njenom rješavanju, slobodno se može reći eksponencijalno. Zato je posebno korisno sniziti red diferencijalne jednadžbe, ako je to moguće.

Kada se u diferencijalnoj jednadžbi višeg reda ne pojavljuje nepoznata funkcija y, a pojavljuje se y', snižavanje reda se postiže zamjenom $z = y'$. Kada se u diferencijalnoj jednadžbi ne pojavljuju ni y niti y', apojavljuje se y'', red se snizi zamjenom $z = y''$. Slično ide dalje.

Primjer 131. Snižavanjem reda riješi diferencijalnu jednadžbu $y''' - y'' = 2$.

Rješenje. Zamjenom $z = y''$ ($z' = y'''$) zadana diferencijalna jednadžba trećeg reda prelazi u diferencijalnu jednadžbu prvog reda

$$z' - z = 2$$

s nepoznatom funkcijom $z = z(x)$. Razdvajanjem njenih promjenljivih z i x slijedi:

$$\frac{1}{z+2}dz = dx$$

$$\ln|z+2| = x + K$$

$$z + 2 = \pm e^{x+K} = \pm e^{K} e^{x} = C_1 e^{x}$$

$$z = C_1 e^{x} - 2$$

Vraćanjem y'' umjesto z i dvostrukim neposrednim integriranjem izlazi traženo rješenje y:

$$y'' = C_1 e^{x} - 2 \quad / \int \ldots dx$$

$$y' = C_1 e^{x} - 2x + C_2 \quad / \int \ldots dx$$

$$y = C_1 e^{x} - x^2 + C_2 x + C_3$$

□

4.2. Linearna diferencijalna jednadžba

Rješavanje diferencijalnih jednadžbi je vrlo složen, a neizvjestan posao. Ako nam je važno rješenje neke diferencijalne jednadžbe, a do njega nikako ne možemo doći, tada umjesto te jednadžbe promatramo nešto jednostavniju jednadžbu. Taj pojednostavljeni slučaj često puta može biti linearna diferencijalna jednadžba (funkcija y i njene derivacije se pojavljuju u linearnom obliku, tj. nisu dio kompozicije funkcija).

Kanonski oblik linearne diferencijalne jednadžbe drugog reda

$$a(x)y'' + b(x)y' + c(x)y = f(x)$$

sadrži: nepoznatu funkciju $y = y(x)$, njenu prvu i drugu derivaciju y' i y'', zadane funkcije-koeficijente $a(x) \not\equiv 0$, $b(x)$ i $c(x)$, te zadanu funkciju smetnje $f(x)$. Pojednostavljeni oblik za $f(x) = 0$,

$$a(x)y'' + b(x)y' + c(x)y = 0,$$

nazivamo homogenom linearnom diferencijalnom jednadžbom drugog reda.

Ima barem desetak linearnih diferencijalnih jednadžbi drugog reda koje zauzimaju važno mjesto u primjenama. Te se linearne jednadžbe drugog reda rješavaju u biti istim postupkom kao linearne jednadžbe prvog reda (u prvom koraku se riješi homogena jednadžba, a u drugom koraku se primijeni metoda varijacije parametara-konstanti), ali uz znatno veći posao.

Primjer 132. Riješi diferencijalnu jednadžbu $xy'' - y' = 2x - x^2$ tako da prvo odrediš opće rješenje njene homogene jednadžbe, a zatim primijeniš metodu varijacije parametara-konstanti.

Rješenje. Primjer ćemo riješiti u dva koraka: u prvom koraku ćemo riješiti pridruženu homogenu jednadžbu, a u drugom koraku cijelu zadanu jednadžbu.

Rješavanje homogene jednadžbe.

$$xy'' - y' = 0 \quad / \; z = y' \;,\; z' = y''$$

$$xz' - z = 0 \quad / \text{ razdvajanje promjenljivih } x \text{ i } z$$

$$\frac{1}{z}dz = \frac{1}{x}dx$$

$$\ln|z| = \ln|Kx|$$

$$z = \pm Kx = 2C_1 x \;\text{ tj. }\; y' = 2C_1 x$$

$$y_{hom} = y = \int 2C_1 x dx = C_1 x^2 + C_2$$

Rješavanje zadane jednadžbe. Predpostavimo da je

$$y = C_1(x)x^2 + C_2(x)$$

rješenje zadane jednadžbe. Treba odrediti funkcije $C_1(x)$ i $C_2(x)$. Iz prve derivacije

$$y' = C_1'(x)x^2 + 2C_1(x)x + C_2'(x)$$

izdvajamo članove koji sadrže $C_1'(x)$ ili $C_2'(x)$ i njihov zbroj izjednačavamo s nulom, tj. postavljamo prvi uvjet

(1) $$C_1'(x)x^2 + C_2'(x) = 0.$$

Zatim se prva i druga derivacija, $y' = 2C_1(x)x$ i $y'' = 2C_1'(x)x + 2C_1(x)$, uvrste u zadanu jednadžbu,

$$x\left[2C_1'(x)x + 2C_1(x)\right] - 2C_1(x)x = 2x - x^2,$$

što nakon aređivanja postaje drugi uvjet

(2) $$2C_1'(x)x^2 = 2x - x^2.$$

Uvjeti određuju sustav diferencijalnih jednadžbi prvog reda s nepoznatim funkcijama $C_1(x)$ i $C_2(x)$:

$$\begin{cases} C_1'(x)x^2 + C_2'(x) = 0 \\ 2C_1'(x)x^2 \qquad\qquad = 2x - x^2 \end{cases}.$$

Iz (2) izlazi

$$C_1'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{2} \;\text{ tj. }\; C_1(x) = \ln|x| - \frac{1}{2}x + E_1,$$

pa iz (1) proizlazi

$$C_2'(x) = -C_1'(x)x^2 = \frac{1}{2}x^2 - x \quad \text{tj.} \quad C_2(x) = \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + E_2 \quad .$$

Određene su funkcije $C_1(x)$ i $C_2(x)$ pa se može zapisati traženo opće rješenje

$$y = C_1(x)x^2 + C_2(x) = \left(\ln|x| - \frac{1}{2}x + E_1 \right)x^2 + \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + E_2 =$$

$$= -\frac{1}{3}x^3 + \left(\ln|x| + D_1 \right)x^2 + D_2 \quad .$$

□

Dva naredna primjera su općenite prirode i pokazuju način na koji se može sastaviti opće rješenje linearne diferencijalne jednadžbe.

Primjer 133. Pokaži da se opće rješenje linearne diferencijalne jednadžbe $a(x)y'' + b(x)y' + c(x)y = f(x)$ može dobiti kao zbroj: općeg rješenja pridružene homogene jednadžbe i jednog pojedinačnog rješenja cijele jednadžbe.

Rješenje. Predpostavimo da je y_{hom} opće rješenje homogene jednadžbe, a y_{par} pojedinačno rješenje cijele jednadžbe. Tada funkcija

$$y = y_{hom} + y_{par}$$

zadovoljava cijelu jednadžbu jer je

$$a(x)y'' + b(x)y' + c(x)y =$$

$$= a(x)\left(y''_{hom} + y''_{par}\right) + b(x)\left(y'_{hom} + y'_{par}\right) + c(x)\left(y_{hom} + y_{par}\right) =$$

$$= \left[a(x)y''_{hom} + b(x)y'_{hom} + c(x)y_{hom} \right] + \left[a(x)y''_{par} + b(x)y'_{par} + c(x)y_{par} \right] =$$

$$= 0 + f(x) = f(x).$$

Ista funkcija preko y_{hom} ovisi o dva parametra-konstante pa je ona opće rješenje linearne diferencijalne jednadžbe, tj.

$$y_{gen} = y_{hom} + y_{par} \, .$$

□

Primjer 134. Pokaži da se opće rješenje linearne diferencijalne jednadžbe $a(x)y'' + b(x)y' + c(x)y = f_1(x) + f_2(x)$ može dobiti kao zbroj: općeg rješenja pridružene homogene jednadžbe, jednog pojedinačnog rješenja jednadžbe s funkcijom smetnje $f_1(x)$ i jednog pojedinačnog rješenja jednadžbe s funkcijom smetnje $f_2(x)$.

Rješenje. Neka su redom y_{hom}, $\left(y_{par}\right)_1$ i $\left(y_{par}\right)_2$ rješenja spomenutih jednadžbi. Tada funkcija

$$y = y_{hom} + \left(y_{par}\right)_1 + \left(y_{par}\right)_2$$

zadovoljava cijelu jednadžbu i preko y_{hom} ovisi o dva parametra-konstante pa je njeno opće rješenje, tj.

$$y_{gen} = y_{hom} + \left(y_{par}\right)_1 + \left(y_{par}\right)_2 .$$

□

Osnovni je cilj ove lekcije proučiti najjednostavniju linearnu diferencijalnu jednadžbu drugog reda, onu s konstantnim koeficijentima:

$$ay'' + by' + cy = f(x).$$

Sljedeća se podlekcija bavi njenim najjednostavnijim slučajem, za $f(x) = 0$, tj. homogenom jednadžbom.

4.3. Homogena linearna diferencijalna jednadžba s konstantnim koeficijentima

Homogena linearna diferencijalna jednadžba prvog reda s konstantnim koeficijentima

$$ay' + by = 0$$

se lako riješi razdvajanjem promjenljivih, nakon čega se dobije njeno opće rješenje

$$y = Ce^{-\frac{b}{a}x} .$$

U tom je rješenju broj $t = -\dfrac{b}{a}$ korijen pridružene karakteristične linearne jednadžbe

$$at + b = 0 .$$

Rješavanje homogene linearne diferencijalne jednadžbe drugog reda s konstantniom koeficijentima

$$ay'' + by' + cy = 0$$

je zamršeno zato što postoje tri oblika općih rješenja. Navedimo tri jednostavne diferencijalne jednadžbe drugog reda kao i njihova opća rješenja:

(1) $y'' = 0 \quad , \; y = C_1 x + C_2$

(2) $y'' + y' = 0 \quad , \; y = C_1 e^{-x} + C_2$

(3) $y'' + y = 0 \quad , \; y = C_1 \sin x + C_2 \cos x$

Malo širim razvojem teorije može se dokazati da opća rješenja homogene diferencijalne jednadžbe ovise o korijenima pridružene karakteristične kvadratne jednadžbe

$$at^2 + bt + c = 0 .$$

Ako su brojevi t_1 i t_2 korijeni karakteristične jednadžbe, onda slijede ova tri oblika općih rješenja:

(1) $$t_1 = t_2$$
$$y = (C_1 x + C_2) e^{t_1 x}$$

(2) $t_1 \neq t_2$ pri čemu su brojevi t_1 i t_2 realni
$$y = C_1 e^{t_1 x} + C_2 e^{t_2 x}$$

(3) $t_{1,2} = \alpha \pm \beta i$ pri čemu je $\beta \neq 0$
$$y = (C_1 \sin \beta x + C_2 \cos \beta x) e^{\alpha x}$$

Primjer 135. Riješi homogene linearne diferencijalne jednadžbe drugog reda s konstantnim koeficijentima:

(1) $y'' - 10y' + 25 = 0$ (2) $4y'' + 3y' - y = 0$ (3) $y'' - 4y' + 29y = 0$

Rješenje. Prvo treba zapisati pridružene karakteristične jednadžbe i izračunati njihove korijene, a zatim odrediti opća rješenja diferencijalnih jednadžbi:

(1) $t^2 - 10t + 25 = 0$	(2) $4t^2 + 3t - 1 = 0$	(3) $t^2 - 4t + 29 = 0$
$t_1 = t_2 = 5$	$t_1 = -1, t_2 = \dfrac{1}{4}$	$t_{1,2} = 2 \pm 5i \ (\alpha = 2, \beta = 5)$
$y = (C_1 x + C_2) e^{5x}$	$y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{\frac{1}{4}x}$	$y = (C_1 \sin 5x + C_2 \cos 5x) e^{2x}$

□

4.4. Linearna diferencijalna jednadžba s konstantnim koeficijentima

Sada ćemo u dva koraka riješiti opći slučaj linearne diferencijalne jednadžbe drugog reda s konstantnim koeficijentima,
$$ay'' + by' + cy = f(x).$$

U prvom koraku se riješi pridružena homhgena jednadžba
$$ay'' + by' + cy = 0$$
i njeno opće rješenje predoči u obliku
$$y_{hom} = y(x; C_1, C_2) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x),$$
s parametrima-konstantama C_1 i C_2 te određenim funkcijama $y_1(x)$ i $y_2(x)$.

U drugom koraku se na rješenje $y_{hom} = y(x; C_1, C_2)$ primijeni metoda varijacije parametara-konstanti C_1 i C_2. Predpostavi se da je izraz

$$y = C_1(x) y_1(x) + C_2(x) y_2(x),$$

s nepoznatim funkcijama $C_1(x)$ i $C_2(x)$, rješenje polazne jednadžbe. Taj se izraz derivira,

$$y' = C_1'(x) y_1(x) + C_1(x) y_1'(x) + C_2'(x) y_2(x) + C_2(x) y_2'(x),$$

a zbroj članova koji sadrže $C_1'(x)$ ili $C_2'(x)$ izjednači s nulom pa se dobije prva jednadžba

$$C_1'(x) y_1(x) + C_2'(x) y_2(x) = 0.$$

Zatim se iz $y' = C_1(x) y_1'(x) + C_2(x) y_2'(x)$ odredi druga derivacija y'' te se y'', y' i y uvrste u polaznu jednadžbu. Nakon sređivanja se pojavi druga jednadžba

$$C_1'(x) y_1'(x) + C_2'(x) y_2'(x) = \frac{1}{a} f(x).$$

Dakle, funkcije $C_1(x)$ i $C_2(x)$ se određuju iz sustava diferencijalnih jednadžbi prvog reda:

$$\begin{cases} C_1'(x) y_1(x) + C_2'(x) y_2(x) = 0 \\ C_1'(x) y_1'(x) + C_2'(x) y_2'(x) = \dfrac{1}{a} f(x) \end{cases}.$$

Ako je $C_1(x) = H_1(x) + D_1$ i $C_2(x) = H_2(x) + D_2$, onda opće rješenje linearne diferencijalne jednadžbe drugog reda s konstantnim koeficijentima poprima konačan oblik

$$y = y(x; D_1, D_2) = (H_1(x) + D_1) y_1(x) + (H_2(x) + D_2) y_2(x).$$

Primjer 136. Odredi opće rješenje diferencijalne jednadžbe $y'' - 3y' + 2y = 2$ služeći se priređenim formulama.

Rješenje. Opće rješenje pridružene homogene jednadžbe:

$$t^2 - 3t + 2 = 0 \text{ tj. } t_1 = 1, \; t_2 = 2$$

$$y_{hom} = C_1 e^x + C_2 e^{2x} \text{ tj. } y_1(x) = e^x, \; y_2(x) = e^{2x}$$

Funkcije $C_1(x)$ i $C_2(x)$:

$$\begin{cases} C_1'(x) e^x + C_2'(x) e^{2x} = 0 \\ C_1'(x) e^x + 2C_2'(x) e^{2x} = 2 \end{cases}$$

$$2\times prvajednadžba - drugajednadžba \text{ tj. } C_1'(x)e^x = -2$$

$$C_1(x) = -2\int e^{-x}dx = 2e^{-x} + D_1$$

$$-prvajednadžba + drugajednadžba \text{ tj. } C_2'(x)e^{2x} = 2$$

$$C_2(x) = 2\int e^{-2x}dx = -e^{-2x} + D_2$$

Opće rješenje zadane jednadžbe:

$$y = C_1(x)y_1(x) + C_2(x)y_2(x) = \left(2e^{-x} + D_1\right)e^x + \left(-e^{-2x} + D_2\right)e^{2x} =$$
$$= D_1e^x + D_2e^{2x} + 1$$

□

Primjer 137. Odredi opće rješenje jednadžbe $y'' - 6y' + 9y = 6xe^{3x}$ uz pomoć priređenih formula.

Rješenje. Opće rješenje pridružene homogene jednadžbe:

$$t^2 - 6t + 9 = 0 \text{ tj. } (t-3)^2 = 0 \text{ tj. } t_1 = t_2 = 3$$

$$y_{hom} = (C_1x + C_2)e^{3x} = C_1xe^{3x} + C_2e^{3x} \text{ tj. } y_1(x) = xe^{3x}, \; y_2(x) = e^{3x}$$

Funkcije $C_1(x)$ i $C_2(x)$:

$$\begin{cases} C_1'(x)xe^{3x} + C_2'(x)e^{3x} = 0 & /:e^{3x} \\ C_1'(x)(3x+1)e^{3x} + 3C_2'(x)e^{3x} = 6xe^{3x} & /:e^{3x} \end{cases}$$

$$\begin{cases} C_1'(x)x + C_2'(x) = 0 \\ C_1'(x)(3x+1) + 3C_2'(x) = 6x \end{cases}$$

$$3\times prvajednadžba - drugajednadžba \text{ tj. } C_1'(x) = 6x$$

$$C_1(x) = 6\int xdx = 3x^2 + D_1$$

$$prvajednadžba \text{ tj. } C_2'(x) = -C_1'(x)x = -6x^2$$

$$C_2(x) = -6\int x^2dx = -2x^3 + D_2$$

Opće rješenje zadane jednadžbe:

$$y = \left[C_1(x)x + C_2(x)\right]e^{3x} = \left[\left(3x^2 + D_1\right)x - 2x^3 + D_2\right]e^{3x} =$$
$$= \left(x^3 + D_1x + D_2\right)e^{3x}$$

□

Primjer 138. Odredi opće rješenje diferencijalne jednadžbe $(y''+y)\cos x=1$ koristeći se priređenim formulama.

Rješenje. Kanonski oblik:

$$y''+y=\frac{1}{\cos x}$$

Opće rješenje pridružene homogene jednadžbe:

$$t^2+1=0 \text{ tj. } t_{1,2}=0\pm i \quad (\alpha=0,\beta=1)$$

$$y_{hom}=C_1\sin x+C_2\cos x \text{ tj. } y_1(x)=\sin x \text{ , } y_2(x)=\cos x$$

Funkcije $C_1(x)$ i $C_2(x)$:

$$\begin{cases} C_1'(x)\sin x+C_2'(x)\cos x=0 & /\cdot\sin x \\ C_1'(x)\cos x-C_2'(x)\sin x=\dfrac{1}{\cos x} & /\cdot\cos x \end{cases}$$

$$\begin{cases} C_1'(x)\sin^2 x+C_2'(x)\sin x\cdot\cos x=0 \\ C_1'(x)\cos^2 x-C_2'(x)\sin x\cdot\cos x=1 \end{cases}$$

$$prvajednadžba+drugajednadžba \text{ tj. } C_1'(x)=1$$

$$C_1(x)=\int dx=x+D_1$$

$$prvajednadžba \text{ tj. } C_2'(x)=-C_1'(x)\tan x=-\tan x$$

$$C_2(x)=-\int\tan x dx=\ln|\cos x|+D_2$$

Opće rješenje zadane jednadžbe:

$$y=C_1(x)\sin x+C_2(x)\cos x=(x+D_1)\sin x+(\ln|\cos x|+D_2)\cos x$$

□

Primjer 139. Riješi diferencijalnu jednadžbu $3y''-4y'+y+1=e^x$ koristeći se priređenim formulama.

Rješenje. Kanonski oblik:

$$3y''-4y'+y=e^x-1$$

Opće rješenje pridružene homogene jednadžbe:

$$3t^2-4t+1=0 \text{ tj. } t_1=1 \text{ , } t_2=\frac{1}{3}$$

$$y_{hom}=C_1e^x+C_2e^{\frac{1}{3}x} \text{ tj. } y_1(x)=e^x \text{ , } y_2(x)=e^{\frac{1}{3}x}$$

Funkcije $C_1(x)$ i $C_2(x)$:

$$\begin{cases} C_1'(x)e^x + C_2'(x)e^{\frac{1}{3}x} = 0 \\ C_1'(x)e^x + \frac{1}{3}C_2'(x)e^{\frac{1}{3}x} = \frac{1}{3}\left(e^x - 1\right) \end{cases}$$

$$prvajednadžba - drugajednadžba \text{ tj. } C_2'(x) = \frac{1}{2}e^{-\frac{1}{3}x} - \frac{1}{2}e^{\frac{2}{3}x}$$

$$C_2(x) = -\frac{3}{2}e^{-\frac{1}{3}x} - \frac{3}{4}e^{\frac{2}{3}x} + D_2$$

$$prvajednadžba \text{ tj. } C_1'(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{-x}$$

$$C_1(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}e^{-x} + D_1$$

Opće rješenje zadane jednadžbe:

$$y = C_1(x)e^x + C_2(x)e^{\frac{1}{3}x} = \left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}e^{-x} + D_1\right)e^x + \left(-\frac{3}{2}e^{-\frac{1}{3}x} - \frac{3}{4}e^{\frac{2}{3}x} + D_2\right)e^{\frac{1}{3}x} =$$

$$= D_1e^x + D_2e^{\frac{1}{3}x} + \frac{2x-3}{4}e^x - 1$$

□

Primjer 140. Riješi diferencijalnu jednadžbu $2y' = y'' - e^{2x}$ neposredno,bez korištenja priređenih formula.

Rješenje. Kanonski oblik:

$$y'' - 2y' = e^{2x}$$

Opće rješenje pridružene homogene jednadžbe:

$$y'' - 2y' = 0 \quad / \ z = y' \ , \ z' = y''$$

$$z' - 2z = 0 \quad / \ \text{razdvajanje promjenljivih } x \text{ i } z$$

$$\frac{1}{z}dz = 2dx$$

$$\ln|z| = 2x + K$$

$$z = \pm e^K e^{2x} = K_1 e^{2x} \ \text{ tj. } \ y' = K_1 e^{2x}$$

$$y = \int K_1 e^{2x} dx = \frac{1}{2}K_1 e^{2x} + K_2$$

$$y_{hom} = C_1 e^{2x} + C_2$$

Funkcije $C_1(x)$ i $C_2(x)$:

$$y = C_1(x)e^{2x} + C_2(x)$$

$$y' = C_1'(x)e^{2x} + 2C_1(x)e^{2x} + C_2'(x)$$

prvi uvjet $C_1'(x)e^{2x}+C_2'(x)=0$

$$y'=2C_1(x)e^{2x}\quad,\quad y''=2C_1'(x)e^{2x}+4C_1(x)e^{2x}$$

$$y''\qquad\qquad -2y'\quad =e^{2x}$$

$$2C_1'(x)e^{2x}+4C_1(x)e^{2x}-4C_1(x)e^{2x}=e^{2x}\quad /:e^{2x}$$

drugi uvjet $2C_1'(x)=1$

$$\begin{cases} C_1'(x)e^{2x}+C_2'(x)=0 \\ 2C_1'(x) \qquad\qquad =1 \end{cases}$$

$$\textit{drugajednadžba}\ \text{tj.}\ C_1'(x)=\frac{1}{2}$$

$$C_1(x)=\frac{1}{2}\int dx=\frac{1}{2}x+E_1$$

$$\textit{prvajednadžba}\ \text{tj.}\ C_2'(x)=-C_1'(x)e^{2x}=-\frac{1}{2}e^{2x}$$

$$C_2(x)=-\frac{1}{2}\int e^{2x}dx=-\frac{1}{4}e^{2x}+E_2$$

Opće rješenje zadane jednadžbe:

$$y=C_1(x)e^{2x}+C_2(x)=\left(\frac{1}{2}x+E_1\right)e^{2x}-\frac{1}{4}e^{2x}+E_2=$$

$$=\left(\frac{1}{2}x+D_1\right)e^{2x}+D_2$$

□

Primjer 141. Pronađi ono pojedinačno rješenje diferencijalne jednadžbe $y''-5y'=10x-2$ koje zadovoljava uvjete $y(0)=5$ i $y'(0)=10$.

Rješenje. Opće rješenje pridružene homogene jednadžbe:

$$t^2-5t=0\ \text{ tj. }\ t_1=0\ ,\ t_2=5$$

$$y_{hom}=C_1+C_2e^{5x}\ \text{ tj. }\ y_1(x)=1\ ,\ y_2(x)=e^{5x}$$

Funkcije $C_1(x)$ i $C_2(x)$:

$$\begin{cases} C_1'(x) \quad + \quad C_2'(x)e^{5x}=0 \\ \qquad\qquad 5C_2'(x)e^{5x}=10x-2 \end{cases}$$

$$-5\times prvajednadžba + drugajednadžba \text{ tj. } C_1'(x) = -2x + \frac{2}{5}$$

$$C_1(x) = -x^2 + \frac{2}{5}x + D_1$$

$$drugajednadžba \text{ tj. } C_2'(x) = \left(2x - \frac{2}{5}\right)e^{-5x}$$

$$C_2(x) = -\frac{2}{5}xe^{-5x} + D_2$$

Opće rješenje zadane jednadžbe:

$$y = y_{gen} = C_1(x) + C_2(x)e^{5x} = -x^2 + \frac{2}{5}x + D_1 + \left(-\frac{2}{5}xe^{-5x} + D_2\right)e^{5x} =$$

$$= D_1 + D_2e^{5x} - x^2$$

Pojedinačno rješenje zadane jednadžbe:

$$\begin{array}{lll} y = D_1 + D_2e^{5x} - x^2 & \big| x = 0, y = 5 & 5 = D_1 + D_2 \\ y' = 5D_2e^{5x} - 2x & \big| x = 0, y' = 5 & 10 = 5D_2 \\ \hline & & D_1 = 3\ ,\ D_2 = 2 \end{array}$$

$$y_{par} = 3 + 2e^{5x} - x^2$$

□

Primjer 142. Pronađi ono pojedinačno rješenje diferencijalne jednadžbe $x^2e^{-x}(-y + 2y' - y'') = 1$ koje zadovoljava uvjete $y(1) = y(-1) = 0$.

Rješenje. Kanonski oblik:

$$y'' - 2y' + y = -\frac{1}{x^2}e^x$$

Opće rješenje pridružene homogene jednadžbe:

$$y_{hom} = (C_1x + C_2)e^x$$

Opće rješenje zadane jednadžbe:

$$y = y_{gen} = (\ln|x| + D_1x + D_2)e^x$$

Pojedinačno rješenje zadane jednadžbe:

$$\begin{array}{lll} y = (\ln|x| + D_1x + D_2)e^x & \big| x = 1, y = 0 & 0 = D_1 + D_2 \\ & \big| x = -1, y = 0 & 0 = -D_1 + D_2 \\ \hline & & D_1 = D_2 = 0 \end{array}$$

$$y_{par} = e^x \ln|x|$$

□