IV. Granična vrijednost i neprekinutost

Uvod s povijesnim osvrtom

Danas je pojam granične vrijednosti polazni pojam ili osnovno sredstvo matematičke analize. Matematičari su se dva stoljeća dvoumili između graničnih vrijednosti i beskonačno malih veličina, da bi u 19. stoljeću dali prednost graničnim vrijednostima. Pomoću graničnih vrijednosti je strogo zasnovana matematička analiza. Među onima koji su za to zaslužni je svakako francuski matematičar Augustin Cauchy (1789 - 1857).

Neprekinutost, kao prirodnu zakonitost, su isticali matematičari i fizičari 17. stoljeća, a Leibniz ju je izrazio u latinskoj krilatici: "Natura non facit saltus". Prevedeno na hrvatski to znači: "U prirodi nema skokovitih promjena" ili "Prirodne pojave su neprekinute".

Neprekinutost funkcija je njihovo dobro svojstvo, a upravo na tom svojstvu počiva matematička analiza. Bez tog svojstva, ona je teško zamisliva. Neprekinutost samog skupa realnih brojeva je utvrdio njemački matematičar Wilhelm Dedekind (1831 - 1916) krajem 19. stoljeća.

Augustin Cauchy

Wilhelm Dedekind

Lekcije

1. Granična vrijednost
2. Asimptote
3. Neprekinutost

1. Granična vrijednost

1.1. Granična vrijednost funkcije

Pojmu granične vrijednosti funkcije prirodno predhodi pojam granične vrijednosti niza brojeva. Ako se prva iskustva sa graničnim vrijednostima steknu uz nizove, tada je lakše usvajati granične vrijednosti funkcija. Ovdje ćemo se ipak baviti samo graničnim vrijednostima funkcija.

Definicija opisom i ε, δ-notacijom. Neka je funkcija $f(x)$ definirana u okolini broja x_0, osim možda u samom broju x_0. Broj ℓ je **granična vrijednost** ili **limes** funkcije $f(x)$ u x_0,

opisom

ako su funkcijske vrijednosti $f(x)$ po volji blizu broju ℓ za sve $x \neq x_0$ iz neke (male) okoline broja x_0.

ε, δ-notacijom

ako za svaki $\overbrace{\varepsilon > 0}^{\text{realni broj}}$ postoji (mali) $\overbrace{\delta > 0}^{\text{realni broj}}$ tako da $\overbrace{\text{vrijedi}}^{\text{za sve } x \neq x_0}$ implikacija:

$$|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon .$$

Piše se:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell \quad \text{ili} \quad f(x) \to \ell \text{ kad } x \to x_0 ;$$

a čita:

limes $f(x)$ kad x teži x_0 je ℓ ili $f(x)$ teži ℓ kad x teži x_0.

Primjer 132. Izračunaj graničnu vrijednost funkcije $f(x) = \frac{x^2 - 9}{x^2 - 3x}$ u broju $x_0 = 3$.

Rješenje. Funkcija $f(x)$ nije definirana za $x = 3$ jer je u tom slučaju njen nazivnik jednak nuli. U okolini broja 3, za $x \neq 3$ vrijedi

$$f(x) = \frac{x^2 - 9}{x^2 - 3x} = \frac{(x-3)(x+3)}{x(x-3)} = \frac{x+3}{x} .$$

Zato je

$$\lim_{x\to 3} f(x) = \lim_{x\to 3} \frac{x+3}{x} = \frac{3+3}{3} = 2 .$$

$\square$

Primjer 133. Izračunaj $\lim\limits_{x\to 4} \frac{\sqrt{x}-2}{x-4}$.

Rješenje. U okolini broja 4, za $x \neq 4$ vrijedi

$$\frac{\sqrt{x}-2}{x-4} = \frac{\sqrt{x}-2}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)} = \frac{1}{\sqrt{x}+2} .$$

Zato je

$$\lim_{x\to 4} \frac{\sqrt{x}-2}{x-4} = \lim_{x\to 4} \frac{1}{\sqrt{x}+2} = \frac{1}{\sqrt{4}+2} = \frac{1}{4} .$$

$\square$

Napomena. U predhodna dva primjera smo računali granične vrijednosti oblika $\frac{0}{0}$ i dobili dva različita rezultata. Zato se za taj oblik kaže da je **neodređeni oblik** (inače postoji 7 neodređenih oblika).

Primjer 134. Postoji li $\lim\limits_{x\to 0} \sin\frac{1}{x}$?

Rješenje. U maloj okolini broja 0, za $x \neq 0$ apsolutne vrijednosti brojeva $\frac{1}{x}$ su vrlo velike (što je x bliže 0 to su veće), a vrijednosti $\sin\frac{1}{x}$ $(-1 \le \sin\frac{1}{x} \le 1)$ se ne gomilaju ni oko jednog broja l. Zato upitani limes ne postoji.

$\square$

Primjer 135. Postoji li $\lim\limits_{x\to 0} \frac{|x|}{x}$?

Rješenje. Za $x<0$ je

$$\frac{|x|}{x} = \frac{-x}{x} = -1 ,$$

a za $x>0$ je

$$\frac{|x|}{x} = \frac{x}{x} = 1 .$$

S lijeve strane broja 0 funkcijske vrijednosti $f(x)=\frac{|x|}{x}$ iznose -1, a s desne 1. Prema tome, ne postoji granična vrijednost funkcije $f(x)$ u broju $x_0 = 0$.

$\square$

Ovaj primjer opravdava uvođenje pojmova **jednostranih graničnih vrijednosti**. Suzi li se definicija granične vrijednosti na lijevu stranu broja x_0 dobiva se **granična vrijednost funkcije** $f(x)$ **s lijeve strane** (granična vrijednost sa lijeva) u x_0, s oznakom

$$\lim_{x \to x_0-} f(x) = l .$$

Suženje definicije na desnu stranu broja x_0 daje **graničnu vrijednost** funkcije $f(x)$ **s desne strane** (graničnu vrijednost sa desna) u x_0, uz oznaku

$$\lim_{x \to x_0+} f(x) = l .$$

Funkcija $f(x) = \frac{|x|}{x}$ iz predhodnog primjera nema graničnu vrijednost u nuli, ali ima granične vrijednosti s lijeve i desne strane u nuli:

$$\lim_{x \to 0-} \frac{|x|}{x} = -1 \quad i \quad \lim_{x \to 0+} \frac{|x|}{x} = 1 .$$

U rješavanju mnogih problema se pomažemo pogodnim zamjenama (u rješavanju jednadžbi, izvodima formula, prikazima funkcija). One također koriste u računanju graničnih vrijednosti.

Primjer 136. Pogodnom zamjenom izračunaj $\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt[3]{x+1} - 1}{\sqrt{x+1} - 1}$.

Rješenje. Uz zamjenu $\sqrt[6]{x+1} = t$ slijedi:

$$x = 0 \Longleftrightarrow t = 1 , \quad x \to 0 \Longleftrightarrow t \to 1$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt[3]{x+1} - 1}{\sqrt{x+1} - 1} = \lim_{t \to 1} \frac{t^2 - 1}{t^3 - 1} = \lim_{t \to 1} \frac{t+1}{t^2 + t + 1} = \frac{2}{3}$$

□

Granična vrijednost se može promatrati i u **beskonačnosti**, negativnoj $(-\infty)$ ili pozitivnoj $(+\infty)$.

Primjer 137. Izračunaj $\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x}$ i $\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x}$.

Rješenje. Kad x neograničeno pada $(x \to -\infty)$ ili kad x neograničeno raste ($x \to +\infty$) vrijednosti $\frac{1}{x}$ teže nuli ($\frac{1}{x} \to 0$). Tako su oba limesa jednaka nuli,

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0 \,;$$

pri čemu prvi teži nuli s negativne ili donje strane što se piše

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x} = 0- \,,$$

a drugi s pozitivne ili gornje strane što se piše

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0+ \,.$$

□

U širem smislu riječi se prihvaća i **beskonačna granična vrijednost**, negativna ($-\infty$) ili pozitivna ($+\infty$).

Primjer 138. Odredi $\lim\limits_{x \to 0-} \frac{1}{x}$ i $\lim\limits_{x \to 0+} \frac{1}{x}$.

Rješenje. Kad x teži nuli s lijeve negativne strane ($x \to 0-$) vrijednosti $\frac{1}{x}$ neograničeno padaju ($\frac{1}{x} \to -\infty$), tj.

$$\lim_{x \to 0-} \frac{1}{x} = -\infty \,.$$

Kad x teži nuli s desne pozitivne strane ($x \to 0+$) vrijednosti $\frac{1}{x}$ neograničeno rastu ($\frac{1}{x} \to +\infty$), tj.

$$\lim_{x \to 0+} \frac{1}{x} = +\infty \,.$$

□

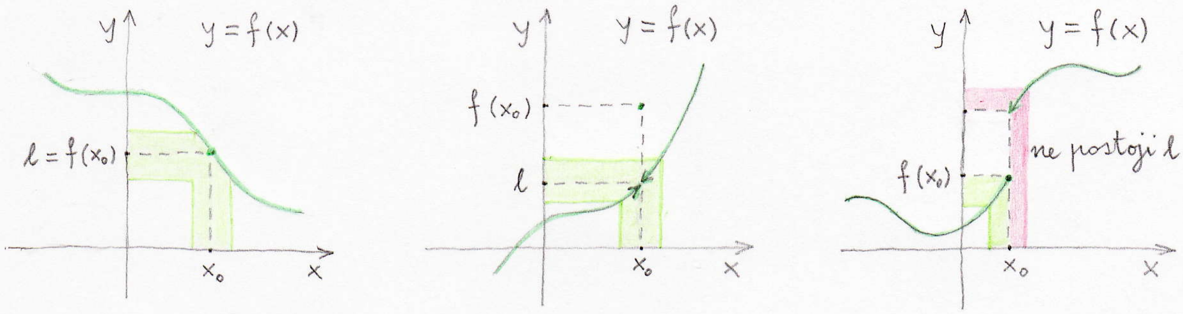
Primjer 139. Odredi $\lim\limits_{x \to \mp\infty} \dfrac{x^6 - 3x^2 + 8}{5x^4 + x^3}$.

Rješenje. Dijeljenjem brojnika i nazivnika funkcije s x^4, slijedi

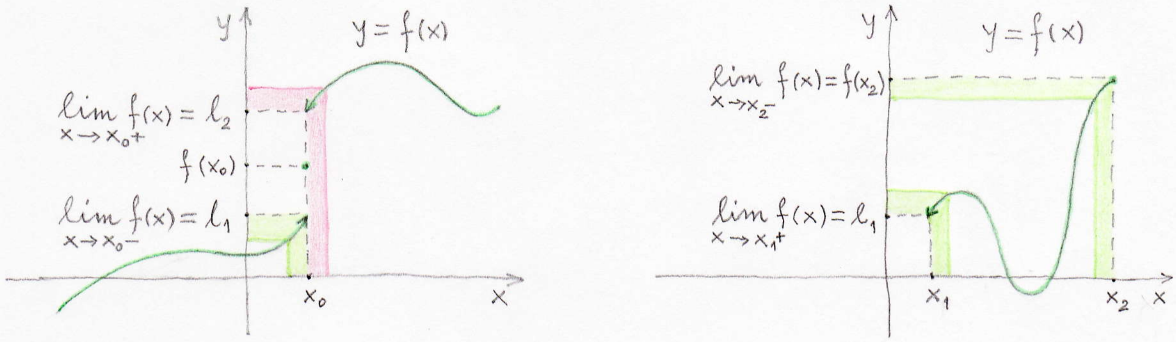
$$\lim_{x \to \mp\infty} \frac{x^6 - 3x^2 + 8 \;/ : x^4}{5x^4 + x^3 \;/ : x^4} = \lim_{x \to \mp\infty} \frac{x^2 - \frac{3}{x^2} + \frac{8}{x^4}}{5 + \frac{1}{x}} = +\infty$$

jer izrazi $\frac{3}{x^2}$, $\frac{8}{x^4}$ i $\frac{1}{x}$ teže nuli dok izraz $\frac{x^2}{5}$ neograničeno raste kad x neograničeno pada ili raste.

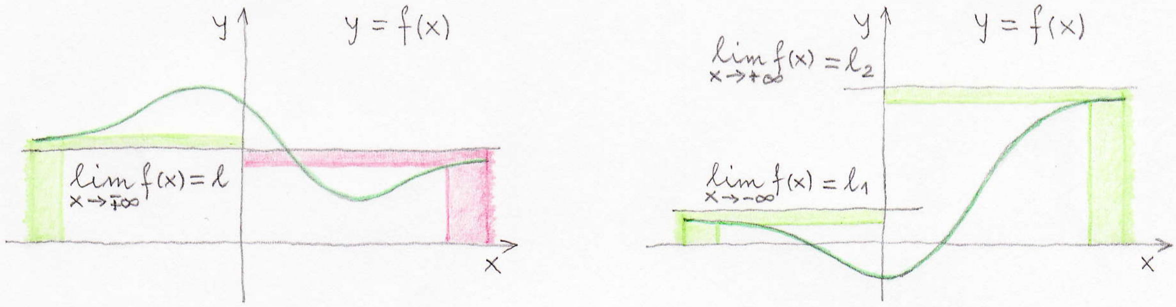
□



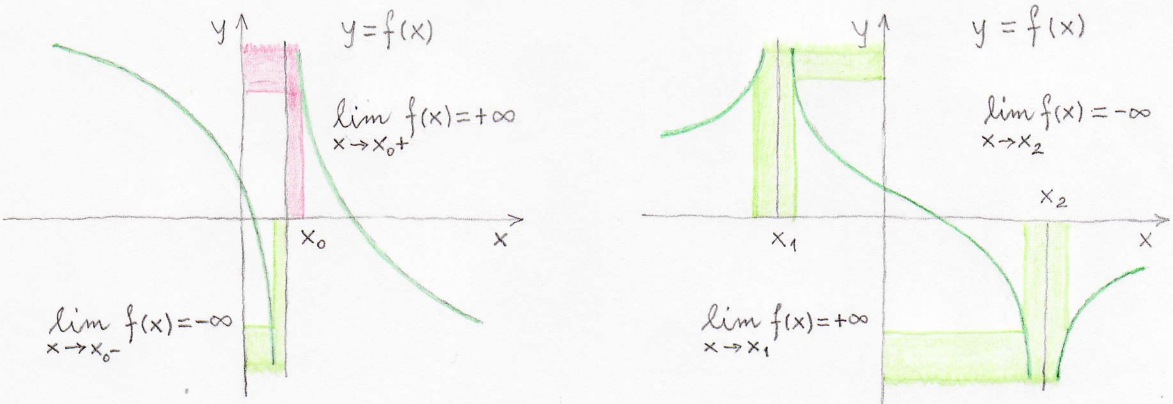
granična vrijednost



jednostrane granične vrijednosti



granična vrijednost u beskonačnosti



beskonačna granična vrijednost

1.2. Računska pravila

Neka postoje $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ i $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$ kao brojevi. Tada vrijede jednostavna pravila:

$$(1)\quad \lim_{x\to x_0}[f(x)+g(x)] = \lim_{x\to x_0} f(x) + \lim_{x\to x_0} g(x)$$

$$(2)\quad \lim_{x\to x_0}[f(x)-g(x)] = \lim_{x\to x_0} f(x) - \lim_{x\to x_0} g(x)$$

$$(3)\quad \lim_{x\to x_0}[f(x)\cdot g(x)] = \left[\lim_{x\to x_0} f(x)\right]\cdot\left[\lim_{x\to x_0} g(x)\right]$$

$$(4)\quad \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)}$$ uz dodatne uvjete

$\lim\limits_{x\to x_0} g(x)\neq 0$ i $g(x)\neq 0$ za $x\neq x_0$ iz neke okoline broja x_0

Ova pravila još vrijede za jednostrane granične vrijednosti i za granične vrijednosti u beskonačnosti.

Primjer 140. Oslanjajući se na računska pravila izračunaj:

$$(1)\ \lim_{x\to 1}\left(\log x + \frac{x^2-x}{x^2-1}\right) \qquad (2)\ \lim_{x\to +\infty}\frac{x-\sin x}{x}$$

$$(3)\ \lim_{x\to 0+}\frac{|x^2-6x|}{x^2-2x} \qquad (4)\ \lim_{x\to -\infty}\frac{2x^3-x^2+1}{5x^3+x-2}$$

Rješenje. (1) Budući da je

$$\lim_{x\to 1}\log x = \log 1 = 0,\quad \lim_{x\to 1}\frac{x^2-x}{x^2-1} = \lim_{x\to 1}\frac{x}{x+1} = \frac{1}{2}$$

može se primijeniti pravilo (1):

$$\lim_{x\to 1}\left(\log x + \frac{x^2-x}{x^2-1}\right) = 0 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

(2) Kako je $\dfrac{x-\sin x}{x} = 1 - \dfrac{\sin x}{x}$ i

$$\lim_{x\to +\infty} 1 = 1,\quad \lim_{x\to +\infty}\frac{\sin x}{x} = 0$$

opravdano je primijeniti pravilo (2):

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{x-\sin x}{x} = 1 - 0 = 1.$$

(3) Prikaz $\dfrac{|x^2-6x|}{x^2-2x} = \dfrac{|x|}{x} \cdot \dfrac{|x-6|}{x-2}$ i

$$\lim_{x\to 0+} \frac{|x|}{x} = 1 \,, \quad \lim_{x\to 0+} \frac{|x-6|}{x-2} = -3$$

osiguravaju primjenu pravila (3):

$$\lim_{x\to 0+} \frac{|x^2-6x|}{x^2-2x} = 1 \cdot (-3) = -3 \,.$$

(4) Nakon dijeljenja brojnika i nazivnika s x^3 te računanja graničnih vrijednosti, primjenjujući pravila (1) i (2),

$$\lim_{x\to -\infty} \left(2 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^3}\right) = 2 \,, \quad \lim_{x\to -\infty} \left(5 + \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x^3}\right) = 5$$

smije se primijeniti pravilo (4):

$$\lim_{x\to -\infty} \frac{2x^3 - x^2 + 1}{5x^3 + x - 2} = \frac{2}{5} \,.$$

□

Primjer 141. Može li se primijeniti neko od pravila (1)–(4) u računanju granične vrijednosti $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(\sqrt{x+1} - \sqrt{2x+1}\right)$?

Rješenje. Granične vrijednosti

$$\lim_{x\to +\infty} \sqrt{x+1} = +\infty \,, \quad \lim_{x\to +\infty} \sqrt{2x+1} = +\infty$$

nisu konačne pa ne možemo primijeniti ni jedno od pravila.

Prikaz

$$\sqrt{x+1} - \sqrt{2x+1} = \sqrt{x\left(1+\frac{1}{x}\right)} - \sqrt{x\left(2+\frac{1}{x}\right)} =$$

$$= \sqrt{x}\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}} - \sqrt{2+\frac{1}{x}}\right)$$

razlučuje: $\sqrt{x}$ koji neograničeno raste, i izraz u zagradi koji teži broju $1-\sqrt{2}<0$, sve kad x neograničeno raste. Zato njihov umnožak neograničeno pada, tj.

$$\lim_{x\to +\infty} \left(\sqrt{x+1} - \sqrt{2x+1}\right) = \lim_{x\to +\infty} \sqrt{x}\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}} - \sqrt{2+\frac{1}{x}}\right) = -\infty \,.$$

□

1.3. Osnovne granične vrijednosti

U primjenama su nezaobilazne granične vrijednosti :

(1) $\boxed{\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e}$ (2) $\boxed{\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-1}{x}=\ln a}$ (3) $\boxed{\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1}$

Formula (1) predstavlja jednu od definicija broja e i teško ju je dokazati.

Formula (2) se može izvesti zamjenom $a^x-1=t$ odnosno

$$x=\frac{\ln(1+t)}{\ln a}$$

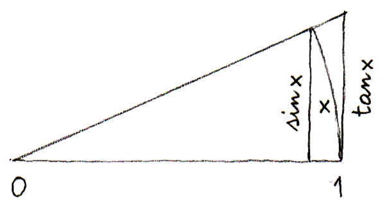
i primjenom formule (1) :

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\lim_{t\to 0}\frac{t}{\frac{\ln(1+t)}{\ln a}}=\lim_{t\to 0}\frac{\ln a}{\frac{1}{t}\ln(1+t)}=$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{\ln a}{\ln(1+t)^{\frac{1}{t}}}=\frac{\ln a}{\ln e}=\ln a .$$

Formula (3) se dokazuje uz malu geometrijsku pripomoć. Za mali $x>0$ vrijede nejednakosti

$$\sin x<x<\tan x .$$



Očito je $\sin x<x$ jer je x duljina kružnog luka. Nejednakost $x<\tan x$ slijedi iz činjenice da je površina kružnog isječka $\frac{x\cdot 1}{2}$ manja od površine većeg trokuta $\frac{1\cdot\tan x}{2}$.

Slijedi :

$$x<\tan x\ /\cdot\frac{\cos x}{x} \qquad\qquad \sin x<x\ /:x$$

$$\cos x<\frac{\sin x}{x} \qquad\qquad \frac{\sin x}{x}<1$$

$$\cos x<\frac{\sin x}{x}<1\ /\lim_{x\to 0}$$

(nejednakosti vrijede i za $x<0$ jer su svi izrazi parni)

$$1 \le \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} \le 1$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

Primjer 142. Izračunaj granične vrijednosti

$$(1)\ \lim_{x\to\pm\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x \qquad (2)\ \lim_{x\to 0} \frac{a^x-b^x}{x} \qquad (3)\ \lim_{x\to 0} \frac{\arcsin x}{x}$$

Rješenje.

$$(1)\ \lim_{x\to\pm\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x \left| \begin{array}{c} \frac{1}{x}=t \\ x\to\pm\infty \Rightarrow t\to 0 \end{array} \right| = \lim_{t\to 0} (1+t)^{\frac{1}{t}} = e$$

$$(2)\ \lim_{x\to 0} \frac{a^x-b^x}{x} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{a^x-1}{x} - \frac{b^x-1}{x}\right) = \ln a - \ln b = \ln\frac{a}{b}$$

$$(3)\ \lim_{x\to 0} \frac{\arcsin x}{x} \left| \begin{array}{c} \arcsin x = t \\ x = \sin t \\ x\to 0 \Rightarrow t\to 0 \end{array} \right| = \lim_{t\to 0} \frac{t}{\sin t} = 1$$

□

Primjer 143. Izračunaj $\lim_{x\to 0} (1+ax)^{\frac{b}{x}+c}$.

Rješenje. Za $a=0$ limes iznosi 1. Za $a\neq 0$ slijedi:

$$\lim_{x\to 0} (1+ax)^{\frac{b}{x}+c} \ |ax=t| = \lim_{t\to 0} (1+t)^{\frac{ab}{t}+c} =$$

$$= \lim_{t\to 0} \left[(1+t)^{\frac{1}{t}}\right]^{ab} \cdot (1+t)^c = e^{ab}\cdot 1 = e^{ab}.$$

□

Primjer 144. Izračunaj $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2}$.

Rješenje. Uz pomoć identiteta

$$1-\cos x = 2\sin^2\frac{x}{2}$$

račun izgleda ovako:

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2} \left| \tfrac{1}{2}x = t \right| = \lim_{t\to 0} \frac{2\sin^2 t}{4t^2} =$$

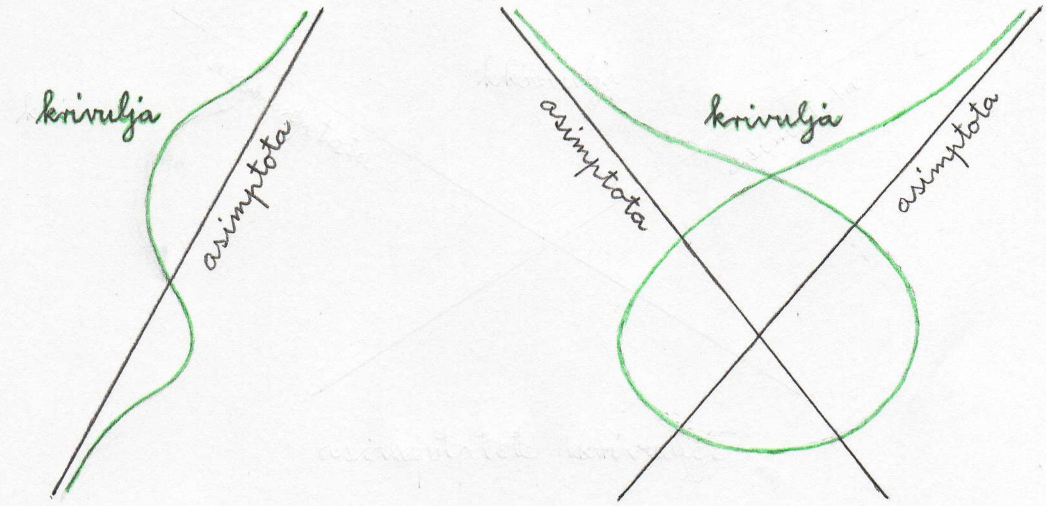
$$= \frac{1}{2}\lim_{t\to 0}\left(\frac{\sin t}{t}\right)^2 = \frac{1}{2}\cdot 1^2 = \frac{1}{2}$$

□

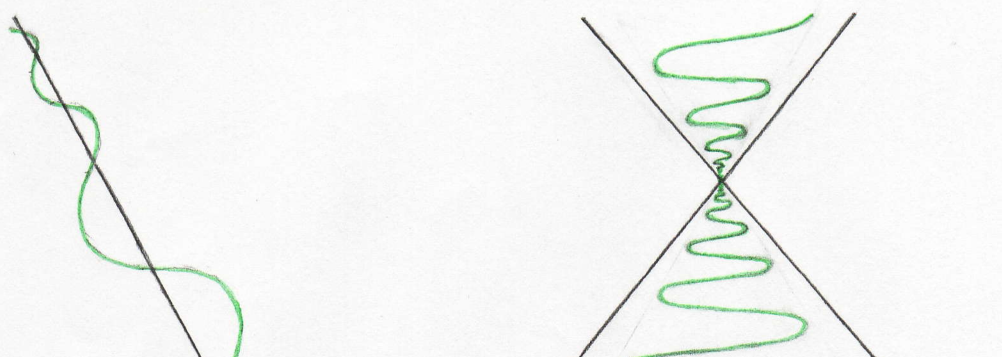
2. Asimptote

2.1. Pravac kao asimptota krivulje

Ako su na nekom području krivulja i pravac po volji blizu, ali nemaju zajedničkih točaka, tada kažemo da je pravac **asimptota** krivulje ili da se krivulja **asimptotski** približava pravcu.



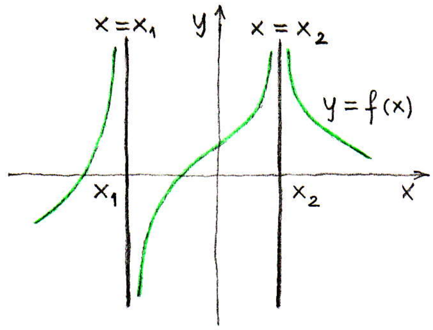
asimptote krivulje



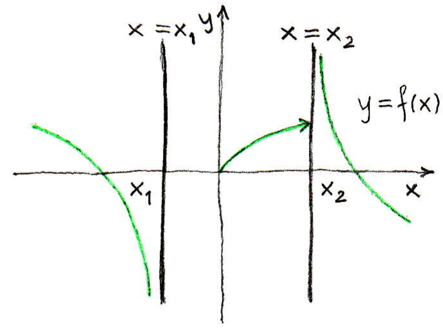
nisu asimptote krivulje

2.2. Asimptote grafa funkcije

Ako je $\lim\limits_{x \to x_0 \mp} f(x) = \mp\infty$, tada je pravac $x = x_0$ **okomita** ili **vertikalna asimptota** grafa funkcije $f(x)$.

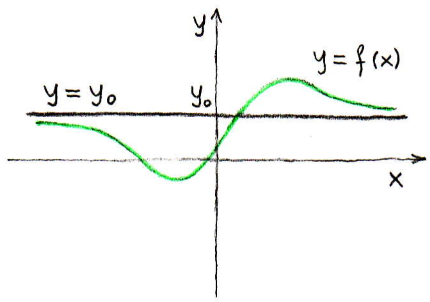


dvostrane okomite asimptote
(s lijeve i desne str. brojeva x_1, x_2)

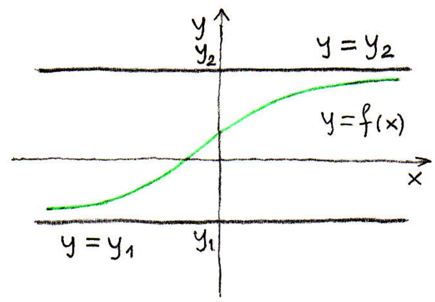


jednostrane okomite asimptote
(s lijeve ili desne str. brojeva x_1, x_2)

Ako je $\lim\limits_{x \to \mp\infty} f(x) = y_0$, tada je pravac $y = y_0$ **usporedna** ili **horizontalna asimptota** grafa funkcije $f(x)$.

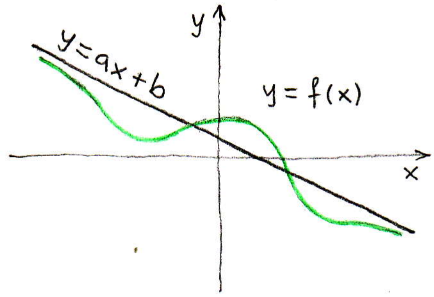


dvostrana usporedna asimptota
(u neg. i poz. beskonačnosti)

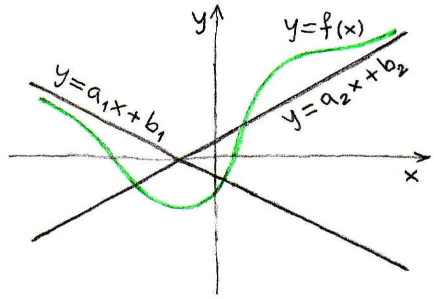


jednostrane usporedne asimptote
(u neg. ili poz. beskonačnosti)

Ako je $\lim\limits_{x \to \mp\infty} f(x) = a \neq 0$ i $\lim\limits_{x \to \mp\infty} f(x) = b$, tada je pravac $y = ax + b$ **kosa** ili **transverzalna asimptota** grafa funkcije $f(x)$.



dvostrana kosa asimptota
(u neg. i poz. beskonačnosti)



jednostrane kose asimptote
(u neg. ili poz. beskonačnosti)

Primjer 145. Odredi asimptote grafa funkcije $f(x)=\dfrac{3x^2+2x}{4(x-1)^2}$.

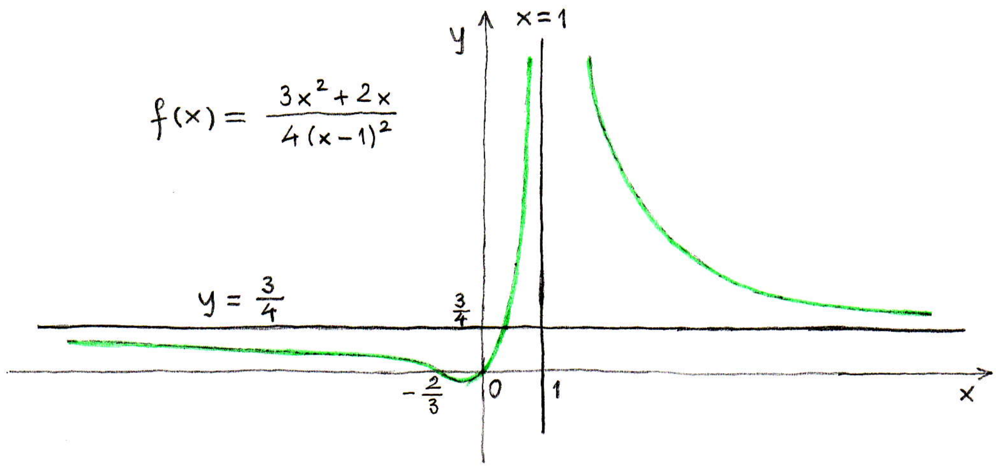
Rješenje. Graf racionalne funkcije $f(x)$ ima dvostranu okomitu asimptotu $x=1$, u svom polu drugog reda, jer je

$$\lim_{x\to 1}\frac{3x^2+2x}{4(x-1)^2}=+\infty .$$

Graf funkcije $f(x)$ ima još dvostranu usporednu asimptotu $y=\frac{3}{4}$ jer je

$$\lim_{x\to\mp\infty}\frac{3x^2+2x}{4x^2-8x+4}=\lim_{x\to\mp\infty}\frac{3+\frac{2}{x}}{4-\frac{8}{x}+\frac{4}{x^2}}=\frac{3}{4}.$$

Drugih asimptota u negativnoj ili pozitivnoj beskonačnosti graf jednoznačne funkcije $f(x)$ (za svaki x iz D_f samo je jedan $f(x)$) ne može više imati.



□

Primjer 146. Odredi asimptote grafa funkcije $f(x)=\dfrac{x^3-1}{2x^2+4x}$.

Rješenje. Graf racionalne funkcije $f(x)$ ima dvostrane okomite asimptote $x=-2$ i $x=0$, u svojim polovima prvog reda, jer je

$$\lim_{x\to -2\mp}\frac{x^3-1}{2x(x+2)}=\mp\infty \quad i \quad \lim_{x\to 0\mp}\frac{x^3-1}{2x(x+2)}=\pm\infty .$$

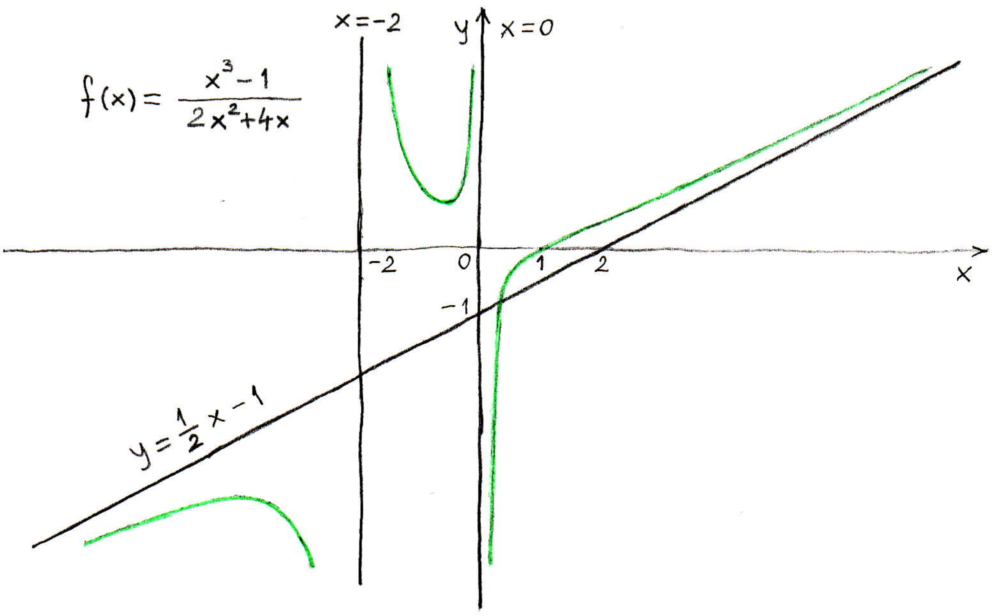
Strpljivim računanjem ove je limese dovoljno izračunati samo s jedne strane brojeva -2 i 0, dok je s druge strane suprotan predznak zato što su to polovi neparnog reda.

Graf funkcije $f(x)$ ima još dvostranu kosu asimptotu $y=\frac{1}{2}x-1$ jer je

$$a = \lim_{x\to\mp\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\mp\infty} \frac{x^3-1}{2x^3+4x^2} = \frac{1}{2}$$

i

$$b = \lim_{x\to\mp\infty} \left[f(x) - \frac{1}{2}x\right] = \lim_{x\to\mp\infty} \frac{-2x^2-1}{2x^2+4x} = -1.$$



□

Primjer 147. Odredi asimptote grafa funkcije $f(x) = \sqrt{4x^2+1}$.

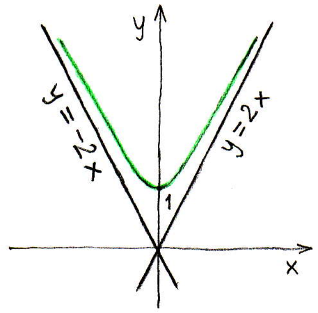
Rješenje. Funkcija $f(x)$ je definirana na cijelom realnom području pa njen graf ne može imati okomitih asimptota.

Funkcija $f(x)$ je parna, $f(-x) = f(x)$, što nam olakšava posao jer možemo promatrati samo pozitivnu beskonačnost. Za velike x procjena $f(x) \approx \sqrt{4x^2} = 2x$ sugerira da bi pravac $y = 2x$ mogao biti asimptota. Račun za a i b to potvrđuje:

$$a = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \sqrt{\frac{4x^2+1}{x^2}} = \lim_{x\to+\infty} \sqrt{4+\frac{1}{x^2}} = 2$$

$$b = \lim_{x\to+\infty} [f(x)-2x] = \lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt{4x^2+1} - 2x\right) \frac{\sqrt{4x^2+1}+2x}{\sqrt{4x^2+1}+2x} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{4x^2+1}+2x} = 0$$



Uzme li se sve u obzir može se zaključiti da su pravci $y=-2x$ i $y=2x$ jednostrane kose asimptote, prvi u negativnoj, a drugi u pozitivnoj beskonačnosti.

□

3. Neprekinutost

3.1. Neprekinutost funkcije

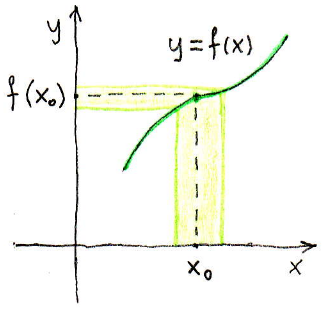
Svojstvo funkcije, po kojem maloj promjeni njene promjenljive odgovara mala promjena njene vrijednosti, se zove neprekinutost. Prvo ćemo pomoću granične vrijednosti definirati neprekinutost funkcije u jednom broju.

Definicija. Funkcija $f(x)$, definirana u okolini broja x_0, je **neprekinuta** ili **kontinuirana** u x_0, ako je

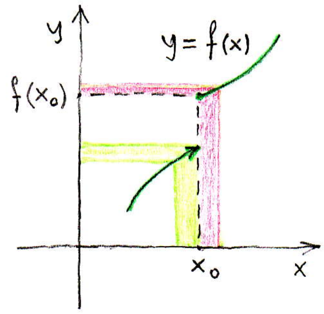
$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

Definicija kaže da je funkcija neprekinuta u nekom broju, ako je njena granična vrijednost jednaka funkcijskoj vrijednosti u tom broju.

Za funkciju $f(x)$ koja nije neprekinuta u x_0 se kaže da je **prekinuta** ili **diskontinuirana** u x_0.



funkcija neprekinuta u x_0



funkcija prekinuta u x_0

Jezična primjedba. Umjesto naziva neprekinuta funkcija u hrvatskom jeziku bi više odgovarao jasniji naziv, **cjelovita funkcija**. Tada bi se govorilo o cjelovitim i prekinutim funkcijama.

Napomena. Neprekinutost funkcije $f(x)$, čije je područje definicije D_f, se promatra u **unutarnjim točkama** područja D_f: to su one točke x_0 iz D_f oko kojih postoji interval sadržan u D_f.

Ako je skup D otvoreni interval, tada je svaka njegova točka unutarnja. Ako je D zatvoreni interval, tada njegove dvije rubne točke nisu unutarnje, dok sve ostale jesu. Npr. kod skupa

$$\mathcal{D} = \langle a, b] \cup \{c, d\}$$

razlikujemo:

unutarnje točke	$a < x_0 < b$
rubne točke	a, b
izolirane točke	c, d

Ako je funkcija neprekinuta u točki x_0, tada se može dokazati da je ona neprekinuta u svakoj točki nekog malog intervala oko x_0.

Za funkciju $f(x)$ koja je neprekinuta u svakoj točki nekog područja $\mathcal{D}$ kažemo da je neprekinuta na području $\mathcal{D}$.

Primjer 148. Dokaži neprekinutost funkcije $f(x) = \sin x$ u broju $x_0 = 0$.

Rješenje. Iz ocjena

$$0 \le \sin x \le x \quad \text{za } x \ge 0 \quad \text{i} \quad x \le \sin x \le 0 \quad \text{za } x \le 0$$

slijedi da je

$$\lim_{x \to 0+} \sin x = 0 \quad \text{i} \quad \lim_{x \to 0-} \sin x = 0.$$

Zato vrijedi

$$\lim_{x \to 0} \sin x = 0 = \sin 0.$$

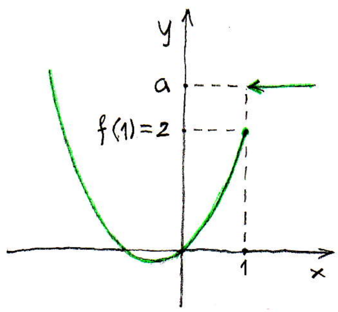
□

Primjer 149. Odredi broj a tako da funkcija

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + x & \text{za } x \le 1 \\ a & \text{za } x > 1 \end{cases}$$

bude neprekinuta u točki $x_0 = 1$.

Rješenje. Oslonimo li se na zornu predodžbu neprekinutosti, tj. na graf fukcije $f(x)$, očito je da mora biti $a = f(1) = 2$. Za svaki drugi a, tj. za $a \neq 2$, funkcija $f(x)$ je prekinuta u točki $x_0 = 1$.



□

Primjer 150. Pronađi brojeve a i b za koje će funkcija

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 - x & \text{za } x < 3 \\ b & \text{za } x = 3 \\ x^3 + 4a & \text{za } x > 3 \end{cases}$$

biti neprekinuta u točki $x_0 = 3$.

Rješenje. Oslonimo se na definiciju neprekinutosti. Limes funkcije (s lijeva i desna) u točki 3 mora biti jednak funkcijskoj vrijednosti $f(3) = b$:

$$\lim_{x \to 3-} f(x) = \lim_{x \to 3-} (ax^2 - x) = 9a - 3$$

$$\lim_{x \to 3+} f(x) = \lim_{x \to 3+} (x^3 + 4a) = 27 + 4a$$

$$9a - 3 = 27 + 4a = b$$

$$a = 6,\ b = 51$$

□

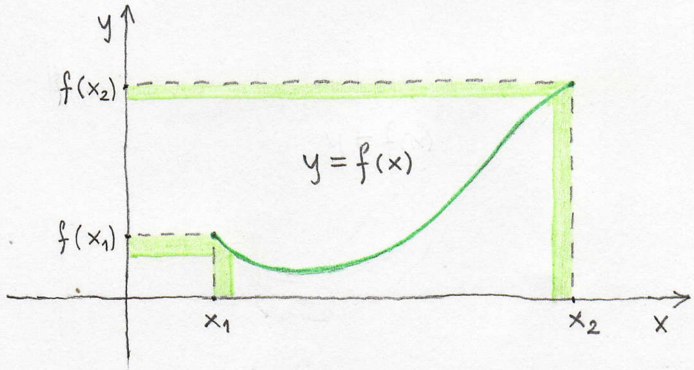
Za funkciju $f(x)$ zadanu na zatvorenom intervalu $[x_1, x_2]$ se definiraju **jednostrane neprekinutosti** u rubnim točkama x_1 i x_2. Ako je

$$\lim_{x \to x_1+} f(x) = f(x_1),$$

tada je $f(x)$ **neprekinuta s desne strane** (neprekinuta s desna) u točki x_1. Ako je

$$\lim_{x \to x_2-} f(x) = f(x_2),$$

tada je $f(x)$ **neprekinuta s lijeve strane** (neprekinuta s lijeva) u točki x_2.



funkcija neprekinuta na zatvorenom intervalu

3.2. Pravila neprekinutosti

Osnovna pravila za neprekinute funkcije se uglavnom vrlo lako pamte jer su prirodna, očekivana.

Neka su funkcije $f(x)$ i $g(x)$ neprekinute u točki x_0. Tada je u točki x_0 neprekinut njihov zbroj, razlika, umnožak i količnik (posljedica računskih pravila za limese):

$$(1)\quad \lim_{x\to x_0}[f(x)+g(x)] = \lim_{x\to x_0} f(x) + \lim_{x\to x_0} g(x) = f(x_0)+g(x_0)$$

$$(2)\quad \lim_{x\to x_0}[f(x)-g(x)] = \lim_{x\to x_0} f(x) - \lim_{x\to x_0} g(x) = f(x_0)-g(x_0)$$

$$(3)\quad \lim_{x\to x_0}[f(x)\cdot g(x)] = \lim_{x\to x_0} f(x) \cdot \lim_{x\to x_0} g(x) = f(x_0)\cdot g(x_0)$$

$$(4)\quad \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)} = \frac{f(x_0)}{g(x_0)}\,,\quad g(x_0)\neq 0$$

Ako je funkcija $g(x)$ neprekinuta u točki x_0, a funkcija $f(x)$ neprekinuta u točki $g(x_0)$, tada je u točki x_0 neprekinut njihov spoj $(f\circ g)(x) = f(g(x))$:

$$(5)\quad \lim_{x\to x_0} f(g(x)) = f\left(\lim_{x\to x_0} g(x)\right) = f(g(x_0))$$

Ako je $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = \ell$ i ako je funkcija $f(x)$ neprekinuta u točki ℓ, tada limes može ući pod neprekinutu funkciju f:

$$(6)\quad \lim_{x\to x_0} f(g(x)) = f\left(\lim_{x\to x_0} g(x)\right) = f(\ell)$$

Primjer 151. Oslanjajući se na pravilo (6), odredi $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{\dfrac{4x-\sin x}{x}}$.

Rješenje. Neka je $g(x) = \dfrac{4x-\sin x}{x} = 4 - \dfrac{\sin x}{x}$ i $f(x) = \sqrt{x}$. Funkcija $g(x)$ nije definirana u $x_0 = 0$, ali ima graničnu vrijednost u $x_0 = 0$:

$$\ell = \lim_{x\to 0} g(x) = \lim_{x\to 0}\left(4 - \frac{\sin x}{x}\right) = 4 - 1 = 3\,.$$

Funkcija $f(x)$ je neprekinuta u točki $l = 3$ jer je $\lim_{x\to 3}\sqrt{x} = \sqrt{3} = f(3)$. Traženi limes iznosi $f(l) = f(3) = \sqrt{3}$. Sve rečeno se obično izražava ovako:

$$\lim_{x\to 0}\sqrt{\frac{4x-\sin x}{x}} = \sqrt{\lim_{x\to 0}\left(4-\frac{\sin x}{x}\right)} = \sqrt{3}.$$

$\square$

3.3. Neprekinutost elementarnih funkcija

Dokažimo neprekinutost polinoma i racionalnih funkcija. Konstanta $f(x)=c$ i identiteta $g(x)=x$ su neprekinute u bilo kojoj točki x_0 jer je očito

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = c = f(x_0) \quad i \quad \lim_{x\to x_0} g(x) = x_0 = g(x_0).$$

Neprekinutost monoma $y = 4x^3$ proizlazi iz neprekinutosti konstante $f(x)=4$, neprekinutosti identitete $g(x)=x$ te neprekinutosti umnoška (3):

$$y = 4x^3 = (4\cdot x)\cdot(x\cdot x).$$

Na sličan način, primjenjujući pravila (1) − (3), proizlazi neprekinutost bilo kojeg polinoma; a primjenjući pravila (1) − (4), proizlazi neprekinutost bilo koje racionalne funkcije.

Dokazivanje neprekinutosti nekih osnovnih elementarnih funkcija je vrlo teško, ali se može dokazati da su sve osnovne elementarne funkcije neprekinute gdje god su definirane. Prisjetimo se da elementarne funkcije nastaju od osnovnih elementarnih funkcija i pet funkcijskih operacija (zbroj, razlika, umnožak, količnik, spoj). Kao posljedica neprekinutosti osnovnih elementarnih funkcija i pravila neprekinutosti (1) − (5) slijedi neprekinutost elementarnih funkcija. To je najvažnija spoznaja u ovoj glavi pa ćemo ju još jednom istaknuti kao teorem.

Teorem. Sve elementarne funkcije su neprekinute, svaka na cijelom svom području definicije.

3.4. Svojstva neprekinutih funkcija

Primjer 152. Odredi najšire područje D na kojem je zadana funkcija $f(x)$ neprekinuta:

(1) $f(x) = \frac{1}{x-1}$ (2) $f(x) = \ln(x - x^2)$ (3) $f(x) = \operatorname{sgn} x$

Rješenje. Funkcije (1) i (2) su elementarne pa za njih vrijedi $D = D_f$. Funkcija (3) nije elementarna.

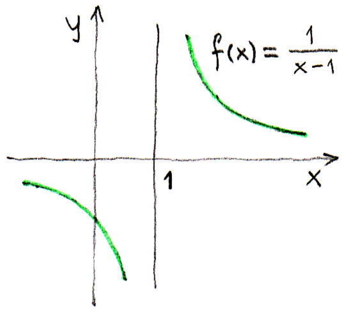
(1) Racionalna funkcija $f(x) = \frac{1}{x-1}$ nije definirana jedino u polu $x = 1$, $D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

(2) Domena složene funkcije $f(x) = \ln(x - x^2)$ je određena nejednadžbom $x - x^2 > 0$ koja se najlakše rješava pomoću grafa parabole $y = x - x^2$; $D_f = \langle 0, 1 \rangle$.

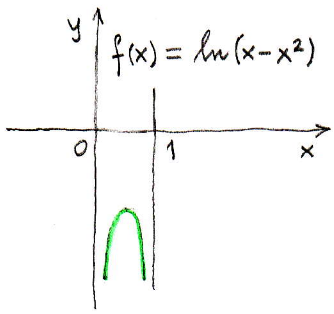
(3) Funkcija predznaka $f(x) = \operatorname{sgn} x$ svim pozitivnim brojevima pridružuje 1, svim negativnim brojevima pridružuje -1, a nuli pridružuje nulu. Zato je

$$\lim_{x \to 0+} f(x) = 1 \quad i \quad \lim_{x \to 0-} f(x) = -1$$

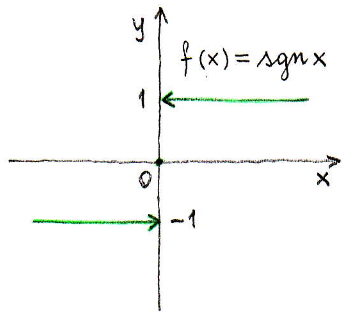
što pokazuje da $f(x)$ nema graničnu vrijednost (dvostranu) u točki $x_0 = 0$, nego je u njoj prekinuta. Kako je $D_f = \mathbb{R}$, izlazi $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.



$D = D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$



$D = D_f = \langle 0, 1 \rangle$



$D = D_f \setminus \{0\} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

□

Primjer 153. Ima li funkcija $f(x) = \arcsin x - 2^{-x}$ nul-točku?

Rješenje. Područje definicije funkcije $f(x)$ je zatvoreni interval $D_f = [-1, 1]$, a vrijednosti funkcije na rubovima iznose

$$f(-1) = \arcsin(-1) - 2 = -\frac{\pi}{2} - 2 < 0 \quad i \quad f(1) = \arcsin 1 - 2^{-1} = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} > 0.$$

Na rubovima zatvorenog intervala D_f funkcija $f(x)$ ima suprotne predznake i neprekinuta je na D_f ($f(x)$ je elementarna funkcija). Iz ovih činjenica slijedi da postoji broj x_0, $-1 < x_0 < 1$, za koji je $f(x_0) = 0$ (graf funkcije $f(x)$ siječe os x u točki x_0). Prema rečenom, funkcija $f(x)$ ima bar jednu nul-točku x_0.

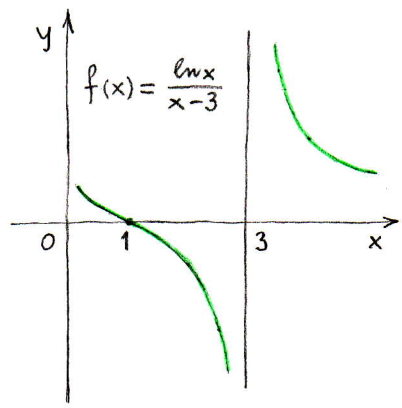
□

Primjer 154. Pronaći intervale na kojima funkcija $f(x) = \frac{\ln x}{x-3}$ ima stalan predznak.

Rješenje. Domena funkcije je skup $D_f = \langle 0, 3\rangle \cup \langle 3, +\infty\rangle$. Funkcija ima jednu nul-točku $x = 1$ i jedan pol $x = 3$. Brojevi 1 i 3 dijele domenu D_f na tri intervala. Funkcija $f(x)$ je neprekinuta pa zato unutar svakog tog pojedinog intervala ima stalan predznak. Taj se predznak može odrediti računanjem vrijednosti funkcije samo u jednoj točki dotičnog intervala:

x	0	$\frac{1}{e}$	1	e	3	e^2	$+\infty$
$f(x)$		$\frac{e}{3e-1}$	0	$\frac{1}{e-3}$		$\frac{2}{e^2-3}$	
predznak		$+$		$-$		$+$	

ZELENA BOJA U TABLICI ISTIČE ONO NAJBITNIJE
CRVENA BOJA ISTIČE ONO ŠTO NIJE DEFINIRANO



Funkcija $f(x)$ je pozitivna na intervalima $\langle 0, 1\rangle$ i $\langle 3, +\infty\rangle$, a negativna na intervalu $\langle 1, 3\rangle$.

□

Primjer 155. Koristeći se pravilom o ulazku limesa pod neprekinutu funkciju, izračunaj $\lim\limits_{x \to 1} \arccos \frac{\sin(x-1)}{x^2-1}$.

Rješenje.

$$\lim_{x\to 1} \arccos \frac{\sin(x-1)}{x^2-1} = \arccos\left[\lim_{x\to 1} \frac{1}{x+1} \cdot \frac{\sin(x-1)}{x-1}\right] =$$

$$= \arccos\left[\frac{1}{1+1} \cdot 1\right] = \arccos \frac{1}{2} = \frac{\pi}{3}$$

□