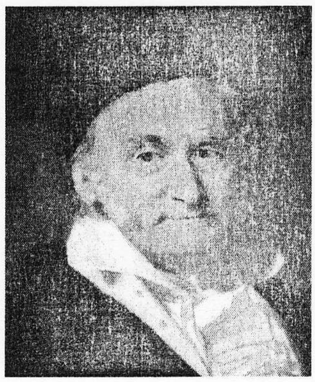
# III. Funkcije

## Uvod s povijesnim osvrtom

Matematička analiza je jedna od najvažnijih grana matematike. U svom središnjem dijelu matematička analiza proučava realne funkcije realne promjenljive.

Funkcija, općenitije preslikavanje, predstavlja jedan od najvažnijih matematičkih pojmova. Značajan doprinos u razvoju funkcija, kao i oznaku f(x), je dao švicarski matematičar Leonhard Euler (1707 - 1783). Važne funkcije koje imaju široku praktičnu primjenu je pronašao veliki njemački matematičar Carl Gauss (1777 - 1855).

Leonhard Euler



Carl Gauss

# Lekcije

# 1. Realna funkcija realne promjenljive

## 1.1. Pojam i oznaka

Pravilo ili zakon po kojem se realnim brojevima pridružuju realni brojevi uobličeno je u matematički pojam **realne funkcije realne promjenljive**. To pravilo mora biti jednoznačno, tj. svakom broju na koji se odnosi pridružiti samo jedan broj. Realna funkcija realne promjenljive se izražava općim brojem $x$ i pravilom $f$ koje tom broju $x$ pridružuje broj $f(x)$. Opći broj $x$ se naziva **promjenljivom** ili **varijablom**, a pravilo $f$ **preslikavanjem** ili **funkcijom**. Govori se o funkciji $f$ promjenljive $x$, ili zgusnuto, o funkciji $f(x)$.

Često puta se odnos između dviju veličina $x$ i $y$ može izraziti funkcijskom vezom $y = f(x)$. U tom slučaju $x$ predstavlja **nezavisno promjenljivu veličinu** (kraće promjenljivu), a $y$ **zavisno promjenljivu veličinu** (kraće funkciju).

## 1.2. Zadavanje pomoću formula

Najjednostavniji način zadavanja funkcije $f(x)$ je **eksplicitna formula** koja ovisi samo o $x$. Taj je oblik ujedno i najpogodniji za proučavanje funkcije.

**Primjer** 62. Izračunaj vrijednost funkcije $f(x) = x^3 - \sqrt{x}$ za $x = 4$.

Rješenje. U eksplicitnu jednadžbu $f(x) = x^3 - \sqrt{x}$ uvrstimo $x = 4$:

$$f(4) = 4^3 - \sqrt{4} = 64 - 2 = 62$$

□

Manje pogodan način zadavanja funkcije $y = f(x)$ je **implicitna formula** koja ovisi o $x$ i $y$.

**Primjer 63.** Izračunaj vrijednost pozitivne funkcije $y=f(x)$ za $x=4$, ako je $5-xy=y^2$.

*Rješenje.* U implicitnu jednadžbu $5-xy=y^2$ uvrstimo $x=4$:

$$5-4y=y^2$$
$$y^2+4y-5=0$$
$$y_1=1,\ y_2=-5$$

Uzmemo pozitivno rješenje $y_1=1$:

$$y=f(4)=1$$

$\square$

Ponekad je zgodno funkciju $y=f(x)$ zadati pomoću eksplicitnih **parametarskih formula** za $x$ i $y$ koje ovise o trećoj promjenljivoj $t$ koju nazivamo parametrom.

**Primjer 64.** Izračunaj vrijednost negativne funkcije $y=f(x)$ za $x=4$, ako je $x=t^2$ i $y=1-2t$.

*Rješenje.* U prvu parametarsku jednadžbu $x=t^2$ uvrstimo $x=4$:

$$4=t^2$$
$$t_1=2,\ t_2=-2$$

U drugu parametarsku jednadžbu $y=1-2t$ uvrstimo $t=t_1=2$, $t=t_2=-2$:

$$y_1=1-2\cdot 2=-3,\ y_2=1-2\cdot(-2)=5$$

Uzmemo negativno rješenje $y_1=-3$:

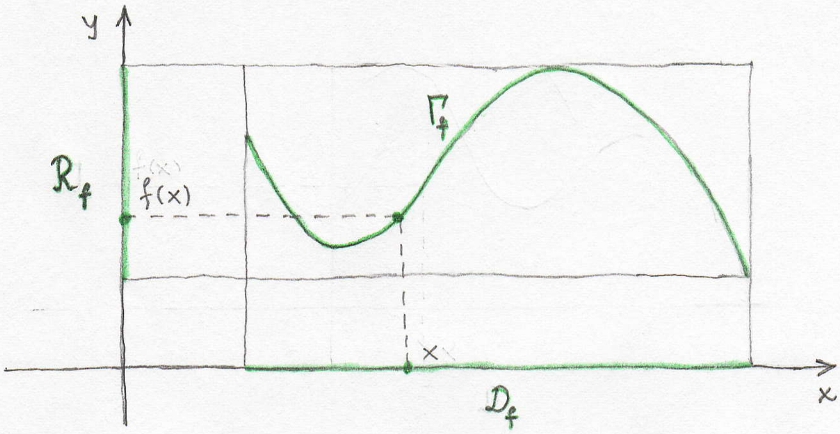
$$y=f(4)=-3$$

$\square$

## 1.3. Područje definicije i područje vrijednosti

Uz realnu funkciju $f$ realne promjenljive $x$ prirodno su vezana dva skupa brojeva. Prvi skup čine svi brojevi $x$ za koje ta funkcija ima smisla, a zove se **područje definicije** ili **domena** funkcije $f$. Kada se svakom broju $x$ iz domene pridruži njegova funkcijska vrijednost $f(x)$ dobiva se drugi skup koji se zove **područje vrijednosti** ili **slika** funkcije $f$.

Domena se označava sa $D_f$ ili $D$, a slika sa $R_f$ ili $R$. Prilikom crtanja grafa funkcije u ravninskom koordinatnom sustavu vrijednosti domene se nanose na apscisu $x$, a vrijednosti slike na ordinatu $y$.




domena, slika i graf funkcije $y=f(x)$

**Primjer 65.** Odredi domenu i sliku funkcije $f(x)=2+\sqrt{1-x}$. Skiciraj graf funkcije pogodnim izborom nekoliko njegovih točaka.

Rješenje. Prvo moramo odrediti domenu. Drugi korijen ima smisla samo za nenegativne vrijednosti. Zato mora biti

$$1-x \geqslant 0,$$

a odatle slijedi

$$x \leqslant 1.$$

Domena je interval koji sadrži broj 1 i sve brojeve manje od 1,

$$D_f = \langle -\infty, 1].$$

Sada možemo odrediti sliku. Za $x$ iz $D_f$, slijedi:

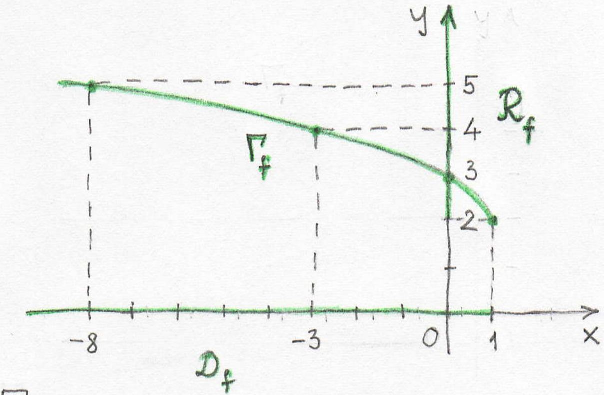
$$\sqrt{1-x} \geq 0$$
$$2+\sqrt{1-x} \geq 2$$
$$f(x) \geq 2$$

Slika je interval koji sadrži broj 2 i sve brojeve veće od 2,

$$R_f = [2, +\infty\rangle.$$

Preostaje još odrediti nekoliko točaka grafa i skicirati graf:

| $x$ | $-8$ | $-3$ | $0$ | $1$ |
|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $5$ | $4$ | $3$ | $2$ |




□

## 1.4. Osnovni pojmovi i oznake

Da bismo što lakše proučili osnovne elementarne funkcije zapisat ćemo neke pojmove i oznake.

$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ skup prirodnih brojeva

$\mathbb{Z} = \{\ldots, -1, 0, 1, \ldots\}$ skup cijelih brojeva

$\mathbb{Q} = \{\frac{k}{l} \mid k, l \in \mathbb{Z}, l \neq 0\}$ skup racionalnih brojeva

$\mathbb{R} = \{$svi decimalni brojevi$\} = \langle -\infty, +\infty\rangle$ skup realnih brojeva

$\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\} = \langle 0, +\infty\rangle$ skup pozitivnih realnih brojeva

$\mathbb{R}^- = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 0\} = \langle -\infty, 0\rangle$ skup negativnih realnih brojeva

$\mathbb{R}_0^+ = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\} = [0, +\infty\rangle$ skup nenegativnih realnih brojeva

$\mathbb{R}_0^- = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 0\} = \langle -\infty, 0]$ skup nepozitivnih realnih brojeva

$y = f(x)$ ili $x \mapsto f(x)$ funkcija $f$ koja $x$-u pridružuje $f(x)$

$y = x$ ili $x \mapsto x$ identična funkcija ili identiteta

$D_f = \{x \mid f(x) \text{ ima smisla}\}$ područje definicije ili domena funkcije $f$

$R_f = \{f(x) \mid x \in D_f\}$ područje vrijednosti ili slika funkcije $f$

$\Gamma_f = \{(x, y) \mid x \in D_f,\ y = f(x)\}$ graf funkcije $f$ u ravnini $xy$ (krivulja $y = f(x)$ u ravnini $xy$)

**Nul-točka** funkcije $f$ je svaki broj $x$ za koji je $f(x) = 0$.

**Spoj** ili **kompoziciju** (složenu od) funkcija $f$ i $g$ predstavljaju funkcije $f \circ g$ i $g \circ f$ određene pravilima:

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) \quad i \quad (g \circ f)(x) = g(f(x)).$$

Funkcija $f$ je **parna** ako je $f(-x) = f(x)$ za svaki $x$ iz $D_f$.

Funkcija $f$ je **neparna** ako je $f(-x) = -f(x)$ za svaki $x$ iz $D_f$.

Funkcija $f$ je **periodična** sa periodom $p > 0$ ako je $f(x+p) = f(x)$, za svaki $x$ i $x+p$ iz $D_f$.
Najmanji period, ako postoji, se zove **osnovni** ili **temeljni period**.

Funkcija $f$ je **rastuća** ili **uzlazna** na nekom području ako za sve $x_1$ i $x_2$ iz tog područja vrijedi implikacija:

$$x_1 < x_2 \implies f(x_1) < f(x_2).$$

Funkcija $f$ je **padajuća** ili **silazna** na nekom području ako za sve $x_1$ i $x_2$ iz tog područja vrijedi implikacija:

$$x_1 < x_2 \implies f(x_1) > f(x_2).$$

Funkcija $f$ je **jednolična** ili **monotona** ako je, ili rastuća ili padajuća.

Funkcija $f$ je **injektivna** na nekom području ako za sve $x_1$ i $x_2$ iz tog područja vrijedi implikacija:

$$x_1 \neq x_2 \implies f(x_1) \neq f(x_2).$$

Za injektivnu funkciju se uvodi pojam **inverzne funkcije** $f^{-1}$ implikacijom :

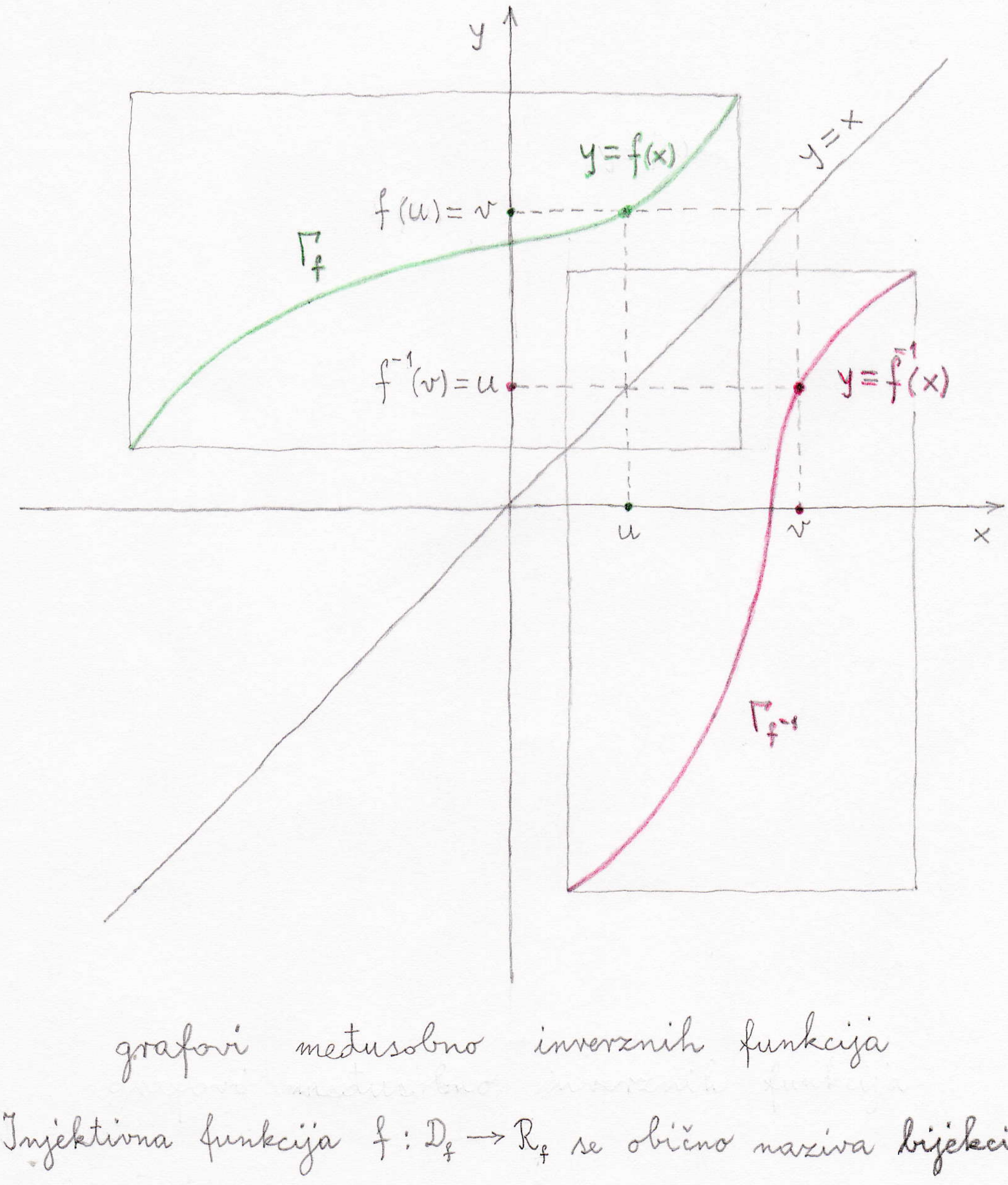
$$f(u) = v \Rightarrow f^{-1}(v) = u.$$

Govoreći obuhvatnije, funkcije $f$ i $f^{-1}$ su međusobno inverzne i vrijede identitete :

$$(f^{-1} \circ f)(u) = u \quad \text{za svaki } u \in D_f = R_{f^{-1}}$$

$$(f \circ f^{-1})(v) = v \quad \text{za svaki } v \in D_{f^{-1}} = R_f$$

Zato su grafovi međusobno inverznih funkcija $y = f(x)$ i $y = f^{-1}(x)$ simetrični u odnosu na graf identitete $y = x$.



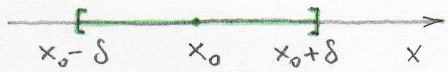

grafovi međusobno inverznih funkcija

Injektivna funkcija $f : D_f \to R_f$ se obično naziva **bijekcijom**.

**Otvoreni** i **zatvoreni** simetrični **interval brojeva** oko broja $x_0$ promjera $2\delta$ $(\delta > 0)$:

$$\langle x_0-\delta,\ x_0+\delta\rangle \qquad\qquad [x_0-\delta,\ x_0+\delta]$$

$$x_0-\delta < x < x_0+\delta \qquad\qquad x_0-\delta \le x \le x_0+\delta$$

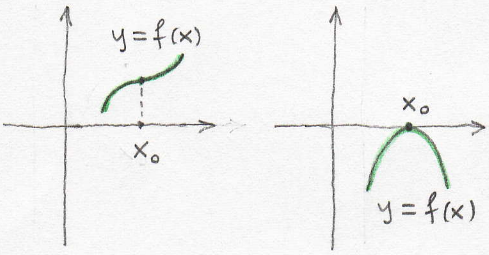




**Okolina broja** $x_0$ je svaki interval brojeva koji sadrži bar jedan simetrični interval oko $x_0$.

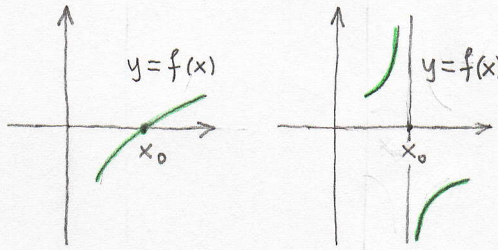

okolina broja $x_0$


nije okolina broja $x_0$

Neka je $f(x) \neq 0$ za sve $x \neq x_0$ iz neke okoline broja $x_0$ ($f(x_0)$ može biti bilo koji broj ili uopće ne mora postojati). Funkcija $f$ **zadržava predznak** u okolini broja $x_0$, ako je njen predznak isti na obje strane broja $x_0$. Funkcija $f$ **mijenja predznak** u okolini broja $x_0$, ako je njen predznak različit na suprotnim stranama broja $x_0$.




$f$ zadržava predznak oko $x_0$




$f$ mijenja predznak oko $x_0$

$x \to x_0-$    $x$ **teži broju** $x_0$ **s lijeve strane** ($x$ poprima vrijednosti malo manje od $x_0$: $x = x_0 - \frac{1}{10^{10}},\ x_0 - \frac{1}{10^{100}},\ x_0 - \frac{1}{10^{1000}}, \dots$)

$x \to x_0+$    $x$ **teži broju** $x_0$ **s desne strane** ($x$ poprima vrijednosti malo veće od $x_0$: $x = x_0 + \frac{1}{10^{10}},\ x_0 + \frac{1}{10^{100}},\ x_0 + \frac{1}{10^{1000}}, \dots$)

$x \to x_0$ — $x$ **teži broju** $x_0$ ($x$ poprima vrijednost $x_0$ ili vrijednosti vrlo blizu $x_0$: $x = x_0 \pm \frac{1}{10^{10}}, x_0 \pm \frac{1}{10^{100}}, x_0 \pm \frac{1}{10^{1000}}, \ldots$)

$x \to +\infty$ — $x$ **neograničeno raste** ($x = 10^{10}, 10^{100}, 10^{1000}, \ldots$)

$x \to -\infty$ — $x$ **neograničeno pada** ($x = -10^{10}, -10^{100}, -10^{1000}, \ldots$)

# 2. Osnovne elementarne funkcije

Devet skupina funkcija nabrojanih u tablici su uvod u "egzaktni jezik" sporazumijevanja kojim najviše "govore" prirodnjaci i inženjeri. Za svaku skupinu funkcija je ponuđen vrlo kratak opis koji je stoga ponegdje nejasan.

| Osnovne elementarne funkcije | | |
|---|---|---|
| naziv | opis | primjer |
| Polinomi | linearne kombinacije potencija baze x sa nenegativnim cjelobrojnim eksponentima | $x \mapsto 3x^5-2x^3+1$ |
| Racionalne funkcije | količnici dvaju polinoma | $x \mapsto \frac{7x^4+3x^2-x}{x^2-5x+2}$ |
| Opće potencije | potencije baze x s realnim eksponentom | $x \mapsto x^{\frac{3}{4}}=\sqrt[4]{x^3}$ |
| Eksponencijalne funkcije | potencije pozitivne realne baze različite od 1 sa eksponentom x | $x \mapsto 5^x$ |
| Logaritamske funkcije | funkcije inverzne eksponencijalnim funkcijama | $x \mapsto \log_5 x$ |
| Hiperbolične funkcije | odnosi između $\frac{1}{2}e^x$ i $\frac{1}{2}e^{-x}$ | $x \mapsto \frac{e^x-e^{-x}}{2}$ |
| Area funkcije | funkcije inverzne hiperboličnim funkcijama | $x \mapsto \ln(x+\sqrt{x^2+1})$ |
| Trigonometrijske funkcije | preslikavanja jedinične kružnice na koordinatne osi | $x \mapsto \sin x$ |
| Arkus funkcije | funkcije inverzne trigonometrijskim funkcijama | $x \mapsto \arcsin x$ |

# 3. Polinomi

## 3.1. Definicija i osnovni nazivi

Polinom je linearna kombinacija nekoliko potencija baze x s nenegativnim cjelobrojnim eksponentima. Određenije, **polinom n-tog stupnja** je funkcija

$$x \mapsto a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0, \; a_n \neq 0.$$

Pribrojnici $a_n x^n$, $a_{n-1} x^{n-1}$, …, $a_1 x$ i $a_0$ su **članovi** polinoma, a brojevi $a_n$, $a_{n-1}$, …, $a_1$ i $a_0$ su **koeficijenti** polinoma. Član $a_n x^n$ je **najstariji član**, a njegov koeficijent $a_n$ je **najstariji koeficijent**. Član $a_0 = a_0 x^0$ je **slobodni član**. Nazivi ostalih članova se određuju prema eksponentu potencije baze x. Tako je $x \mapsto 2x^7 - 4x^5 + 9$ polinom 7. stupnja s najstarijim članom $2x^7$, članom 5. potencije $-4x^5$ i slobodnim članom 9.

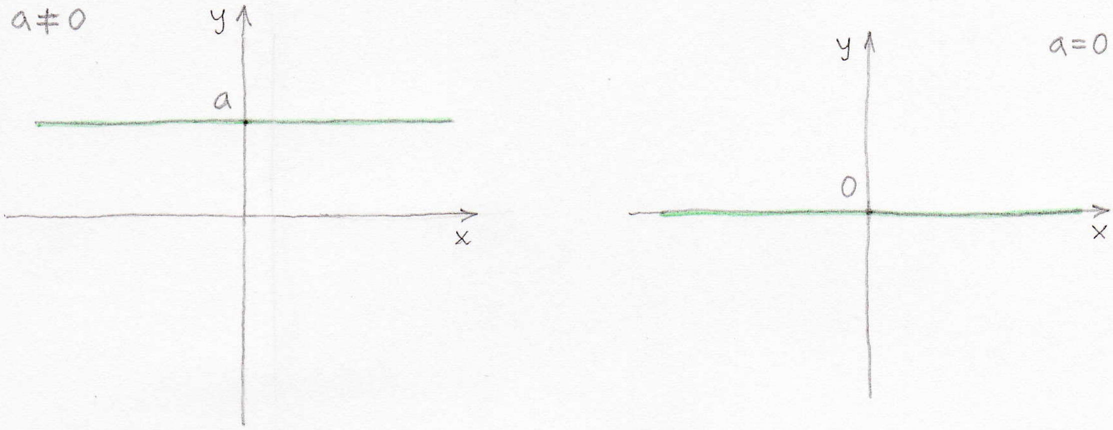
Polinom $f(x) = a_0$ se zove konstanta: za $a_0 \neq 0$ to je polinom 0. stupnja, a za $a_0 = 0$ to je nul-polinom bez stupnja.

Ponašanje polinoma ovisi, u prvom redu o njegovom stupnju, u drugom redu o njegovim koeficijentima. Što je stupanj polinoma veći to je proučavanje polinoma teže. Matematika je u potpunosti "savladala" tek prvih pet polinoma (od nultog do četvrtog stupnja).

## 3.2. Konstantni, linearni i kvadratni polinom

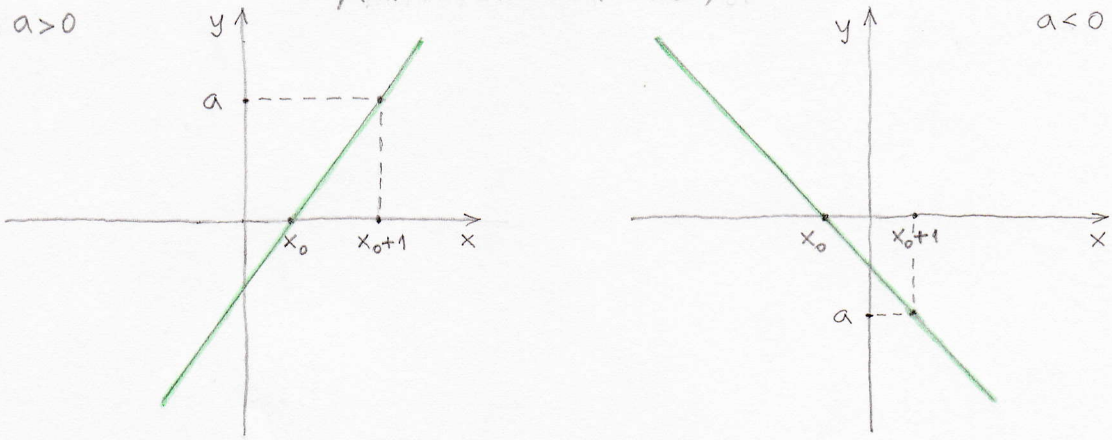
Tri prva i najjednostavnija polinoma je lako proučiti. Između ostalog, ovdje ćemo ponoviti važan postupak upotpunjavanja do kvadrata koji se odnosi na kvadratni polinom.

$f(x)=a$



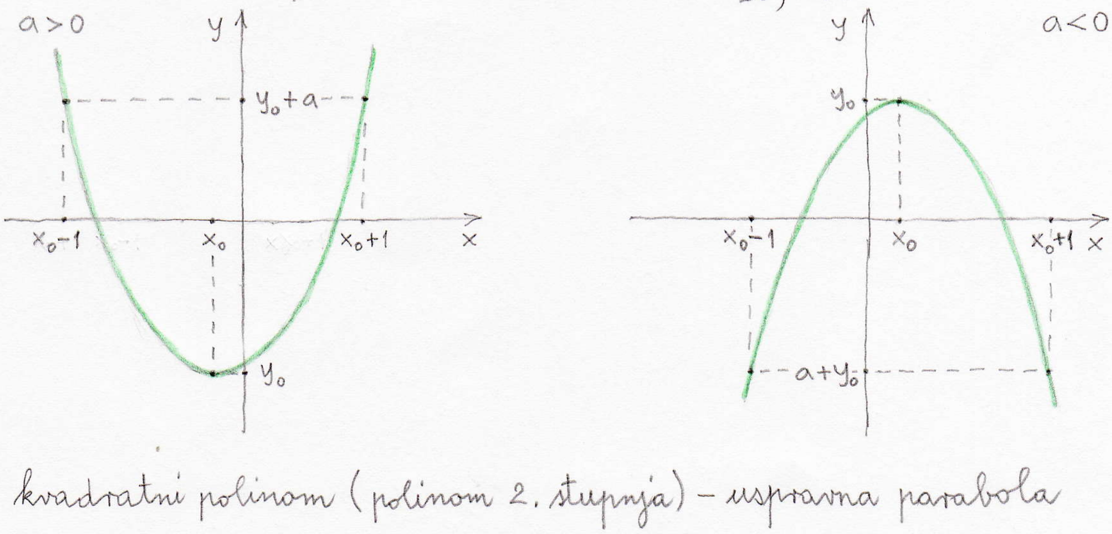

konstanta (polinom 0. stupnja ili nul-polinom) – usporedni pravac

$f(x)=ax+b=a(x-x_0),\ a\neq 0$




linearni polinom (polinom 1. stupnja) – kosi pravac

$f(x)=ax^2+bx+c=a(x-x_0)^2+y_0,\ a\neq 0$




kvadratni polinom (polinom 2. stupnja) – uspravna parabola

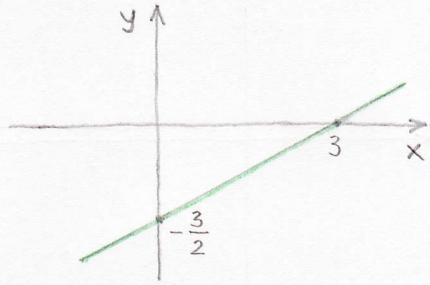
**Primjer 66.** Implicitnu jednadžbu pravca $x-2y-3=0$ svedi na segmentni oblik, a zatim nacrtaj pravac.

Rješenje. Segmentna jednadžba $\frac{x}{m}+\frac{y}{n}=1$ omogućava brzo crtanje pravca pomoću odsječaka $m$ i $n$:

$$x-2y=3\ /:3$$

$$\frac{x}{3}-\frac{2y}{3}=1$$

$$\frac{x}{3}+\frac{y}{-\frac{3}{2}}=1$$



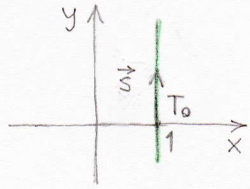

□

**Primjer 67.** Odredi kanonsku jednadžbu pravca $x=1$.

Rješenje. Kanonska jednadžba $\frac{x-x_0}{a}=\frac{y-y_0}{b}$ proizlazi iz koordinata točke $T_0(x_0,y_0)$ i usporednog vektora $\vec{s}=a\vec{i}+b\vec{j}$:

$$T_0(1,0),\ \vec{s}=\vec{j}$$

$$\frac{x-1}{0}=\frac{y}{1}$$




□

**Primjer 68.** Jednadžbu pravca $3x+2y=8$ svedi na kanonski oblik, nacrtaj pravac i odredi njegove parametarske jednadžbe.

Rješenje.

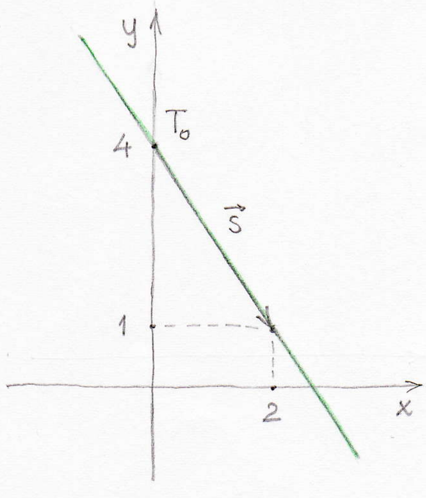
$$3x=8-2y=-2(y-4)\ /:6$$

$$\frac{x}{2}=\frac{y-4}{-3}$$

$$T_0(0,4),\ \vec{s}=2\vec{i}-3\vec{j}$$

Iz $\frac{x}{2}=t$ i $\frac{y-4}{-3}=t$ izlaze parametarske jednadžbe:

$$x=2t,\ y=-3t+4.$$




□

**Primjer 69.** Odredi eksplicitnu jednadžbu pravca čije su parametarske jednadžbe $x=-4t+3$ i $y=8t-5$.

*Rješenje.* Iz prve jednadžbe izrazimo parametar $t$,

$$t=\frac{3-x}{4},$$

pa desnu stranu izraza uvrstimo u drugu jednadžbu:

$$y=8\,\frac{3-x}{4}-5 \quad \text{tj.} \quad y=-2x+1.$$

□

**Primjer 70.** Postupkom upotpunjavanja do kvadrata svedi polinom $f(x)=2x^2-12x+14$ na kanonski oblik $f(x)=a(x-x_0)^2+y_0$ i potom nacrtaj njegov graf.

*Rješenje.* Prvo se izluči koeficijent kvadratnog člana jer nije 1:

$$f(x)=2x^2-12x+14=2\left[x^2-6x+7\right];$$

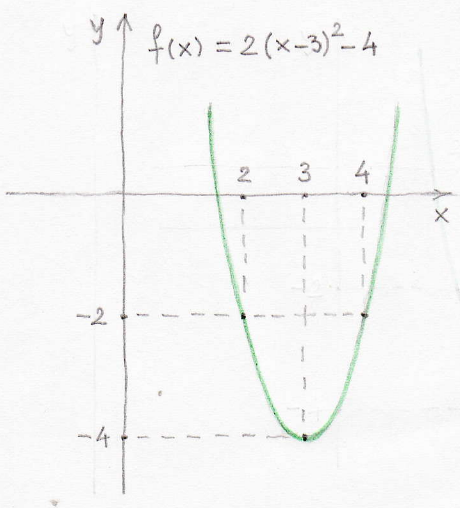
zatim se prepolovi koeficijent linearnog člana u zagradi jer nije 0, doda x-su i stavi na kvadrat, oduzme se kvadrat prepolovljenog koeficijenta:

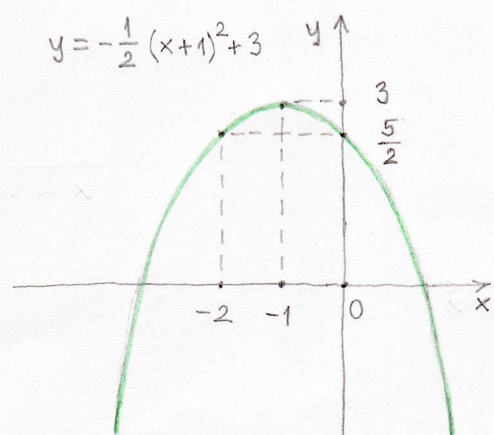
$$=2\left[(x-3)^2-3^2+7\right]=2\left[(x-3)^2-2\right];$$

i na kraju se skloni uglata zagrada:

$$=2(x-3)^2-4.$$

□



**Primjer 71.** Jednadžbu parabole $y=-\frac{1}{2}x^2-x+\frac{5}{2}$ svedi na kanonski oblik, nacrtaj parabolu i odredi njene parametarske jednadžbe.

*Rješenje.* Postupkom upotpunjavanja slijedi kanonska jednadžba:

$$y=-\frac{1}{2}x^2-x+\frac{5}{2}=-\frac{1}{2}\left[x^2+2x-5\right]=$$
$$=-\frac{1}{2}\left[(x+1)^2-1-5\right]=-\frac{1}{2}(x+1)^2+3\,.$$

Zamjenom $x+1=t$ slijede parametarske jednadžbe:

$$x=t-1,\ y=-\frac{1}{2}t^2+3\,.$$

□

**Primjer 72.** Odredi kanonsku jednadžbu parabole čije su parametarske jednadžbe $x=-2t+5$ i $y=4t^2-7$.

*Rješenje.* Iz prve parametarske jednadžbe izrazimo parametar

$$t=\frac{x-5}{-2}$$

i uvrstimo u drugu jednadžbu:

$$y=4\left(\frac{x-5}{-2}\right)^2-7=(x-5)^2-7.$$

□

**Primjer 73.** Riješi kvadratnu jednadžbu $-x^2+4x+5=0$ postupkom upotpunjavanja do kvadrata.

*Rješenje.* $$-x^2+4x+5=-\left[x^2-4x-5\right]=-\left[(x-2)^2-4-5\right]=$$
$$=-\left[(x-2)^2-9\right]=-(x-2)^2+9$$

$$-(x-2)^2+9=0$$
$$(x-2)^2=9$$
$$x-2=\pm 3$$
$$x=2\pm 3$$
$$x_1=5\,,\ x_2=-1$$

□

## 3.3. Ponašanje polinoma u okolini nul-točke

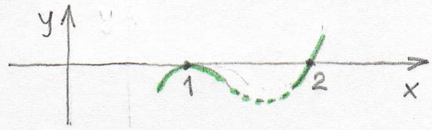
**Primjer 74.** Ocijeni predznake polinoma $f(x)=(x-1)^2(x-2)^3$ u okolini njegovih nul-točaka.

Rješenje.
$$(x-1)^2(x-2)^3=0$$

$(x-1)^2=0 \Rightarrow x-1=0 \Rightarrow x=1$ nul-točka 2. reda

$(x-2)^3=0 \Rightarrow x-2=0 \Rightarrow x=2$ nul-točka 3. reda

| $x$ | 0,9 | **1** | 1,1 | 1,9 | **2** | 2,1 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $-$ | 0 | $-$ | $-$ | 0 | $+$ |




□

Ista tablica i kvalitativno isti graf se dobivaju i za polinom $f(x)=(x-1)^6(x-2)^5$. Iz primjera ovih dvaju polinoma se može izvući koristan zaključak:

U okolini nul-točke parnog reda polinom zadržava predznak (dira os $x$), a u okolini nul-točke neparnog reda polinom mijenja predznak (siječe os $x$).

## 3.4. Ponašanje polinoma u beskonačnosti

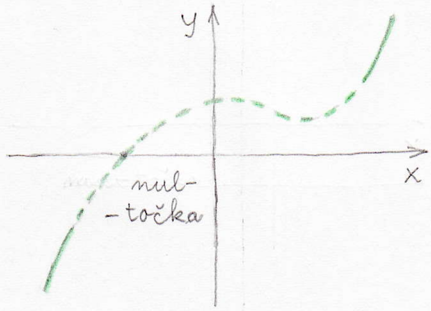
**Primjer 75.** Ocijeni ponašanje polinoma $f(x)=2x^3-5x^2-9$ u beskonačnosti.

Rješenje. Izlučivanjem najstarijeg člana $2x^3$ dobiva se prikaz polinoma
$$f(x)=2x^3\left(1-\frac{5}{2x}-\frac{9}{2x^3}\right).$$

Izraz u zagradi teži broju 1 kad $x$ neograničeno raste ili pada. Prema ovom prikazu polinom se u beskonačnosti ponaša kao njegov najstariji član:

$x \to +\infty \Rightarrow 2x^3 \to +\infty \Rightarrow f(x) \to +\infty$

$x \to -\infty \Rightarrow 2x^3 \to -\infty \Rightarrow f(x) \to -\infty$




□

Jednostavan postupak izlučivanja dovodi do spoznaje:

U beskonačnosti polinom se ponaša poput svog najstarijeg člana.

Dodamo li ovoj spoznaji i predpostavku o neprekinutosti, dolazimo do zaključka da polinom neparnog stupnja ima bar jednu realnu nul-točku (bar na jednom mjestu siječe os x).

## 3.5. Polinom zapisan u obliku umnožka

Kvadratni polinom $ax^2+bx+c$ se može zapisati u obliku umnožka, $ax^2+bx+c = a(x-x_1)(x-x_2)$, samo ako je njegova diskriminanta $b^2-4ac \geq 0$.

Osnovni teorem algebre, u realnom slučaju, kaže da se svaki polinom može predočiti u obliku umnožka polinoma prvog i drugog stupnja. Nesreća je u tome što, za polinome stupnja većeg od četiri, općenito ne znamo kako.

Polinomi zapisani u obliku umnožka linearnih i kvadratnih umnožnika se mogu vrlo zgodno proučiti. To ćemo pokazati u dva naredna primjera.

**Primjer. 76.** Skiciraj kvalitativni graf polinoma $f(x) = \frac{1}{8}(x-1)^3(x-4)^2$ uz pomoć njegovih nul-točaka i njihovih redova te najstarijeg člana.

Rješenje. Ocijenimo ponašanje polinoma $f(x)$ u okolini nul-točaka i u beskonačnosti:

ponašanje u okolini nul-točaka

$x=1$, 3. reda, $f(x)$ siječe os $x$

$x=4$, 2. reda, $f(x)$ dira os $x$

$f(x)$ nigdje više ne siječe niti dira os $x$

ponašanje u beskonačnosti

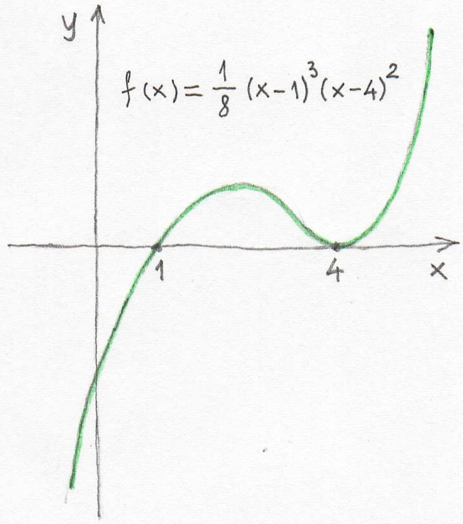
$f(x)=\frac{1}{8}x^5+\dots$

$x\to-\infty \Rightarrow f(x)\to-\infty$

$x\to+\infty \Rightarrow f(x)\to+\infty$

Graf možemo crtati s lijeva u desno ili obrnuto. S lijeva u desno:

- uspinjemo se iz negativne beskonačnosti prema gore jer $f(x)\to-\infty$ kad $x\to-\infty$
- uspnemo se do prve nul-točke $x=1$ pa presiječemo os $x$
- nastavimo do druge nul-točke $x=4$ pa diramo os $x$
- uspinjemo se u pozitivnu beskonačnost jer $f(x)\to+\infty$ kad $x\to+\infty$ □




**Primjer 77.** Skiciraj kvalitativni graf polinoma

$$f(x)=\frac{1}{30}x(x+2)(x-3)^2(x^2+1).$$

Rješenje.

ponašanje u okolini nul-točaka

$x=-2$, 1. reda, $f(x)$ siječe os $x$

$x=0$, 1. reda, $f(x)$ siječe os $x$

$x=3$, 2. reda, $f(x)$ dira os $x$

ponašanje u beskonačnosti

$f(x)=\frac{1}{30}x^6+\dots$

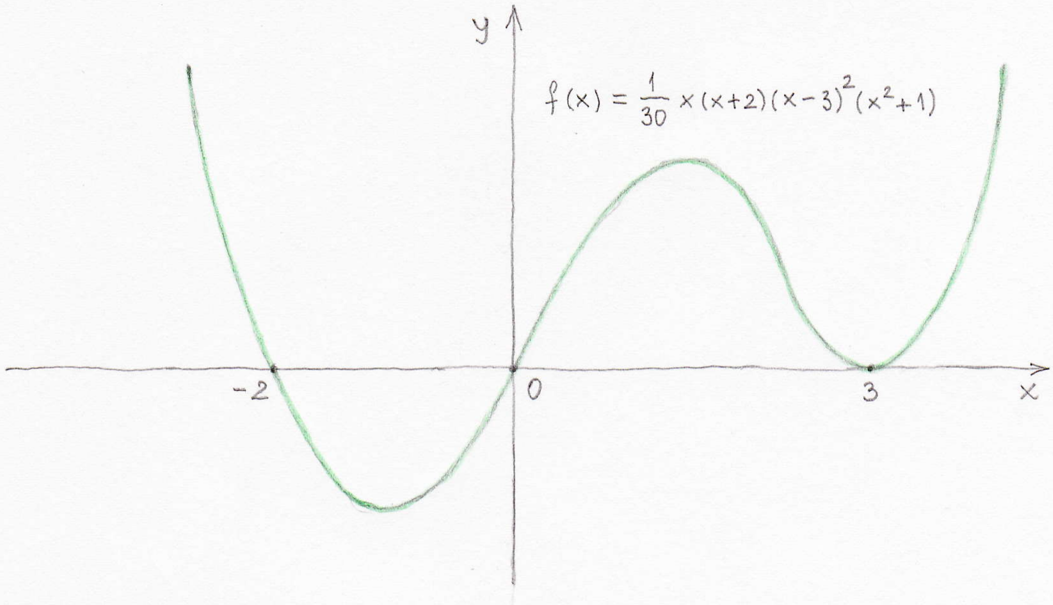
$x\to-\infty \Rightarrow f(x)\to+\infty$

$x\to+\infty \Rightarrow f(x)\to+\infty$

Primjedba. Umnožnik $g(x)=x^2+1$ ne utječe na kvalitativni graf polinoma $f(x)$, ali svakako utječe na njegove vrijednosti.

Crtanje grafa s lijeva u desno:

- spuštamo se iz pozitivne beskonačnosti prema dolje jer $f(x) \to +\infty$ kad $x \to -\infty$
- spustimo se do prve nul-točke $x = -2$ pa presiječemo os $x$
- nastavimo do naredne nul-točke $x = 0$ pa presiječemo os $x$
- stignemo do posljednje nul-točke $x = 3$ pa diramo os $x$
- uspinjemo se u pozitivnu beskonačnost jer $f(x) \to +\infty$ kad $x \to +\infty$




□

# 4. Racionalne funkcije

## 4.1. Racionalna funkcija, prava racionalna funkcija, djelomični razlomak

Racionalna funkcija je količnik (ili kvocijent) dvaju polinoma. Određenije, **racionalna funkcija $n$-tog stupnja u brojniku i $m$-tog stupnja u nazivniku** je funkcija

$$x \mapsto \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0}, \quad a_n \neq 0,\ b_m \neq 0.$$

Ako je stupanj brojnika manji od stupnja nazivnika ($n < m$), govori se o **pravoj racionalnoj funkciji**.

Polinomi su također racionalne funkcije, u ovom kontekstu, **cijele racionalne funkcije**. Racionalna funkcija koja nije ni cijela ni prava se može zapisati kao zbroj polinoma i prave racionalne funkcije.

**Djelomični** ili **parcijalni razlomci** su najjednostavnije prave racionalne funkcije. Dvije su vrste djelomičnih razlomaka:

$$\frac{a_0}{(b_1 x + b_0)^m}\,, \quad a_0 \neq 0,\ b_1 \neq 0,\ m \geq 1$$

i

$$\frac{a_1 x + a_0}{(b_2 x^2 + b_1 x + b_0)^m}\,, \quad a_1^2 + a_0^2 \neq 0,\ b_1^2 - 4b_2 b_0 < 0,\ m \geq 1.$$

Uvjet $b_1^2 - 4b_2 b_0 < 0$ kazuje da je diskriminanta kvadratnog polinoma $b_2 x^2 + b_1 x + b_0$ negativna, odnosno da se taj polinom ne može zapisati u obliku umnožka dvaju linearnih polinoma.

Prava racionalna funkcija koja nije djelomični razlomak se može rastaviti na zbroj djelomičnih razlomaka.

**Primjer 78.** Racionalnu funkciju $f(x) = \dfrac{2x^5 - 3x^4 - 6x + 3}{x^4 + x^2}$ prikaži kao zbroj polinoma i prave racionalne funkcije.

Rješenje. Treba podijeliti brojnik s nazivnikom.

| $x^5$ | $x^4$ | $x^3$ | $x^2$ | $x^1$ | $x^0$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $+2x^5$ | $-3x^4$ | | | $-6x$ | $+3$ |
| $\pm 2x^5$ | | $\pm 2x^3$ | | | |
| | $-3x^4$ | $-2x^3$ | | $-6x$ | $+3$ |
| | $\mp 3x^4$ | | $\mp 3x^2$ | | |
| | | $-2x^3$ | $+3x^2$ | $-6x$ | $+3$ |

$: (x^4 + x^2) = 2x - 3$

$$f(x) = \frac{2x^5 - 3x^4 - 6x + 3}{x^4 + x^2} = 2x - 3 + \frac{-2x^3 + 3x^2 - 6x + 3}{x^4 + x^2}$$

□

**Primjer 79.** Pravu racionalnu funkciju $g(x) = \frac{-2x^3 + 3x^2 - 6x + 3}{x^4 + x^2}$ prikaži kao zbroj djelomičnih razlomaka.

*Rješenje.* Prvo rastavimo nazivnik, na linearne ili kvadratne umnožnike sa negativnom diskriminantom:

$$x^4 + x^2 = x^2(x^2 + 1).$$

Zatim predočimo sve djelomične razlomke:

$$\frac{A}{x^2}, \quad \frac{B}{x}, \quad \frac{Cx + D}{x^2 + 1}$$

gdje su $A, B, C, D$ koeficijenti koje moramo odrediti.

Sada funkciju $g(x)$ prikažemo kao zbroj svih djelomičnih razlomaka, taj prikaz pomnožimo zajedničkim nazivnikom, pa slijedi:

$$\frac{-2x^3 + 3x^2 - 6x + 3}{x^2(x^2 + 1)} = \frac{A}{x^2} + \frac{B}{x} + \frac{Cx + D}{x^2 + 1} \quad / \, x^2(x^2 + 1)$$

$$\begin{aligned} -2x^3 + 3x^2 - 6x + 3 &= A(x^2 + 1) + Bx(x^2 + 1) + (Cx + D)x^2 \\ &= (B + C)x^3 + (A + D)x^2 + Bx + A \end{aligned}$$

Izjednačavanjem koeficijenata, ispred istih potencija $x$-sa, polinoma na desnoj i lijevoj strani nastaje ovaj sustav. Njegova su rješenja: $A = 3, B = -6, C = 4, D = 0$.

$$\begin{cases} \phantom{A} \quad B + C \phantom{+D} = -2 \\ A \phantom{+B+C} + D = 3 \\ \phantom{A} \quad B \phantom{+C+D} = -6 \\ A \phantom{+B+C+D} = 3 \end{cases}$$

Prikaz dobiva svoj određeni oblik:

$$g(x) = \frac{-2x^3 + 3x^2 - 6x + 3}{x^4 + x^2} = \frac{3}{x^2} - \frac{6}{x} + \frac{4x}{x^2 + 1}.$$

□

Iz oba predhodna primjera slijedi

$$\frac{2x^5 - 3x^4 - 6x + 3}{x^4 + x^2} = 2x - 3 + \frac{3}{x^2} - \frac{6}{x} + \frac{4x}{x^2 + 1}.$$

Govoreći općenito, svaka racionalna funkcija koja nije ni cijela ni prava se može rastaviti na zbroj, jednog polinoma i jednog ili više djelomičnih razlomaka.

## 4.2. Ponašanje racionalne funkcije u okolini pola

**Pol** racionalne funkcije je svaka nul-točka polinoma u nazivniku (koja nije istovremeno nul-točka polinoma u brojniku). U tim točkama racionalna funkcija nije definirana. Racionalna funkcija

$$f(x) = \frac{x^2+2x}{x^2-x-6} = \frac{x(x+2)}{(x-3)(x+2)}$$

ima samo jedan pol $x=3$, a izraz $\frac{x}{x-3}$ je njen skraćeni oblik.

**Primjer 80.** Ocijeni ponašanje racionalne funkcije $f(x) = \frac{1}{(x-1)^2(x-4)^3}$ u okolini njenih polova.

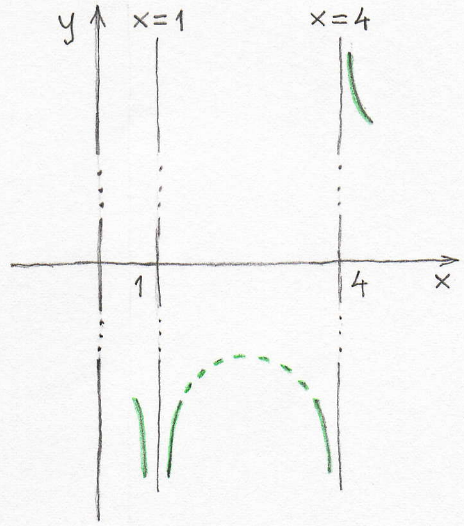
Rješenje.

$$(x-1)^2(x-4)^3 = 0$$

$(x-1)^2 = 0 \Rightarrow x-1=0 \Rightarrow x=1$ pol 2. reda

$(x-4)^3 = 0 \Rightarrow x-4=0 \Rightarrow x=4$ pol 3. reda

| $x$ | 0,99 | 1 | 1,01 | 3,99 | 4 | 4,01 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)\approx$ | −367 | | −374 | −111856 | | 110374 |




Uzmemo li za $x$ vrijednosti koje su još bliže polovima 1 i 4, dobit ćemo još veće apsolutne vrijednosti funkcije $f(x)$. Zato se u polovima povlače **okomite ili vertikalne asimptote**, pravci $x=1$ i $x=4$. □

Slična tablica i kvalitativno isti graf se dobivaju i za racionalnu funkciju $f(x) = \frac{1}{(x-1)^6(x-4)^5}$. Primjeri ovih dviju racionalnih funkcija upućuju na koristan zaključak:

U okolini pola racionalna funkcija neograničeno pada ili raste, pri čemu u okolini pola parnog reda zadržava predznak, a u okolini pola neparnog reda mijenja predznak.

## 4.3. Ponašanje racionalne funkcije u okolini nul-točke i u beskonačnosti

**Nul-točka** racionalne funkcije je svaka nul-točka polinoma u brojniku (koja nije istovremeno nul-točka polinoma u nazivniku). U okolini nul-točke racionalna funkcija se ponaša kao polinom:

U okolini nul-točke parnog reda racionalna funkcija zadržava predznak (dira os x), a u okolini nul-točke neparnog reda racionalna funkcija mijenja predznak (siječe os x).

Usmjerimo pažnju na ponašanje racionalne funkcije

$$f(x) = \frac{-5x^6+7x^3+1}{9x^2-x}$$

u beskonačnosti, tj. na procjenu njenih vrijednosti kad x neograničeno raste ili pada. Izlučimo najstarije članove polinoma u brojniku i nazivniku:

$$f(x) = \frac{-5x^6\left(1-\frac{7}{5x^3}-\frac{1}{5x^6}\right)}{9x^2\left(1-\frac{1}{9x}\right)} = -\frac{5}{9}x^4\,\frac{1-\frac{7}{5x^3}-\frac{1}{5x^6}}{1-\frac{1}{9x}}.$$

Kad x neograničeno raste ili pada "veliki razlomak" na desnoj strani teži broju $1=\frac{1-0-0}{1-0}$, pa ponašanje funkcije $f(x)$ ovisi isključivo o količniku najstarijih članova

$$\frac{-5x^6}{9x^2} = -\frac{5}{9}x^4.$$

Izlučivanjem najstarijih članova, u brojniku i nazivniku racionalne funkcije, se postiže oblik iz kojeg se može zaključiti:

U beskonačnosti racionalna funkcija se ponaša poput količnika najstarijih članova brojnika i nazivnika.

## 4.4. Racionalna funkcija zapisana u obliku umnožka

Proučavanje racionalne funkcije nije teško, ako su njen brojnik i nazivnik predočeni u obliku umnožka linearnih i nerastavljivih kvadratnih umnožnika.

**Primjer 81.** Skiciraj kvalitativni graf racionalne funkcije $f(x)=\frac{(x+2)(x-3)^2}{2(x+4)(x-1)^2}$ uz pomoć njenih nul-točaka i polova te količnika najstarijih članova.

Rješenje. Ocijenimo ponašanje racionalne funkcije $f(x)$ u okolini nul-točaka, u okolini polova i u beskonačnosti:

ponašanje u okolini nul-točaka

$x=-2$, 1. reda, $f(x)$ siječe os $x$

$x=3$, 2. reda, $f(x)$ dira os $x$

ponašanje u okolini polova

$x=1$, 2. reda, $f(x)$ zadržava predznak

$x=-4$, 1. reda, $f(x)$ mijenja predznak

ponašanje u beskonačnosti

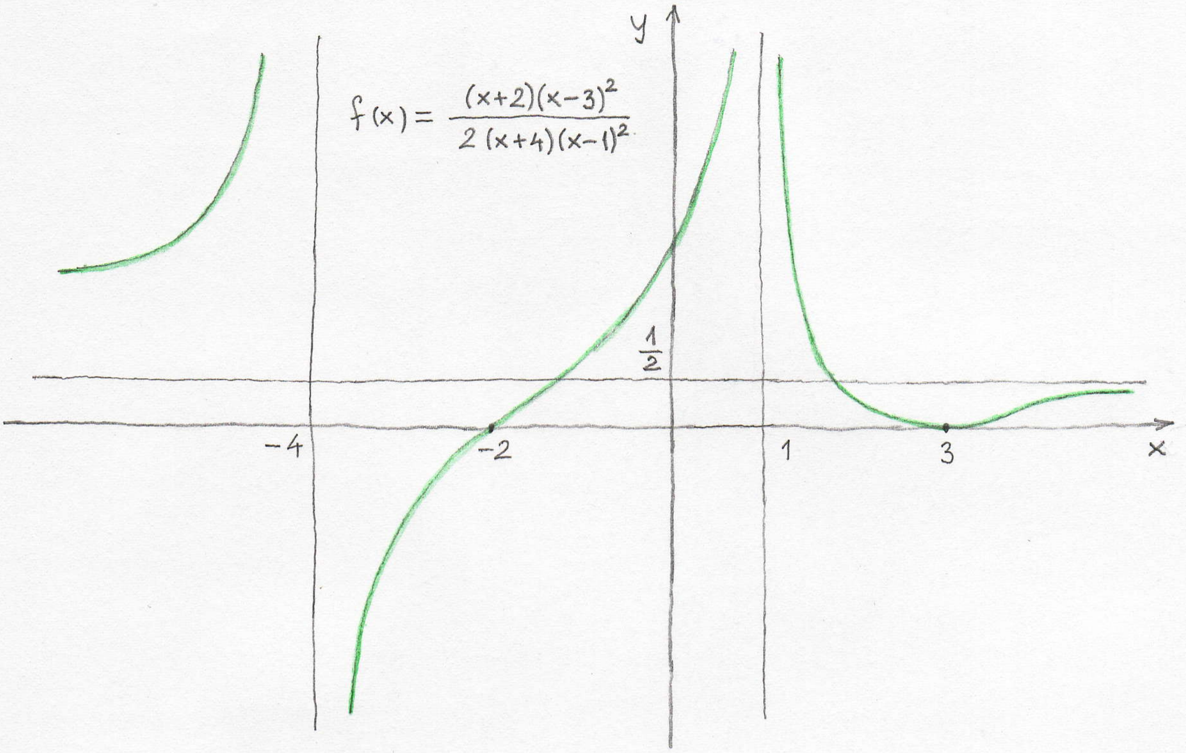
$$f(x)\approx\frac{x^3}{2x^3}=\frac{1}{2}$$

$$x\to\mp\infty \Rightarrow f(x)\to 1$$

(zato je pravac $y=\frac{1}{2}$ **usporedna** ili **horizontalna asimptota**)

Crtanje grafa s lijeva u desno:

- uspinjemo se od usporedne asimptote $y=\frac{1}{2}$ prema gore jer $f(x)\to 1$ kad $x\to-\infty$
- uspnemo se prema okomitoj asimptoti $x=-4$ s lijeve strane pa "padnemo" na desnu stranu
- uspinjemo se do nul-točke $x=-2$ pa presijećemo os $x$
- uspnemo se prema okomitoj asimptoti $x=1$ s lijeve strane pa "preskočimo" na desnu stranu
- spuštamo se do nul-točke $x=3$ pa diramo os $x$
- uspinjemo se prema usporednoj asimptoti $y=\frac{1}{2}$ jer $f(x)\to 1$ kad $x\to+\infty$




Savjet. Za što točnije crtanje grafa je korisno izračunati nekoliko funkcijskih vrijednosti:

$$f(-5) = \frac{8}{3}, \quad f(-3) = -\frac{9}{8}, \quad f(0) = \frac{9}{4}, \quad f(2) = \frac{1}{3}.$$

□

**Primjer 82.** Skiciraj kvalitativni graf funkcije

$$f(x) = \frac{(x+3)^3(x^2+2)(x-1)}{10x^4(x+2)^2(x-3)}.$$

Rješenje.

ponašanje u okolini nul-točaka

$x=-3$, 3. reda, $f(x)$ siječe os x

$x=1$, 1. reda, $f(x)$ siječe os x

$f(x)$ nigdje više ne siječe niti dira os x

ponašanje u okolini polova

$x=-2$, 2. reda, $f(x)$ zadržava predznak

$x=0$, 4. reda, $f(x)$ zadržava predznak

$x=3$, 1. reda $f(x)$ mijenja predznak

ponašanje u beskonačnosti

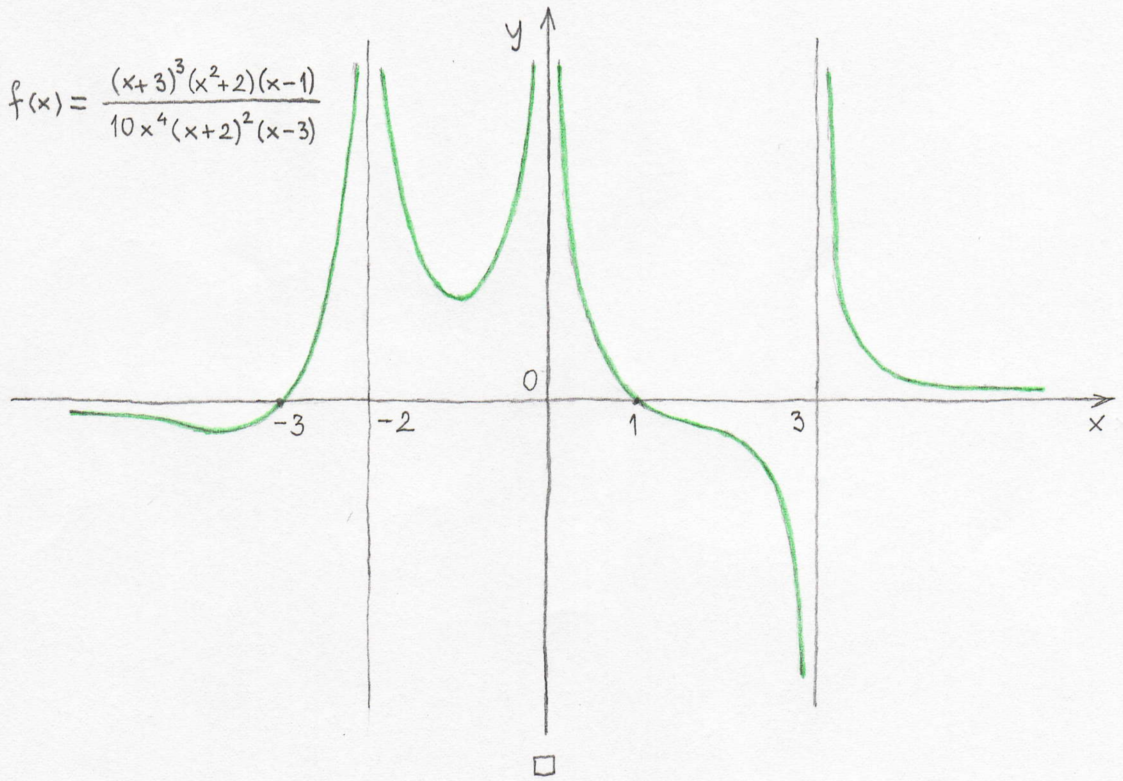
$$f(x) \approx \frac{x^6}{10x^7} = \frac{1}{10x}$$

$$x \to -\infty \Rightarrow f(x) \to 0-, \quad x \to +\infty \Rightarrow f(x) \to 0+$$

(pravac $y=0$ je usporedna asimptota)

Crtanje grafa s lijeva u desno:

- spuštamo se od usporedne asimptote $y=0$ prema dolje jer $f(x) \to 0-$ kad $x \to -\infty$
- zavijemo prema gore do nul-točke $x=-3$ pa presiječemo os $x$
- uspnemo se prema okomitoj asimptoti $x=-2$ s lijeve strane pa "preskočimo" na desnu stranu
- spuštamo se dolje pri čemu ostajemo iznad osi $x$
- zavijemo prema gore do okomite asimptote $x=0$ s lijeve strane pa "preskočimo" na desnu stranu
- spuštamo se do nul-točke $x=1$ pa presiječemo os $x$
- spustimo se prema okomitoj asimptoti $x=3$ s lijeve strane pa "naskočimo" na desnu stranu
- spuštamo se prema usporednoj asimptoti $y=0$ jer $f(x) \to 0+$ kad $x \to +\infty$




□

Završimo lekciju upozorenjem, jedinim upozorenjem ove vrste u cijelom udžbeniku:

> Nije moguće proniknuti u osnove matematičke analize bez dobrog razumijevanja polinoma i racionalnih funkcija. Zato se mole studenti koji su površno prešli zadnje dvije lekcije da se bar još jednom na njih vrate.

# 5. Opće potencije

## 5.1. Definicija i poteškoće

Opće potencije su potencije baze $x$ s bilo kojim realnim eksponentom. Određenije, **potencija s eksponentom a** je funkcija

$$x \mapsto x^a.$$

Potenciranje s eksponentom $a$ se može označavati i sa $\exp^a$, tj.

$$\exp^a x = x^a.$$

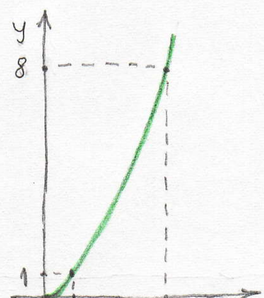
Ako je eksponent $a = \frac{m}{n}$ racionalan broj (predpostavlja se da su $m$ i $n$ relativno prosti i da je $n > 0$), tada izraz $x^{\frac{m}{n}}$ zamišljamo kao $\sqrt[n]{x^m}$ ili $(\sqrt[n]{x})^m$.

Ako eksponent $a$ nije racionalan broj, recimo $a = \sqrt{2}$, kako onda zamišljati izraz $x^{\sqrt{2}}$? Možemo se zadovoljiti približnom procjenom: umjesto $\sqrt{2}$ zamislimo neku približnu racionalnu vrijednost, $\frac{7}{5} \approx \sqrt{2}$, pa valjda je $x^{\sqrt{2}} \approx x^{\frac{7}{5}} = \sqrt[5]{x^7}$. Na svu sreću, danas i najslabije računalo, npr. za $3^{\sqrt{2}}$ izbaci približnu vrijednost 4,72880438784 točnu u svim decimalama.

## 5.2. Promjenljivo područje definicije

U tri sljedeća primjera ćemo pokušati proučiti bit ponašanja općih potencija.

**Primjer 83.** Odredi područje definicije potencije $f(x) = x^{\frac{3}{2}}$ i uz pomoć pogodne tablice skiciraj njen graf.




Rješenje. $f(x) = x^{\frac{3}{2}} = \sqrt{x^3} = (\sqrt{x})^3$

$$\mathcal{D} = [0, +\infty\rangle$$

| $x$ | 0 | 1 | 4 |
|---|---|---|---|
| $f(x)$ | 0 | 1 | 8 |

□

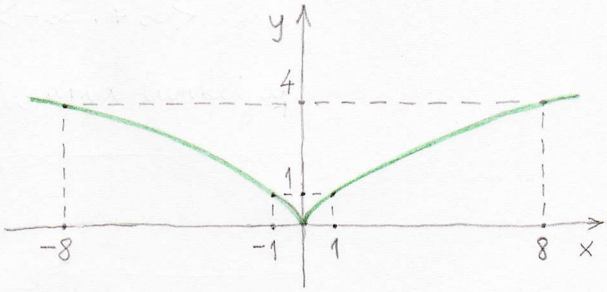
**Primjer 84.** Odredi područje definicije potencije $f(x) = x^{\frac{2}{3}}$, njenu parnost, a uz pomoć pogodne tablice skiciraj graf.

Rješenje. $f(x) = x^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{x^2} = (\sqrt[3]{x})^2$

$\mathcal{D} = \mathbb{R} = \langle -\infty, +\infty \rangle$

$f(-x) = f(x)$ parna funkcija

| $x$ | $-8$ | $-1$ | $0$ | $1$ | $8$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $4$ | $1$ | $0$ | $1$ | $4$ |




□

**Primjer 85.** Prouči potenciju $f(x) = x^{-\frac{1}{3}}$.

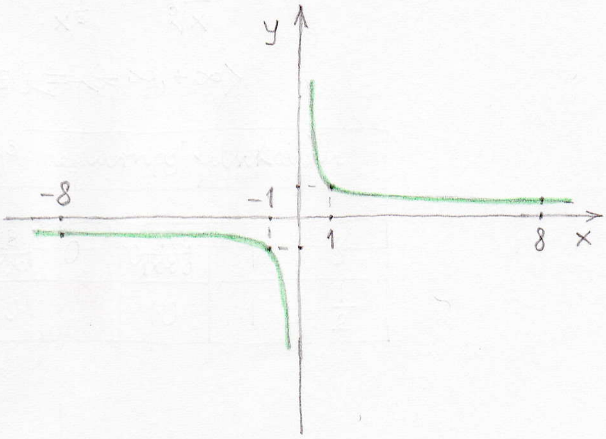
Rješenje.

$f(x) = x^{-\frac{1}{3}} = \frac{1}{x^{\frac{1}{3}}} = \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$

$\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{0\} = \langle -\infty, 0 \rangle \cup \langle 0, +\infty \rangle$

$f(-x) = -f(x)$ neparna funkcija

| $x$ | $-8$ | $-1$ | $-\frac{1}{1000}$ | $0$ | $\frac{1}{1000}$ | $1$ | $8$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $-\frac{1}{2}$ | $-1$ | $-10$ | | $10$ | $1$ | $\frac{1}{2}$ |




□

# 6. Eksponencijalne funkcije

## 6.1. Definicija

Eksponencijalne funkcije su potencije s eksponentom $x$. Određenije, **potencija s bazom $a$** je funkcija

$$x \mapsto a^x, \quad a > 0, \ a \neq 1.$$

Potenciranje s bazom $a$ se označava i s $\exp_a$, tj.

$$\exp_a x = a^x.$$

Za bazu a se mora uzeti pozitivan broj jer u protivnom izraz $a^x$ nema smisla već za $x = \frac{1}{2}$ ili za $x = -\frac{1}{2}$. Slučaj $a=1$ se izostavlja jer je $1^x = 1$ konstanta, po svojoj prirodi, funkcija potpuno različita od eksponencijalnih funkcija.

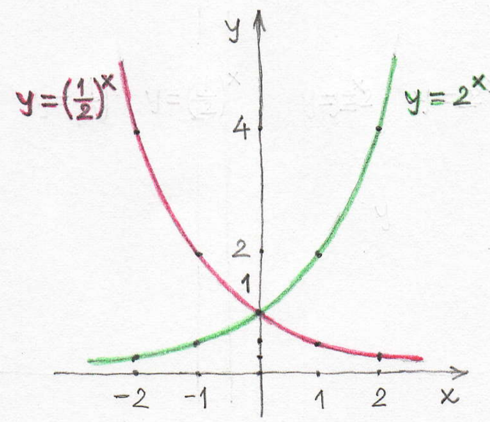
Opće eksponencijalne funkcije, $x \mapsto Aa^x$, su pogodne za opisivanje pojava koje se iznimno brzo mijenjaju. Za pojave koje se vrlo brzo povećavaju odabire se baza $a>1$, a za pojave koje se vrlo brzo smanjuju odabire se baza $a<1$.

## 6.2. Rastuća ili padajuća injektivna funkcija

**Primjer 86.** Uz pomoć pogodne tablice skiciraj grafove eksponencijalnih funkcija $y = \exp_2 x = 2^x$ i $y = \exp_{\frac{1}{2}} x = \left(\frac{1}{2}\right)^x$.

Rješenje.

| $x$ | $-2$ | $-1$ | $0$ | $1$ | $2$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $2^x = \frac{1}{2^{-x}}$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{2}$ | $1$ | $2$ | $4$ |
| $\frac{1}{2^x} = 2^{-x}$ | $4$ | $2$ | $1$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{4}$ |




□

Ako je baza $a>1$, funkcija $y=a^x$ raste na cijelom realnom području: sporo na negativnom, a brzo na pozitivnom području i to sve brže i brže što se više udaljavamo od ishodišta na desnu stranu. Ako je baza $a<1$, funkcija $y=a^x$ pada na cijelom realnom području: sporo na pozitivnom, a brzo na negativnom području i to sve brže i brže što se više udaljavamo od ishodišta na lijevu stranu.

Od eksponencijalnih se funkcija posebno izdvajaju dvije funkcije. Prva, zbog baze 10 važećeg brojevnog sustava, a druga, zbog velike važnosti Eulerovog broja $e \approx 2{,}7$. To su

$$\text{dekadska: } \exp_{10} x = \exp x = 10^x$$

i

$$\text{prirodna: } \exp_e x = \mathrm{en}\, x = e^x$$

eksponencijalna funkcija.

Neovisno o bazi, sve su eksponencijalne funkcije injektivne. Domena im je čitav skup realnih brojeva, a slika skup pozitivnih realnih brojeva, tj.

$$\exp_a : \langle -\infty, +\infty \rangle \to \langle 0, +\infty \rangle .$$

U narednoj lekciji slijedi uvođenje inverznih logaritamskih funkcija.

# 7. Logaritamske funkcije

## 7.1. Definicija

Logaritamske su funkcije inverzne za eksponencijalne funkcije. Tako je operacija logaritmiranja $\log_a$ s bazom $a$ inverzna operaciji potenciranja $\exp_a$ s bazom $a$. Dakle, **logaritam s bazom a** je funkcija

$$\log_a x = \exp_a^{-1} x \quad , \; a > 0, \; a \neq 1 .$$

Ako je $\exp_a u = a^u = v$, tada je $\log_a v = u$ pa se logaritam s bazom $a$ pozitivnog broja $v$ može tumačiti kao eksponent $u$ za koji je $a^u = v$. Na primjer:

$$\log_2 8 = 3 \quad \text{jer je } 2^3 = 8$$

$$\log_5 1 = 0 \quad \text{jer je } 5^0 = 1$$

$$\log_{\frac{1}{4}} 16 = -2 \quad \text{jer je } \left(\tfrac{1}{4}\right)^{-2} = 16$$

Budući da

$$\log_a = \exp_a^{-1} : \langle 0, +\infty\rangle \to \langle -\infty, +\infty\rangle$$

domena logaritamskih funkcija je skup pozitivnih realnih brojeva, a slika čitav skup realnih brojeva.

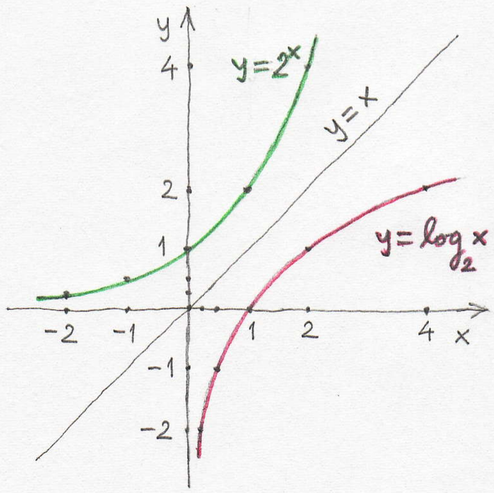
## 7.2. Funkcije sporog rasta ili pada

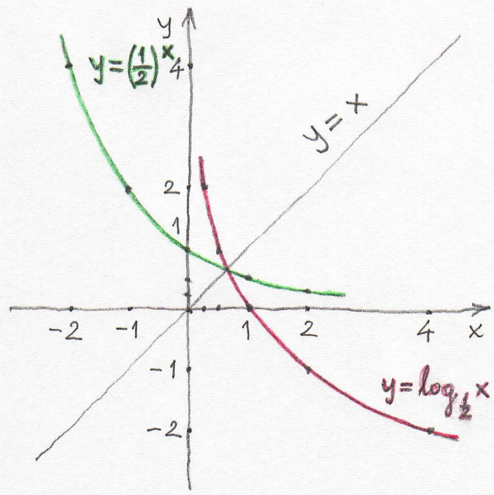
**Primjer 87.** Skiciraj grafove logaritamskih funkcija $y = \log_2 x$ i $y = \log_{\frac{1}{2}} x$.

Rješenje. Graf funkcije $y = \log_2 x$ je simetričan grafu funkcije $y = \exp_2 x$ u odnosu na simetralu $y = x$. U istom su međusobnom položaju grafovi funkcija $y = \log_{\frac{1}{2}} x$ i $y = \exp_{\frac{1}{2}} x$.

| $u$ | $-2$ | $-1$ | $0$ | $1$ | $2$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $v = 2^u$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{2}$ | $1$ | $2$ | $4$ |
| $\log_2 v$ | $-2$ | $-1$ | $0$ | $1$ | $2$ |

| $u$ | $-2$ | $-1$ | $0$ | $1$ | $2$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $v = \frac{1}{2^u}$ | $4$ | $2$ | $1$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{4}$ |
| $\log_{\frac{1}{2}} v$ | $-2$ | $-1$ | $0$ | $1$ | $2$ |




□

Ako je baza $a > 1$, funkcija $y = \log_a x$ raste na cijelom pozitivnom području i to sve sporije i sporije što se više udaljavamo od ishodišta. Ako je baza $a<1$, funkcija $y=\log_a x$ pada na cijelom pozitivnom području i to sve sporije i sporije što se više udaljavamo od ishodišta.

Kao i kod eksponencijalnih funkcija posebno se izdvajaju dvije logaritamske funkcije,

$$\text{dekadska: } \log_{10} x = \log x$$

i

$$\text{prirodna: } \log_e x = \ln x$$

logaritamska funkcija.

## 7.3. Prikladna računska svojstva

Za logaritme vrijede računska pravila:

(1) $\log_a (x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$ za $x>0$ i $y>0$

(2) $\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$ za $x>0$ i $y>0$

(3) $\log_a x^y = y \log_a x$ za $x>0$

(4) $\log_b x = \dfrac{\log_a x}{\log_a b}$ za $x>0$

Sva se pravila mogu izvesti iz dviju osnovnih formula:

$$x = (\exp_a \circ \log_a)(x) = a^{\log_a x} \quad \text{za } x>0$$

$$x = (\log_a \circ \exp_a)(x) = \log_a a^x \quad \text{za sve } x$$

Logaritmi su zbog svojih računskih svojstava (množenje svode na zbrajanje, dijeljenje na oduzimanje, potenciranje na množenje, svi se mogu izraziti pomoću jedne baze) bili pogodni za izradu logaritamskih tablica koje su olakšavale računanje. Te su tablice, s dekadskim ili prirodnim logaritmima, bile svojevrsno knjiško računalo sve do pojave elektroničkog računala. Izrada logaritamskih tablica je predstavljala mukotrpan posao. Prve logaritamske tablice su se pojavile početkom 17. stoljeća, a prve bez pogrješke polovinom 19. stoljeća.

## 8. Hiperbolične funkcije

### 8.1. Definicija

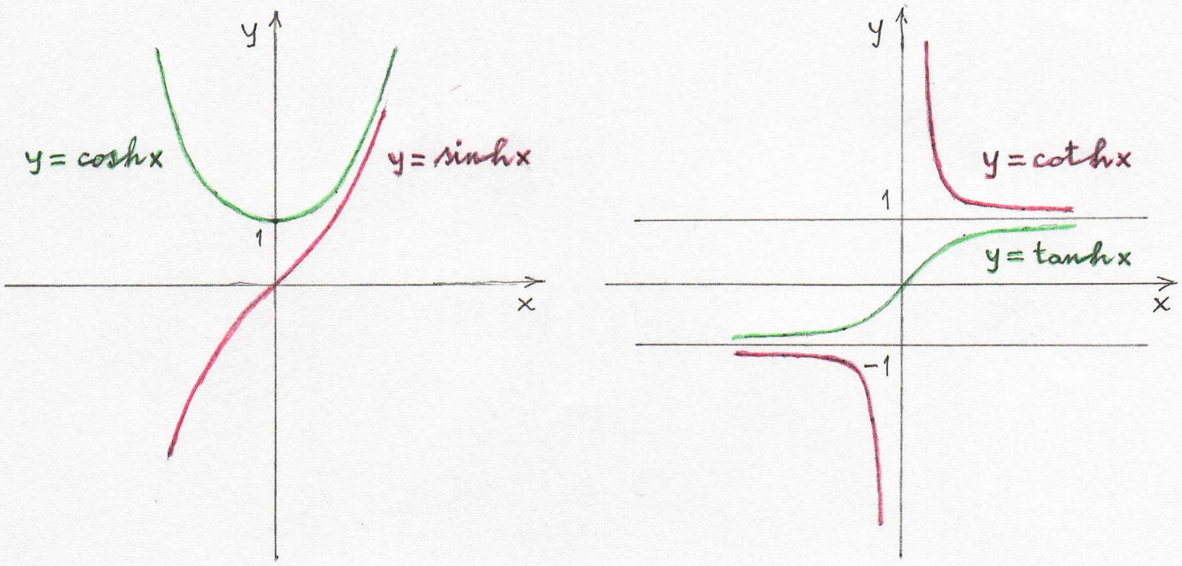
Hiperbolične funkcije su određene funkcijama $\frac{1}{2}e^x$ i $\frac{1}{2}e^{-x}$:

**sinus hiperbolični**: $\operatorname{sinh} x = \frac{1}{2}\left(e^x - e^{-x}\right)$

**kosinus hiperbolični**: $\operatorname{cosh} x = \frac{1}{2}\left(e^x + e^{-x}\right)$

**tangens hiperbolični**: $\operatorname{tanh} x = \frac{\operatorname{sinh} x}{\operatorname{cosh} x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$

**kotangens hiperbolični**: $\operatorname{coth} x = \frac{\operatorname{cosh} x}{\operatorname{sinh} x} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$




grafovi hiperboličnih funkcija

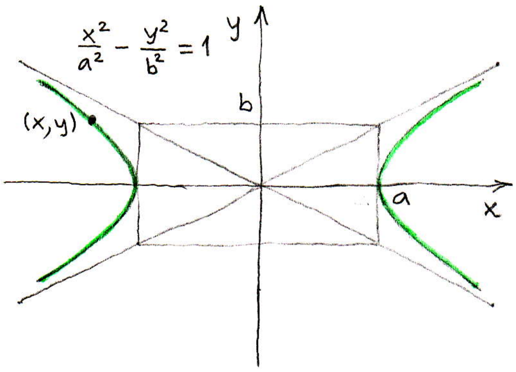
Sinus, tangens i kotangens hiperbolični su neparne injektivne funkcije. Kosinus hiperbolični je parna funkcija i nosi još naziv lančanica zbog jedne zanimljive činjenice. Lanac, općenito gibka i teška nerastezljiva nit, ovješen o dvije vodoravne točke opisuje graf kosinusa hiperboličnog $y = a\cosh\frac{x}{a}$.

## 8.2. Parametarske jednadžbe hiperbole

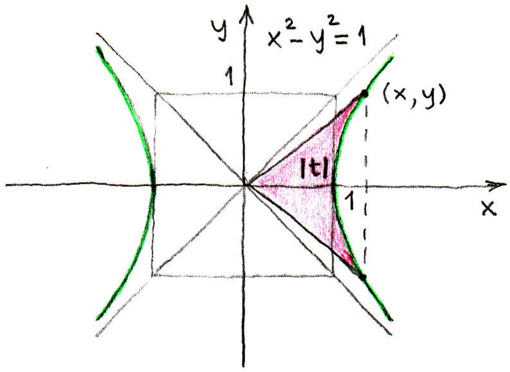
Sam naziv, hiperbolične funkcije, upućuje na njihovu vezu sa hiperbolom. Izdvojimo bilo koju točku $(x, y)$ hiperbole s kanonskom jednadžbom $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$. Tada postoji točno jedan broj $t$ za koji je $y = b\sinh t$ (pomažući se grafom sinusa hiperboličnog $t$ je apscisa točke grafa sa ordinatom $\frac{y}{b}$). Uvrstimo li u jednadžbu hiperbole $b\sinh t$ umjesto $y$, uz pomoć relacije (1) iz Podlekcije 8.3, dobivamo $x = \pm a\cosh t$ (+ za desnu granu hiperbole, a − za lijevu).

Ako sada zamislimo da točka $(x, y)$ prijeđe cijelu jednu granu hiperbole, tada pomoćna promjenljiva $t$ prijeđe čitav skup realnih brojeva. Tako smo izveli parametarske jednadžbe hiperbole s parametrom $t$:

$$x = \pm a\cosh t, \quad y = b\sinh t, \quad t \in \mathbb{R}.$$




hiperbola




jedinična hiperbola

Parametar $t$ ima svoje geometrijsko značenje. Može se dokazati, ali tek uz pomoć integralnog računa, da je apsolutna vrijednost parametra $t$ jednaka površini "hiperboličnog trokuta" na slici. Zbog te činjenice inverzne funkcije ($y = \sinh t \Leftrightarrow t = \sinh^{-1} y$) nose naziv area funkcije (lat area = hrv. površina).

### 8.3. Osnovne relacije

Za hiperbolične funkcije vrijede relacije slične trigonometrijskim relacijama. Navest ćemo samo nekoliko relacija o sinusu i kosinusu hiperboličnom:

(1) $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$

(2) $\cosh x \pm \sinh x = e^{\pm x}$

(3) $\sinh(x \pm y) = \sinh x \cdot \cosh y \pm \cosh x \cdot \sinh y$

(4) $\cosh(x \pm y) = \cosh x \cdot \cosh y \pm \sinh x \cdot \sinh y$

Izvod relacije (1):

$$\begin{aligned}\cosh^2 x - \sinh^2 x &= \frac{1}{4}\left[(e^x + e^{-x})^2 - (e^x - e^{-x})^2\right] = \\ &= \frac{1}{4}\left[2e^{-x} \cdot 2e^x\right] = \\ &= 1\end{aligned}$$

## 9. Area funkcije

### 9.1. Definicija

Sve hiperbolične funkcije, osim kosinusa, su injektivne. Kosinus hiperbolični se rastavlja na dva injektivna dijela: $\cosh^+ x$ za $x \geq 0$ i $\cosh^- x$ za $x \leq 0$.

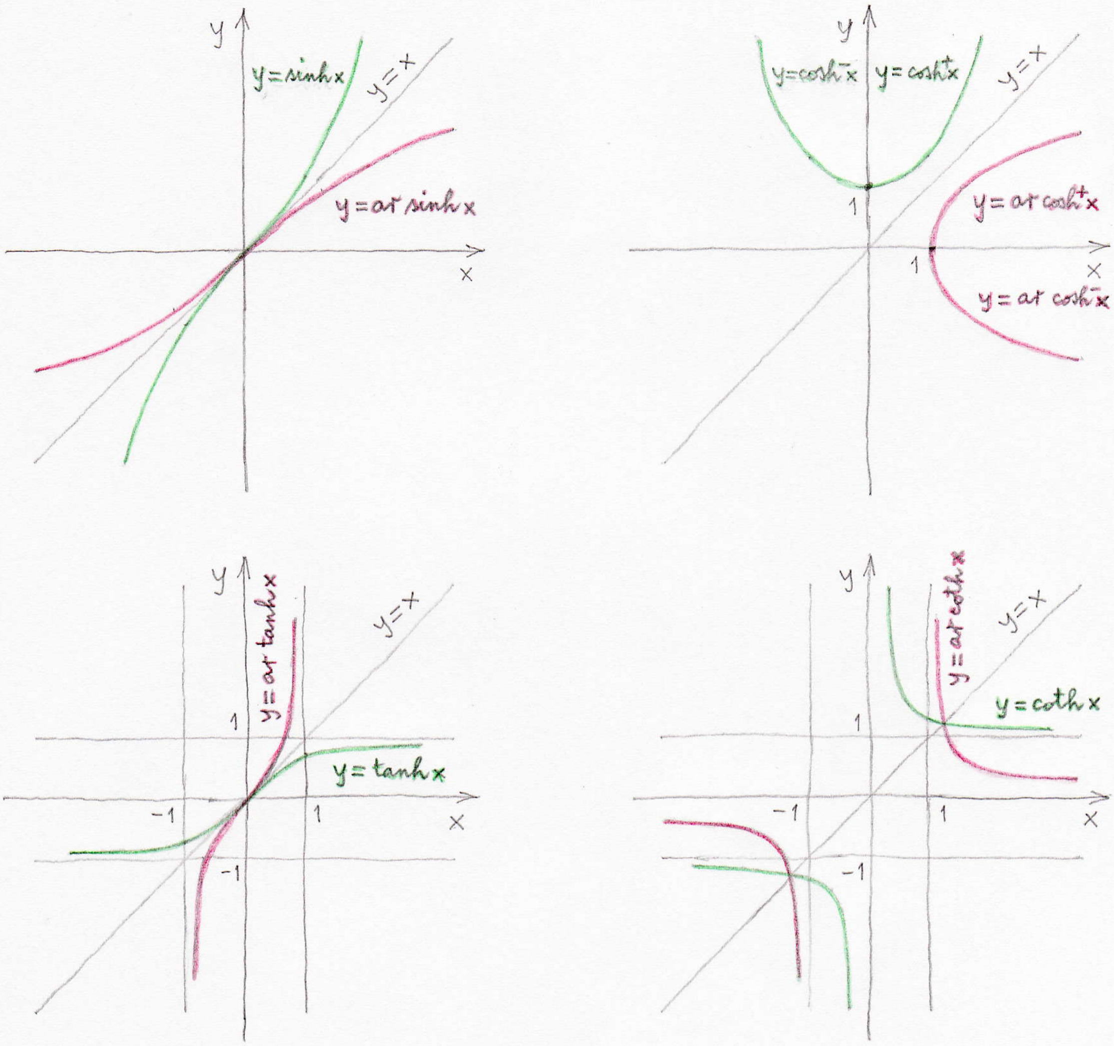
Area funkcije su inverzne za hiperbolične funkcije:

**area sinus hiperbolični**: $\quad \operatorname{ar}\sinh x = \sinh^{-1} x$

**area kosinusi hiperbolični**: $\quad \operatorname{ar}\cosh^{\pm} x = \cosh^{\pm -1} x$

**area tangens hiperbolični**: $\quad \operatorname{ar}\tanh x = \tanh^{-1} x$

**area kotangens hiperbolični**: $\quad \operatorname{ar}\coth x = \coth^{-1} x$




grafovi area funkcija

## 9.2. Veza s prirodnim logaritmom

Sve area funkcije se mogu izraziti pomoću prirodnog logaritma:

(1) $\operatorname{ar\,sinh} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$ , $x \in \mathbb{R}$

(2) $\operatorname{ar\,cosh}^{\pm} x = \pm \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right)$ , $x \geq 1$

(3) $\operatorname{ar\,tanh} x = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}$ , $|x| < 1$

(4) $\operatorname{ar\,coth} x = \frac{1}{2} \ln \frac{x+1}{x-1}$ , $|x| > 1$

Izvod formule (3) :

$$y = \operatorname{ar\,tanh} x$$

$$x = \tanh y = \frac{e^y - e^{-y}}{e^y + e^{-y}} = \frac{e^{2y}-1}{e^{2y}+1} \Big/ \cdot (e^{2y}+1)$$

$$x\,(e^{2y}+1) = e^{2y} - 1$$

$$e^{2y} = \frac{1+x}{1-x} \;\Big/ \ln$$

$$y = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}$$

# 10. Trigonometrijske funkcije

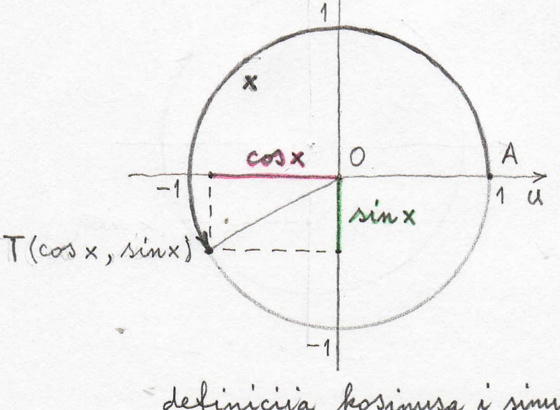
## 10.1. Definicija

Trigonometrijske funkcije su se razvile iz mjerenja trokuta (grč. trigonon = hrv. trokut i grč. metron = hrv. mjera). Danas se trigonometrijske funkcije (**sinus**, **kosinus**, **tangens** i **kotangens**) definiraju kao preslikavanja točaka jedinične kružnice na koordinatne osi.

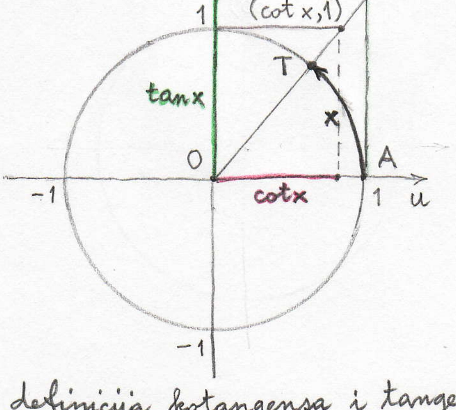
Neka je T točka jedinične kružnice (u čijem je središtu ishodište nekog koordinatnog sustava). Točki T se prvo pridruži duljina x pozitivno orijentiranog kružnog luka od A do T (x je mjera pozitivno orijentiranog kuta AOT u radijanima). Zatim se definira

$$\cos x = \text{apscisa točke } T \quad i \quad \sin x = \text{ordinata točke } T.$$

Time su definirani $\cos x$ i $\sin x$ za $0 \le x \le 2\pi$ (opseg jedinične kružnice je $2\pi$). Ove se definicije periodično prošire na čitav skup realnih brojeva pa se dobiju realne funkcije $y = \sin x$ i $y = \cos x$.



definicija kosinusa i sinusa



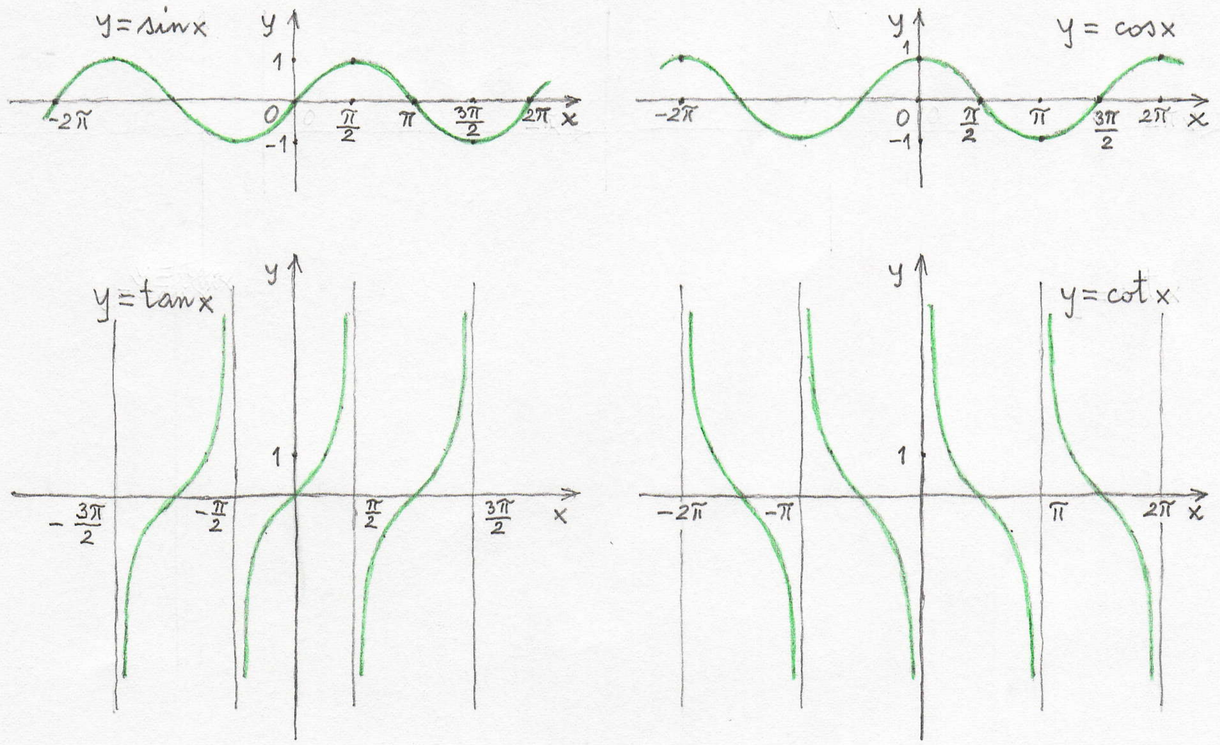
definicija kotangensa i tangensa

Prema slici, $\cot x$ prvo definiramo za $0 < x < \pi$, a zatim periodično proširimo na čitav $\mathbb{R}$ (pa imamo funkciju $y=\cot x$). Za potrebe definicije tangensa, točkama T iz četvrtog kvadranta pridružimo negativno orijentirane kružne lukove, odnosno negativne duljine $x$. Prema slici, $\tan x$ prvo definiramo za $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$, a potom periodično proširimo na čitav $\mathbb{R}$ pa dobijemo funkciju $y = \tan x$.

Tangens i kotangens se mogu definirati pomoću sinusa i kosinusa:

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}, \quad \cot x = \frac{\cos x}{\sin x} .$$

Trigonometrijske funkcije ($y = \sin x$ itd.) kružnom luku duljine $x$ pridružuju broj $y$. Zato inverzne funkcije ($x = \sin^{-1} y$ itd.) nose naziv arkus funkcije (lat. arcus = hrv. luk).




grafovi trigonometrijskih funkcija

Trigonometrijske funkcije su periodične po definiciji. Osnovni period sinusa i kosinusa je $2\pi$, a tangensa i kotangensa $\pi$. Kosinus je parna, dok su ostale tri funkcije neparne.

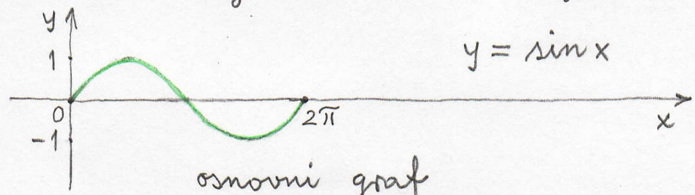
Vrlo veliku primjenu imaju opće trigonometrijske funkcije $y = a\sin(bx + c)$ itd. Tim se periodičnim funkcijama (osnovni period općeg sinusa i kosinusa je $\frac{2\pi}{|b|}$, a općeg tangensa i kotangensa $\frac{\pi}{|b|}$) mogu opisati različite periodične pojave. Izborom amplitude $a$ i frekvencije $b$ opći sinus i kosinus se mogu prilagoditi vrlo finim titranjima.

**Primjer 88.** Nacrtaj graf općeg sinusa $y = 4\sin(2x - 6)$.

Rješenje. Iz kanonskog prikaza

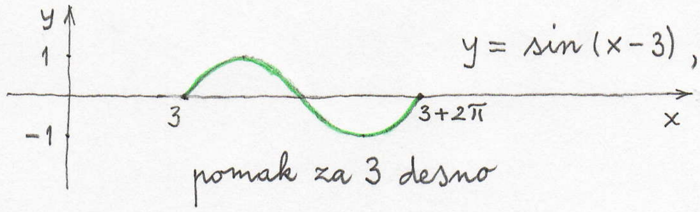
$$y = a\sin b(x - x_0) = 4\sin 2(x-3)$$

je vidljivo da je amplituda $a = 4$, frekvencija $b = 2$ i pomak $x_0 = 3$. Graf ćemo nacrtati samo na jednom intervalu duljine osnovnog perioda.



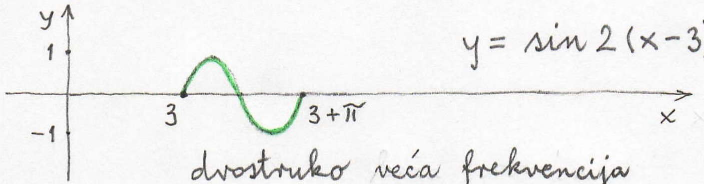

$y = \sin x$

osnovni graf



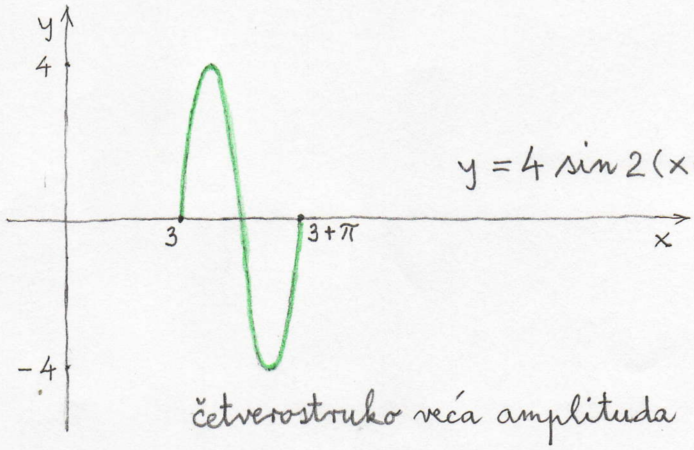

$y = \sin(x-3)$, $\boxed{x_0 = 3}$

pomak za 3 desno




$y = \sin 2(x-3)$, $\boxed{b = 2}$, $p = \frac{2\pi}{2} = \pi$

dvostruko veća frekvencija




$y = 4\sin 2(x-3)$, $\boxed{a = 4}$

četverostruko veća amplituda

□

## 10.2. Parametarske jednadžbe kružnice i elipse

Neka je $T(x, y)$ bilo koja točka kružnice $x^2+y^2=a^2$, a $t$ mjera pozitivno orijentiranog kuta $AOT$ u radijanima $(0 \leq t < 2\pi)$. Zbog sličnosti pravokutnih trokuta s hipotenuzama $a$ i $1$, slijedi

$$\frac{x}{a} = \frac{\cos t}{1} \quad i \quad \frac{y}{a} = \frac{\sin t}{1},$$

odakle izlaze parametarske jednadžbe kružnice sa parametrom kutom $t$:

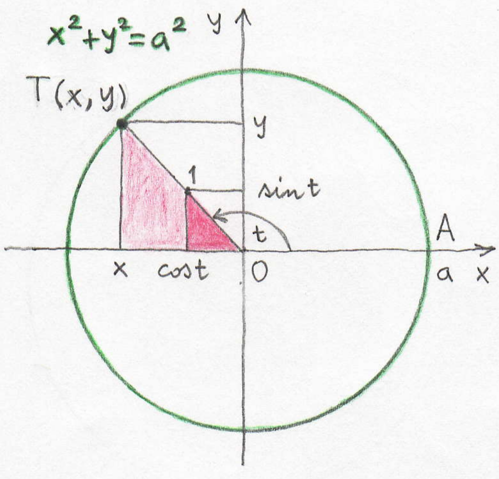
$$x = a\cos t,\ y = a\sin t,\ 0 \leq t < 2\pi.$$

Konstrukcijom točke $T(x, y)$ elipse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ pomoću kružnica polumjera $a$ i $b$ nastaju dva pravokutna trokuta s hipotenuzama $a$ i $b$. Zbog sličnosti tih trokuta s trokutom hipotenuze $1$, slijedi

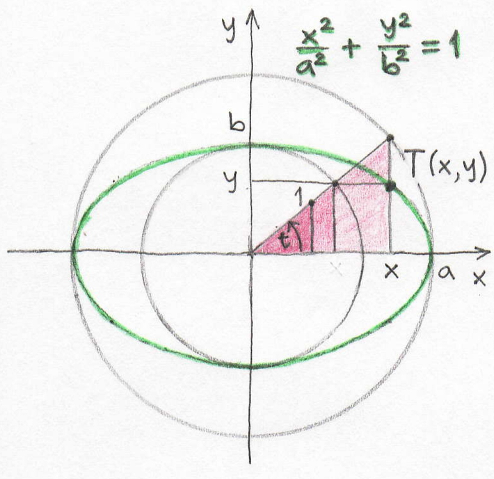
$$\frac{x}{a} = \frac{\cos t}{1} \quad i \quad \frac{y}{b} = \frac{\sin t}{1},$$

odakle izlaze parametarske jednadžbe elipse s parametrom kutom $t$:

$$x = a\cos t,\ y = b\sin t,\ 0 \leq t < 2\pi.$$




kružnica




elipsa

**Primjer 89.** Odredi parametarske jednadžbe elipse $\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1$.

Rješenje. Uvođenjem zamjena $x-x_0=u$ i $y-y_0=v$ izlazi

$$x-x_0 = u = a\cos t \quad i \quad y-y_0 = v = b\sin t,$$

tj.

$$x = x_0 + a\cos t,\ y = y_0 + b\sin t,\ 0 \leq t < 2\pi.$$

□

## 10.3. Važnije relacije

Od mnogobrojnih trigonometrijskih relacija zapisat ćemo samo one osnovne i one koje se koriste u integralnom računu:

(1) $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ (2) $\tan x \cdot \cot x = 1$

(3) $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$, $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$ (4) $\tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cot x$, $\cot\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \tan x$

(5) $\sin(x \pm y) = \sin x \cdot \cos y \pm \cos x \cdot \sin y$

(6) $\cos(x \pm y) = \cos x \cdot \cos y \mp \sin x \cdot \sin y$

(7) $\sin x \cdot \sin y = \frac{1}{2}\left[\cos(x-y) - \cos(x+y)\right]$

(8) $\sin x \cdot \cos y = \frac{1}{2}\left[\sin(x-y) + \sin(x+y)\right]$

(9) $\cos x \cdot \cos y = \frac{1}{2}\left[\cos(x-y) + \cos(x+y)\right]$

(10) $\sin x - \sin y = 2 \sin \frac{x-y}{2} \cdot \cos \frac{x+y}{2}$

(11) $\cos x - \cos y = -2 \sin \frac{x-y}{2} \cdot \sin \frac{x+y}{2}$

(12) $\sin^2 x = \dfrac{\tan^2 x}{1 + \tan^2 x}$ (13) $\cos^2 x = \dfrac{1}{1 + \tan^2 x}$

(14) $\sin x = \dfrac{2 \tan \frac{x}{2}}{1 + \tan^2 \frac{x}{2}}$ (15) $\cos x = \dfrac{1 - \tan^2 \frac{x}{2}}{1 + \tan^2 \frac{x}{2}}$

(16) $\tan x = \dfrac{2 \tan \frac{x}{2}}{1 - \tan^2 \frac{x}{2}}$ (17) $\cot x = \dfrac{1 - \tan^2 \frac{x}{2}}{2 \tan \frac{x}{2}}$

Izvod relacije (12):

$$\tan^2 x = \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{\sin^2 x}{1 - \sin^2 x} \quad / \cdot (1 - \sin^2 x)$$

$$(1 - \sin^2 x) \tan^2 x = \sin^2 x$$

$$\sin^2 x = \frac{\tan^2 x}{1 + \tan^2 x}$$

# 11. Arkus funkcije

## 11.1. Definicija

Suzimo trigonometrijske funkcije tako da one postanu injektivne :

$$\sin : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to [-1, 1] \quad , \quad \cos : [0, \pi] \to [-1, 1]$$

$$\tan : \left\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right\rangle \to \langle -\infty, +\infty \rangle \, , \; \cot : \langle 0, \pi \rangle \to \langle -\infty, +\infty \rangle$$

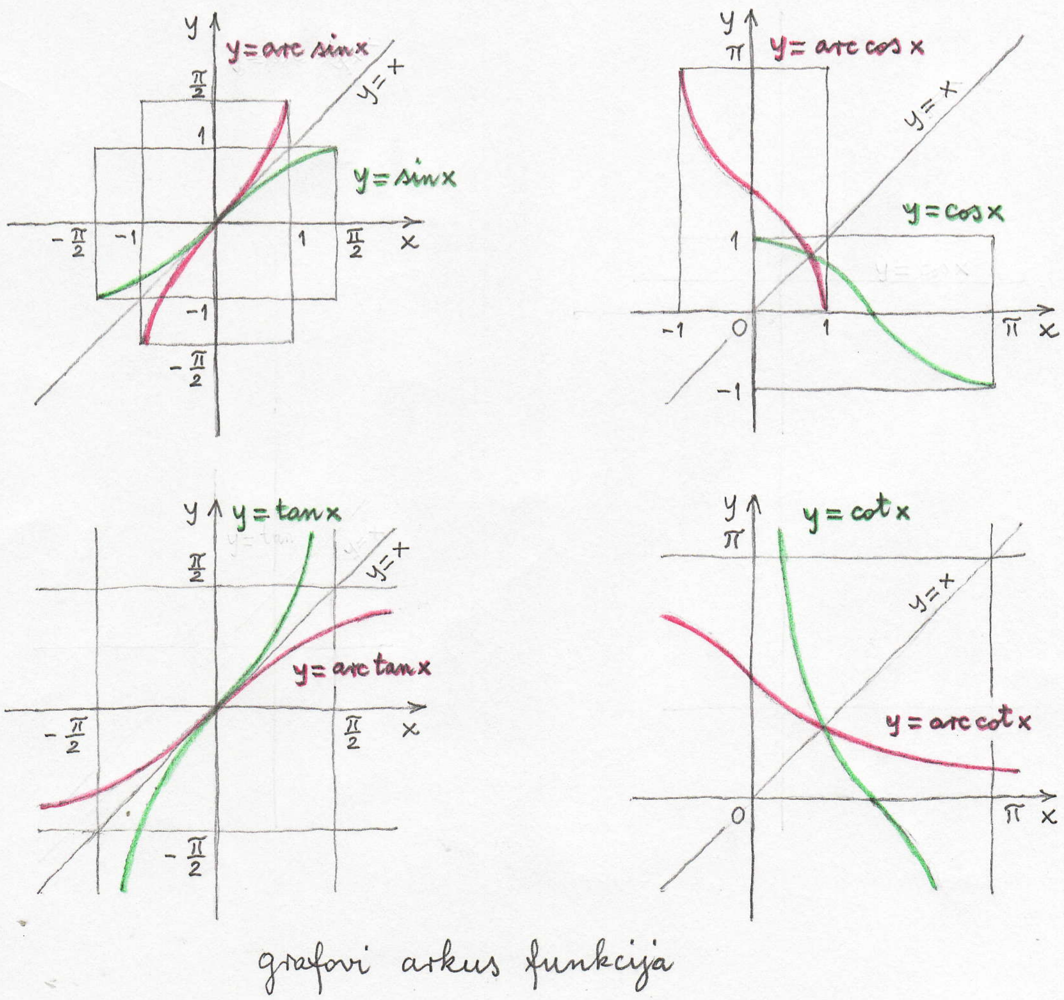
Inverzne funkcije ovih trigonometrijskih suženja se zovu **arkus** (lat. arcus = hrv. luk) ili **ciklometrijske** (grč. kyklos = hrv. krug) funkcije. To su :

**arkus sinus** ; $\arcsin : [-1, 1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ , $\arcsin x = \sin^{-1} x$

**arkus kosinus**; $\arccos : [-1, 1] \to [0, \pi]$ , $\arccos x = \cos^{-1} x$

**arkus tangens**; $\arctan : \langle -\infty, +\infty \rangle \to \left\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right\rangle$, $\arctan x = \tan^{-1} x$

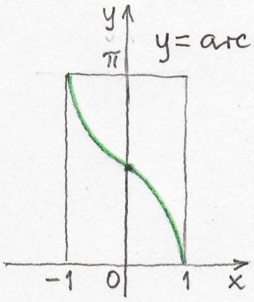
**arkus kotangens**; $\operatorname{arccot} : \langle -\infty, +\infty \rangle \to \langle 0, \pi \rangle$, $\operatorname{arccot} x = \cot^{-1} x$



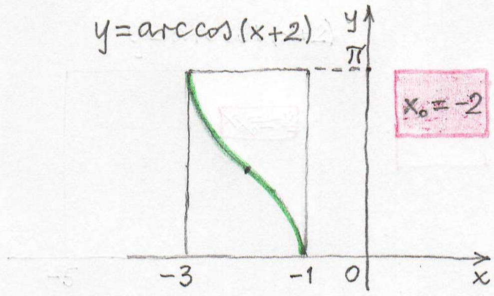

grafovi arkus funkcija

**Primjer 90.** Nacrtaj graf općeg arkus kosinusa
$$y = -\arccos\left(\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}\right).$$

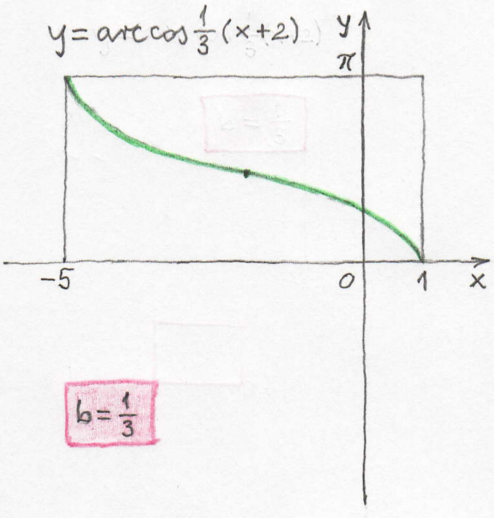
*Rješenje.* Kanonski oblik
$$y = a \arccos b(x - x_0) = -\arccos\frac{1}{3}(x+2)$$
pokazuje da je "amplituda" $a = -1$, "frekvencija" $b = \frac{1}{3}$ i pomak $x_0 = -2$.



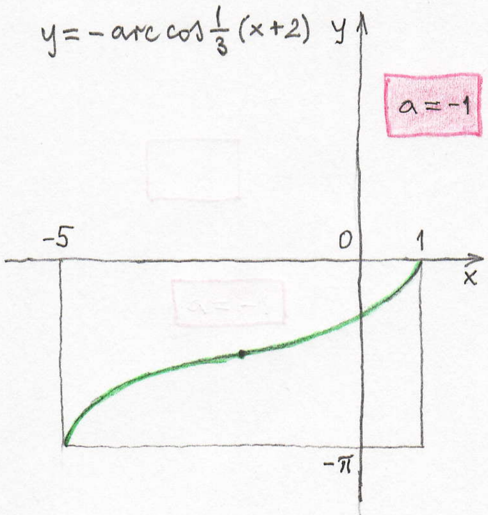

osnovni graf




pomak za 2 lijevo




trostruko manja "frekvencija"




zrcaljenje na osi x

□

## 11.2. Važnije relacije

(1) $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$, $\quad -1 \le x \le 1$

(2) $\operatorname{arc\,tan} x + \operatorname{arc\,cot} x = \frac{\pi}{2}$, $\quad x \in \mathbb{R}$

(3) $\arccos x = \arcsin\sqrt{1-x^2}$, $\quad 0 \le x \le 1$

(4) $\operatorname{arc\,tan} x = \arcsin\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$, $\quad x \in \mathbb{R}$

(5) $\operatorname{arc\,cot} x = \arcsin\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$, $\quad x > 0$

(6) $\operatorname{arc\,cot} x = \operatorname{arc\,tan}\frac{1}{x}$, $\quad x > 0$

Izvod relacije (1):

$$-1 \leq x \leq 1$$

$$\arcsin x = y \quad / \sin$$

$$x = \sin y = \cos\left(\frac{\pi}{2} - y\right) \quad / \arccos$$

$$\arccos x = \frac{\pi}{2} - y$$

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$$

# 12. Elementarne i neelementarne funkcije

## 12.1. Elementarne funkcije

**Elementarne funkcije** nastaju zbrajanjem, oduzimanjem, množenjem, dijeljenjem i spajanjem konačnog broja osnovnih elementarnih funkcija. Tako je npr. funkcija

$$f(x) = \frac{\sin x}{x} \cdot \sqrt{\ln x} - 2^x$$

elementarna jer je sastavljena od osnovnih elementarnih funkcija

$$f_1(x) = \sin x, \quad f_2(x) = x, \quad f_3(x) = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}, \quad f_4(x) = \ln x, \quad f_5(x) = 2^x$$

uz operacije dijeljenja, množenja, spajanja i oduzimanja:

$$f(x) = \frac{f_1(x)}{f_2(x)} \cdot f_3(f_4(x)) - f_5(x) = \left(\frac{f_1}{f_2} \cdot (f_3 \circ f_4) - f_5\right)(x).$$

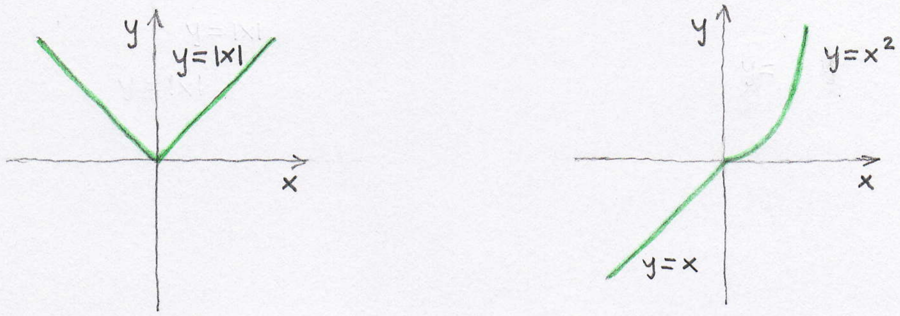
Funkcija $f(x) = x^x$ za $x > 0$ je elementarna jer je

$$x^x = e^{\ln x^x} = e^{x \ln x}.$$

Funkcija apsolutne vrijednosti $f(x) = |x|$ je elementarna jer je $|x| = \sqrt{x^2}$. Ona nije opća potencija zato što se $\sqrt{x^2}$ ne može izraziti kao $x^{\frac{2}{2}} = x$ (kod potencija sa racionalnim eksponentom, $x^{\frac{m}{n}}$, se predpostavlja da su m i n relativno prosti).

Elementarna je i funkcija sastavljena od polupravca i poluparabole:

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{za } x \leq 0 \\ x^2 & \text{za } x \geq 0 \end{cases} = \frac{x-|x|}{2} + \frac{x+|x|}{2}\, x \,.$$

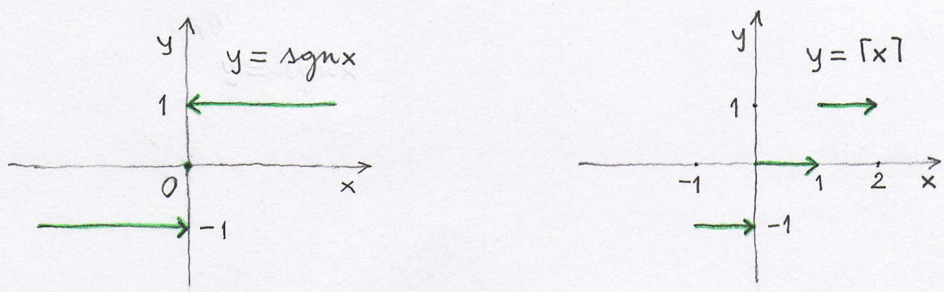



elementarne funkcije

Elementarne funkcije zadržavaju bitno svojstvo neprekinutosti, one su neprekinute gdje god su definirane.

## 12.2. Neelementarne funkcije

Integrali i diferencijalne jednadžbe su pravi izvor funkcija koje nisu elementarne, tj. **neelementarnih funkcija**. Mi ćemo samo navesti dvije takve funkcije: funkciju predznaka $f(x) = \operatorname{sgn} x$ i funkciju najvećeg cijelog $f(x) = \lceil x \rceil$.




neelementarne funkcije

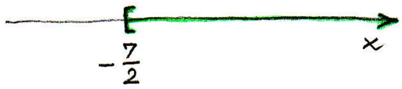
# 13. Proučavanje funkcija

## 13.1. Određivanje područja definicije

**Primjer 91.** Odredi područje definicije funkcije $f(x) = \sqrt{2x+7}$.

Rješenje. Drugi se korijen može "vaditi" samo iz nenegativnih brojeva:

$2x+7 \geq 0$ tj. $x \geq -\frac{7}{2}$



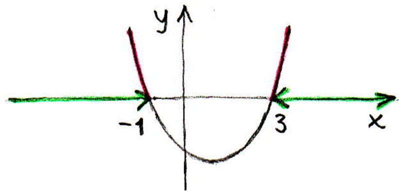

$$D = [-\tfrac{7}{2}, +\infty\rangle$$

□

**Primjer 92.** Odredi domenu funkcije $f(x) = \log_4(x^2-2x-3)$.

Rješenje. Logaritmirati se mogu samo pozitivni brojevi:

$$x^2-2x-3>0$$




Uz pomoć grafa kvadratne funkcije $y=x^2-2x-3$ se dobiva

$$D = \langle-\infty,-1\rangle \cup \langle 3,+\infty\rangle.$$

□

**Primjer 93.** Odredi domenu funkcije $f(x)=(2+x)^{3-x}$.

Rješenje. Baza $2+x$ nikako ne smije biti negativna pa iz $2+x \geq 0$ izlazi $x \geq -2$. Sada se za granični $x=-2$ izračuna vrijednost eksponenta $3-x = 3-(-2) = 5$ i provjeri ima li izraz $0^5$ smisla. Ima, jer je $0^5 = 0$ (dok npr. $0^0$ i $0^{-5}$ nemaju smisla). Dakle, $x=-2$ ostaje u domeni

$$D = [-2, +\infty\rangle.$$

□

**Primjer 94.** Odredi domenu funkcije $f(x) = \arcsin(6-3x)$.

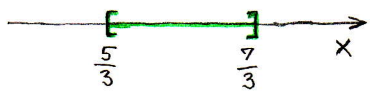
Rješenje. Funkcija arkus sinus je definirana na zatvorenom intervalu $[-1,1]$:

$$-1 \leq 6-3x \leq 1 \quad /-6$$

$$-7 \leq -3x \leq -5 \quad /:(-3)$$

$$\frac{7}{3} \geq x \geq \frac{5}{3}$$

$$\frac{5}{3} \leq x \leq \frac{7}{3}$$

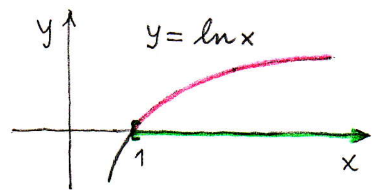



$$D = \left[\frac{5}{3}, \frac{7}{3}\right]$$

□

**Primjer 95.** Odredi domenu funkcije $f(x)=\sqrt{\ln x}$.

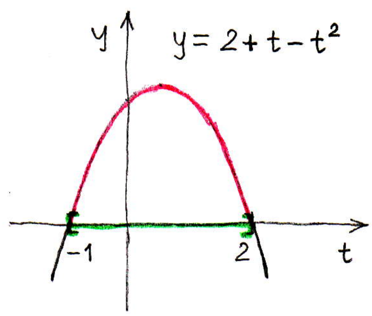
*Rješenje.*
$$\ln x \geq 0 = \ln 1$$
$$x \geq 1$$
$$\mathcal{D} = [1, +\infty\rangle$$



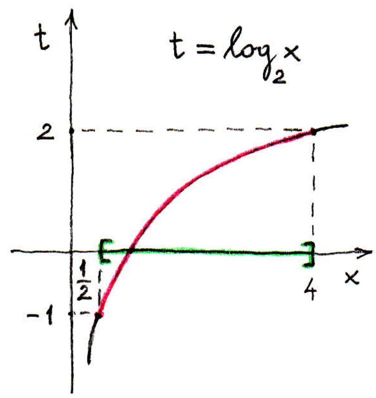

□

**Primjer 96.** Odredi domenu funkcije $f(x)=\sqrt[6]{2+\log_2 x-\log_2^2 x}$.

*Rješenje.* Uz pomoćnu promjenljivu $t=\log_2 x$ slijedi
$$2+t-t^2 \geq 0,$$
a posredstvom grafa pomoćne funkcije $y=2+t-t^2$ izlazi
$$-1 \leq t \leq 2.$$




Funkcija $t=\log_2 x$ je rastuća pa iz
$$\log_2 2^{-1} = -1 \leq \log_2 x \leq 2 = \log_2 2^2$$
proizlazi
$$\frac{1}{2} \leq x \leq 4,$$
tj.
$$\mathcal{D} = [\tfrac{1}{2}, 4].$$




□

**Primjer 97.** Odredi područje definicije funkcije
$$f(x)=\frac{x}{\log(2-x^2)}-\frac{\arccos e^x}{\sin x+2}.$$

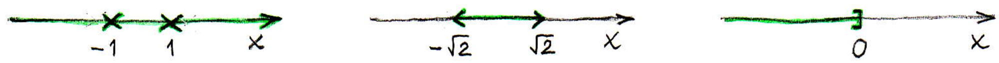
*Rješenje.* Područje definicije ograničavaju funkcija u nazivniku $y=\log(2-x^2)$ i funkcija $y=\arccos e^x$. Domena funkcije $f$ je određena sustavom nejednadžbi:
$$\begin{cases} \log(2-x^2) \neq 0 & \text{zbog nazivnika} \\ 2-x^2>0 & \text{zbog logaritma} \\ -1 \leq e^x \leq 1 & \text{zbog arkus kosinusa} \end{cases}$$

Slijedi račun:

$$\log(2-x^2) \neq 0 \qquad 2-x^2>0 \qquad -1 \leqslant e^x \leqslant 1$$

$$2-x^2 \neq 1 \qquad x^2<2 \qquad e^x \leq 1 = e^0$$

$$x \neq \pm 1 \qquad -\sqrt{2}<x<\sqrt{2} \qquad x \leq 0$$




Presjek ova tri skupa daje domenu funkcije $f$:

$$\mathcal{D} = \langle -\sqrt{2}, -1 \rangle \cup \langle -1, 0].$$

□

## 13.2. Spoj funkcija

**Primjer 98.** Odredi spojeve $(f \circ g)(x)$ i $(g \circ f)(x)$, ako je $f(x) = \sqrt{x}$ i $g(x) = \ln x$.

Rješenje. $f(t) = \sqrt{t}$, $g(t) = \ln t$

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(\overset{t}{\ln x}) = \sqrt{t} = \sqrt{\ln x}$$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(\overset{t}{\sqrt{x}}) = \ln t = \ln \sqrt{x}$$

□

**Primjer 99.** Odredi kompozicije $(f \circ g)(x)$ i $(g \circ f)(x)$, ako je $f(x) = x^2-1$ i $g(x) = \sin x$.

Rješenje. $f(t) = t^2-1$, $g(t) = \sin t$

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(\overset{t}{\sin x}) = t^2-1 = \sin^2 x - 1$$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(\overset{t}{x^2-1}) = \sin t = \sin(x^2-1)$$

□

**Primjer 100.** Odredi složene funkcije $(f \circ g)(x)$ i $(g \circ f)(x)$, ako je $f(x) = x^3 - 3^x$ i $g(x) = 2$.

Rješenje. $g(t) = 2$

$$(f\circ g)(x)=f(g(x))=f(2)=2^3-3^2=-1$$

$$(g\circ f)(x)=g(f(x))=g(\overset{t}{x^3-3^x})=2$$

□

**Primjer 101.** Odredi kompoziciju $(f\circ g\circ h)(x)$, ako je $f(x)=x-1$, $g(x)=\sin(x+1)$ i $h(x)=2^x$.

Rješenje. $(f\circ g\circ h)(x)=f(g(h(x)))=$

$$=f(g(2^x))=f(\sin(2^x+1))=\sin(2^x+1)-1$$

□

**Primjer 102.** Rastavi elementarnu funkciju $f(x)=3\ln x-\sin\sqrt{x}$ na osnovne elementarne funkcije.

Rješenje. $f_1(x)=3$, $f_2(x)=\ln x$, $f_3(x)=\sin x$, $f_4(x)=\sqrt{x}=x^{\frac{1}{2}}$

$$f(x)=f_1(x)\cdot f_2(x)-f_3(f_4(x))=$$
$$=(f_1\cdot f_2)(x)-(f_3\circ f_4)(x)=$$
$$=(f_1\cdot f_2-f_3\circ f_4)(x)$$

□

**Primjer 103.** Rastavi elementarnu funkciju $f(x)=\log(x^3+\sqrt[3]{x})$ na osnovne elementarne funkcije.

Rješenje. $f_1(x)=\log x$, $f_2(x)=x^3$, $f_3(x)=\sqrt[3]{x}=x^{\frac{1}{3}}$

$$f(x)=f_1(f_2(x)+f_3(x))=$$
$$=f_1((f_2+f_3)(x))=$$
$$=(f_1\circ(f_2+f_3))(x)$$

□

**Primjer 104.** Rastavi elementarnu funkciju

$$f(x)=2^{\cos x}+\frac{\operatorname{arc}\tan x}{x-1}-1$$

na osnovne elementarne funkcije.

Rješenje. $f_1(x)=2^x$, $f_2(x)=\cos x$, $f_3(x)=\operatorname{arc\,tan} x$, $f_4(x)=x-1$, $f_5(x)=1$

$$f(x)=f_1(f_2(x))+\frac{f_3(x)}{f_4(x)}-f_5(x)=$$
$$=(f_1\circ f_2)(x)+\frac{f_3}{f_4}(x)-f_5(x)=$$
$$=\left(f_1\circ f_2+\frac{f_3}{f_4}-f_5\right)(x)$$

□

**Primjer 105.** Dokaži da je kompozicija dviju padajućih funkcija rastuća funkcija.

Rješenje. Neka su $f$ i $g$ padajuće funkcije te neka su $x_1, x_2 \in \mathcal{D}_g$ i $g(x_1), g(x_2) \in \mathcal{D}_f$. Tada iz predpostavke

$$x_1 < x_2,$$

slijedi:

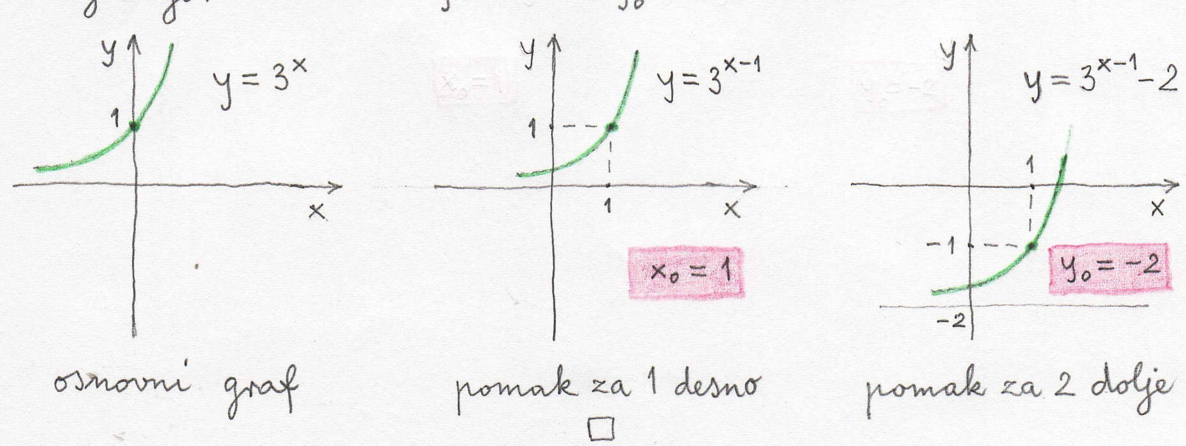
$$g(x_1) > g(x_2)$$
$$f(g(x_1)) < f(g(x_2))$$
$$(f\circ g)(x_1) < (f\circ g)(x_2)$$

□

## 13.3. Crtanje grafova

**Primjer 106.** Služeći se pomacima nacrtaj graf funkcije $y=3^{x-1}-2$.

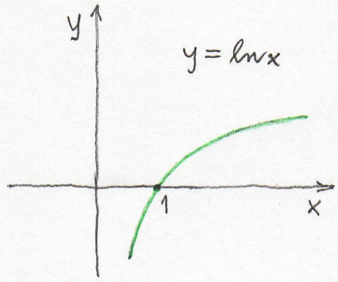
Rješenje. $y=3^{x-x_0}+y_0=3^{x-1}+(-2)$



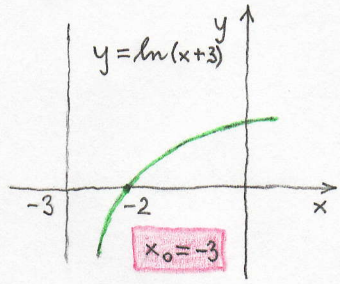

□

**Primjer 107.** Pomoću pomaka nacrtaj graf funkcije $y = \ln(x+3)+1$.

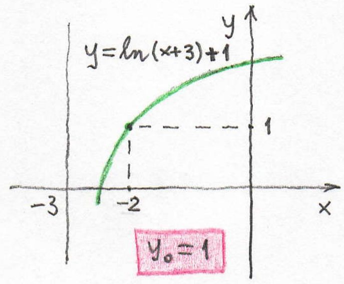
Rješenje. $$y = \ln(x - x_0) + y_0 = \ln[x-(-3)] + 1$$



osnovni graf



pomak za 3 lijevo

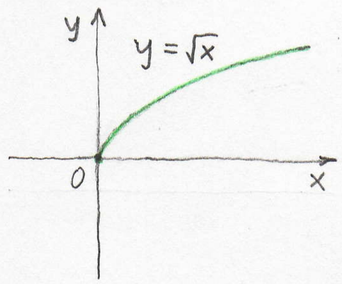


pomak za 1 gore

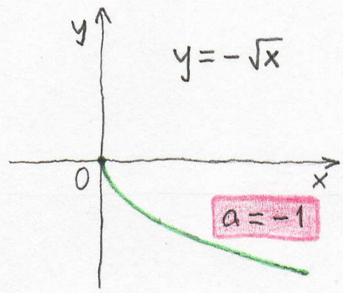
□

**Primjer 108.** Služeći se zrcaljenjem i pomakom nacrtaj graf funkcije $y = \sqrt{2} - \sqrt{x}$.

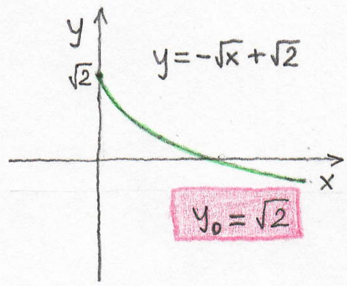
Rješenje. $$y = a\sqrt{x} + y_0 = -\sqrt{x} + \sqrt{2}$$



osnovni graf



zrcaljenje na osi x

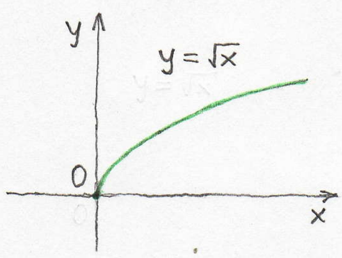


pomak za $\sqrt{2}$ gore

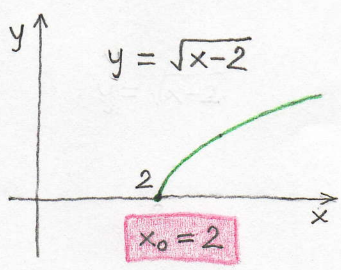
□

**Primjer 109.** Pomoću pomaka i zrcaljenja nacrtaj graf funkcije $y = \sqrt{2-x}$.

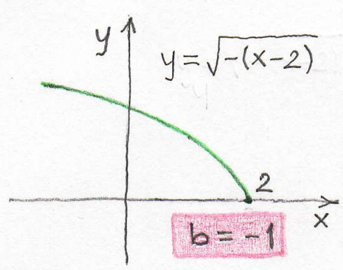
Rješenje. $$y = \sqrt{b(x-x_0)} = \sqrt{-(x-2)}$$



osnovni graf



pomak za 2 desno

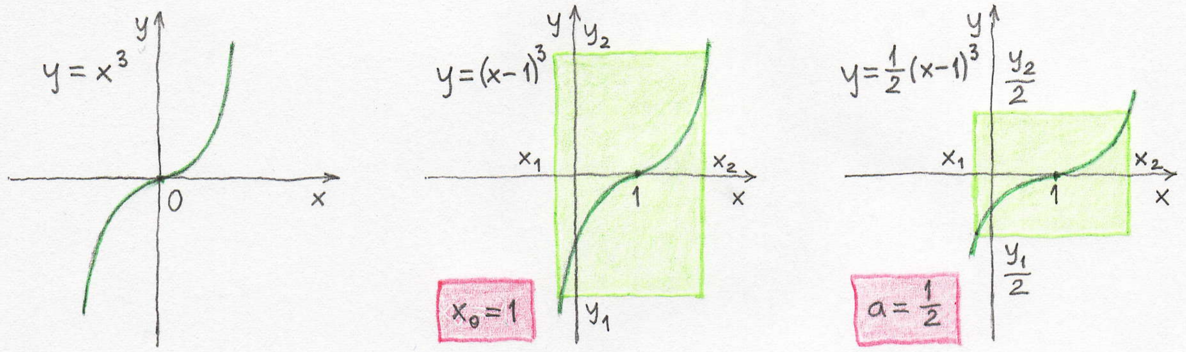


zrcaljenje na osi $x=2$

□

**Primjer 110.** Koristeći pomak i "amplitudu" nacrtaj graf funkcije $y=\frac{1}{2}(x-1)^3$.

Rješenje. $y=a(x-x_0)^3=\frac{1}{2}(x-1)^3$

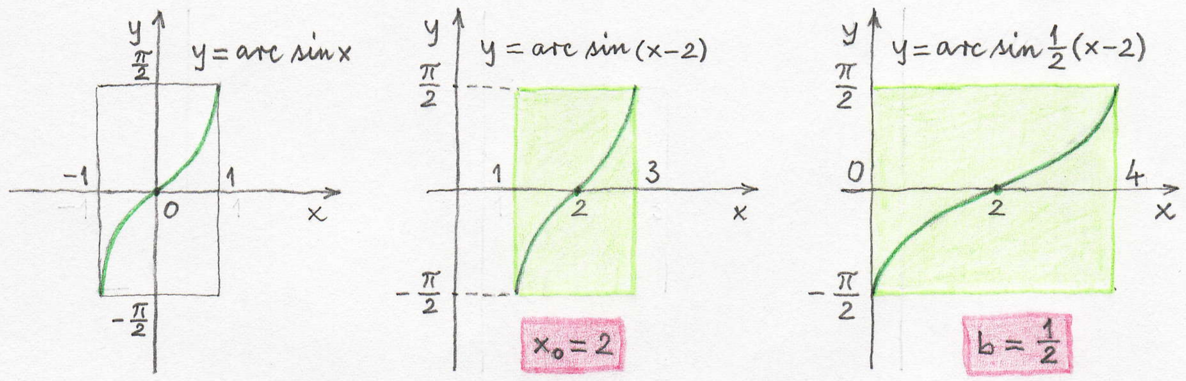



osnovni graf — pomak za 1 desno — dvostruko sabijanje duž osi y oko nule

□

**Primjer 111.** Koristeći pomak i "frekvenciju" nacrtaj graf funkcije $y=\arcsin\left(\frac{1}{2}x-1\right)$.

Rješenje. $y=\arcsin b(x-x_0)=\arcsin\frac{1}{2}(x-2)$

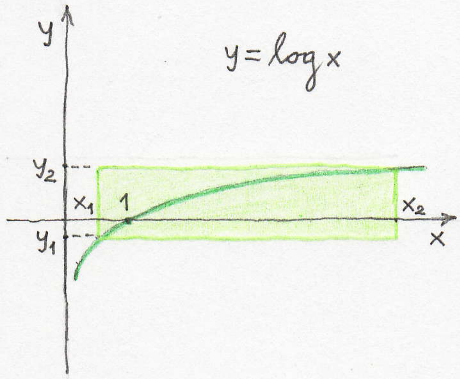



osnovni graf — pomak za 2 desno — dvostruko razvlačenje duž osi x oko $x_0=2$

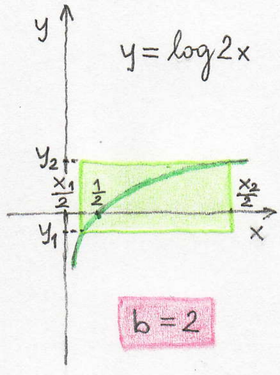
□

**Primjer 112.** Uz pomoć "frekvencije" i "amplitude" nacrtaj graf funkcije $y=3\log 2x$.

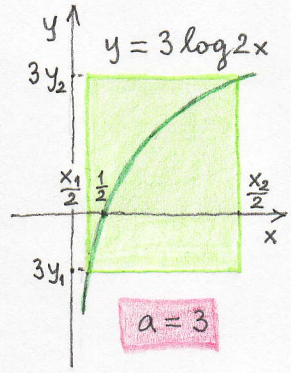
Rješenje. $y=a\log bx=3\log 2x$




osnovni graf




dvostr. sabijanje duž x oko nule

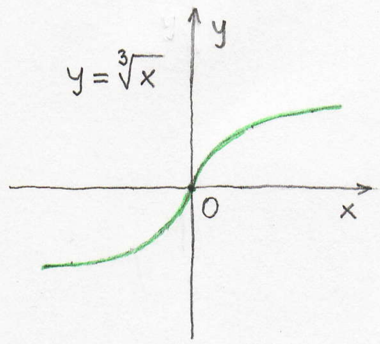



trostr. razvlačenje duž y oko nule

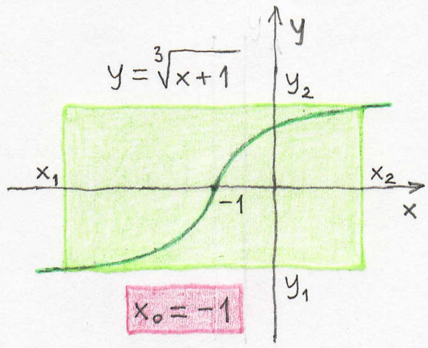
□

**Primjer 113.** Uz pomoć pomaka, "frekvencije" i "amplitude" nacrtaj graf funkcije $y = 1 - 2\sqrt[3]{2x+2}$.

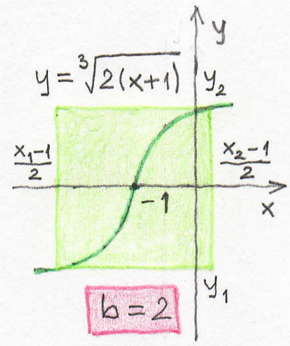
Rješenje. $y = a\sqrt[3]{b(x-x_0)} + y_0 = -2\sqrt[3]{2[x-(-1)]} + 1$



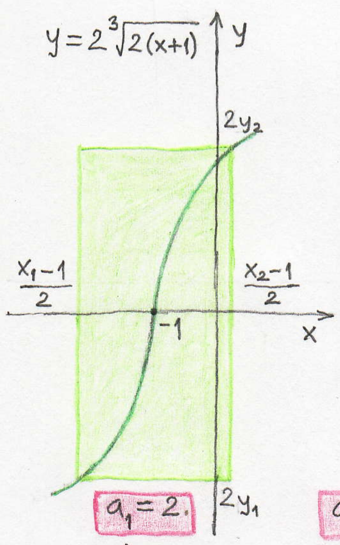

osnovni graf



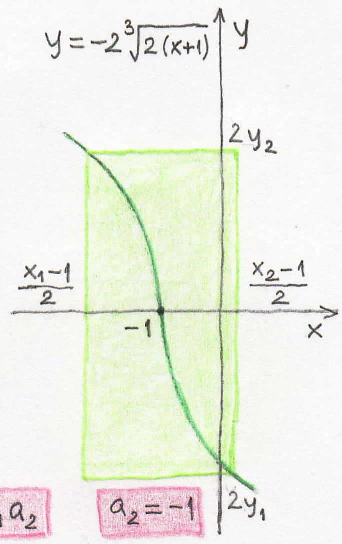

pomak za 1 lijevo

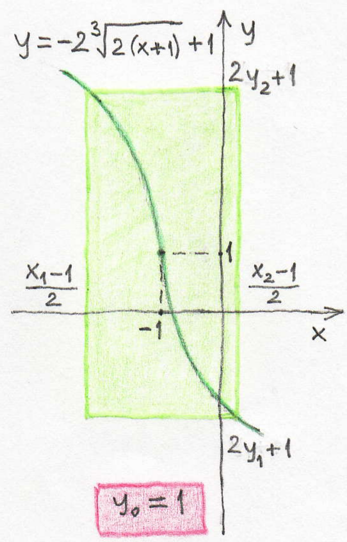



dvostr. sabijanje duž x oko $x_0 = -1$




$a = a_1 a_2$




dvostruko razvlačenje duž osi y oko nule

zrcaljenje na osi x

pomak za 1 gore

□

## 13.4. Ispitivanje injektivnosti

**Primjer 114.** Dokaži da je jednolična funkcija injektivna.

Rješenje. Neka je $f$ jednolična funkcija i

$$x_1 \neq x_2,$$

neka bude $x_1 < x_2$. Tada je za rastuću funkciju $f(x_1) < f(x_2)$, a za padajuću $f(x_1) > f(x_2)$. U oba je slučaja

$$f(x_1) \neq f(x_2).$$

□

**Primjer 115.** Dokaži da je kompozicija dviju injektivnih funkcija opet injektivna funkcija.

Rješenje. Neka su $f$ i $g$ injektivne funkcije. Pokažimo da je $f \circ g$ injektivna funkcija. Za $x_1, x_2 \in \mathcal{D}_g$ takve da su $g(x_1), g(x_2) \in \mathcal{D}_f$ uz pretpostavku

$$x_1 \neq x_2,$$

slijedi:

$$g(x_1) \neq g(x_2) \quad \text{zbog injektivnosti funkcije } g$$

$$f(g(x_1)) \neq f(g(x_2)) \quad \text{zbog injektivnosti funkcije } f$$

$$(f \circ g)(x_1) \neq (f \circ g)(x_2)$$

□

**Napomena.** Tvrdnja primjera se može poopćiti na kompoziciju konačnog broja injektivnih funkcija.

**Primjer 116.** Provjeri ili dokaži injektivnost funkcije $f(x) = \sqrt[3]{\ln(4-5x)}$.

Rješenje. Neposredna provjera - dokaz. Neka su $x_1$ i $x_2$ iz područja definicije funkcije $f$ te neka je

$$x_1 \neq x_2.$$

Tada je:

$$-5x_1 \neq -5x_2$$
$$4-5x_1 \neq 4-5x_2$$
$$\ln(4-5x_1) \neq \ln(4-5x_2) \quad \text{zbog injektivnosti logaritma}$$
$$\sqrt[3]{\ln(4-5x_1)} \neq \sqrt[3]{\ln(4-5x_2)} \quad \text{zbog injektivnosti neparnog korijena}$$
$$f(x_1) \neq f(x_2)$$

Posredni dokaz. Funkcija $f(x)$ je kompozicija injektivnih funkcija $f_1(x) = \sqrt[3]{x}$, $f_2(x) = \ln x$ i $f_3(x) = 4-5x$ ($f = f_1 \circ f_2 \circ f_3$) pa je po Napomeni i sama injektivna.

□

**Primjer 117.** Provjeri injektivnost funkcije $f(x) = x^3 - x^2$.

Rješenje. Iz predočenja funkcije

$$f(x) = x^3 - x^2 = x^2(x-1)$$

je vidljivo da ona ima dvije nul-točke $x_1 = 0$ i $x_2 = 1$. Ta je činjenica dovoljna za zaključak da funkcija $f(x)$ nije injektivna: dva različita $x$-a $x_1 = 0$ i $x_2 = 1$ imaju istu funkcijsku vrijednost

$$f(x_1) = f(x_2) = 0.$$

□

**Primjer 118.** Provjeri injektivnost funkcije $f(x) = (3^x)^2$.

Rješenje. Funkcija

$$f(x) = (3^x)^2 = (3^2)^x = 9^x$$

je eksponencijalna funkcija (s bazom 9) pa je kao takva injektivna.

□

**Primjer 119.** Provjeri injektivnost funkcije $f(x) = 3^{|x|}$.

Rješenje. Za par brojeva $x_1 = 1$ i $x_2 = -1$ vrijedi

$$f(x_1) = f(x_2) = 3$$

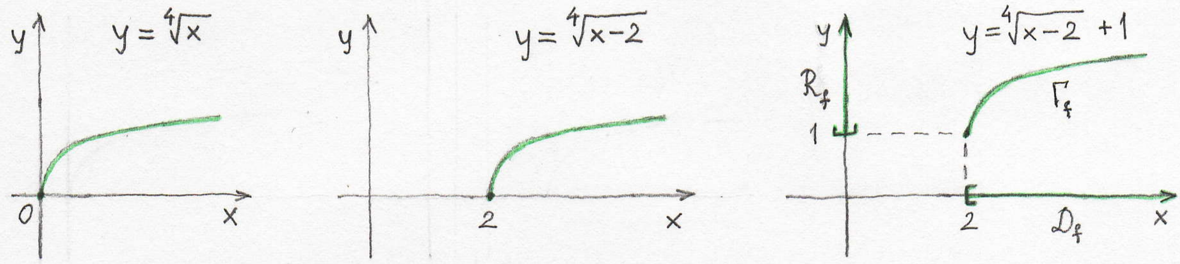
što govori da funkcija $f(x)$ nije injektivna.

□

## 13.5. Određivanje inverzne funkcije

**Primjer 120.** Uz pomoć grafa funkcije $f(x)=\sqrt[4]{x-2}+1$ odredi njenu domenu i sliku. Uvjeri se da je funkcija $f$ injektivna te izračunaj inverznu funkciju $f^{-1}$.

Rješenje.




osnovni graf     pomak za 2 desno     pomak za 1 gore

Graf $\Gamma_f$ funkcije $f(x)$ omogućava očitanje domene $D_f$ i slike $R_f$ (okomite projekcije grafa $\Gamma_f$ na osi $x$ i $y$), kao i zaključak da je $f(x)$ injektivna (pravci usporedni s osi $x$ siječu graf u najviše jednoj točki).

$$D_f=[2,+\infty\rangle\;,\; R_f=[1,+\infty\rangle$$

$$f:[2,+\infty\rangle\to[1,+\infty\rangle\;,\quad f^{-1}:[1,+\infty\rangle\to[2,+\infty\rangle$$

Računanje inverzne funkcije:

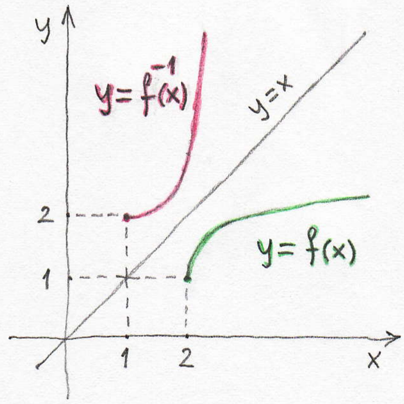
$$\sqrt[4]{y-2}+1=x$$

$$\sqrt[4]{y-2}=x-1 \;/\exp^4$$

$$y-2=(x-1)^4$$

$$y=(x-1)^4+2$$

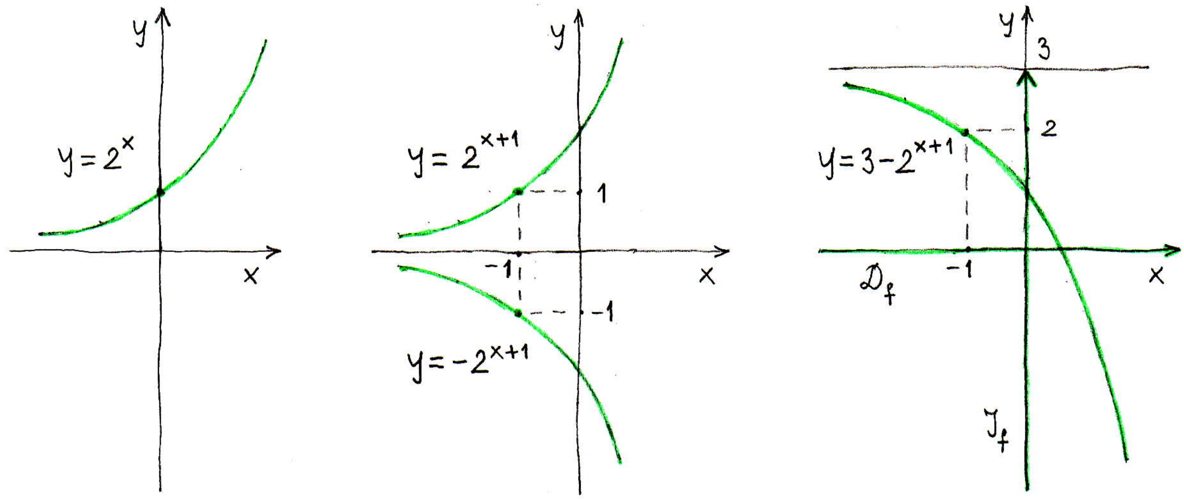
$$f^{-1}(x)=(x-1)^4+2\;,\quad x\geq 1$$




□

**Primjer 121.** Uz pomoć grafa funkcije $f(x)=3-2^{x+1}$ odredi njenu domenu i sliku. Uvjeri se da je funkcija $f$ injektivna te izračunaj inverznu funkciju $f^{-1}$.

Rješenje.




osnovni graf — pomak za 1 lijevo i zrcaljenje na osi x — pomak za 3 gore

$$\mathcal{D}_f = \langle -\infty, +\infty \rangle, \quad \mathcal{R}_f = \langle -\infty, 3 \rangle$$

$$f : \langle -\infty, +\infty \rangle \to \langle -\infty, 3 \rangle, \quad f^{-1} : \langle -\infty, 3 \rangle \to \langle -\infty, +\infty \rangle$$

Računanje inverzne funkcije:

$$3 - 2^{y+1} = x$$

$$2^{y+1} = 3 - x \; / \log_2 = \exp_2^{-1}$$

$$y + 1 = \log_2 (3 - x)$$

$$y = \log_2 (3 - x) - 1$$

$$f^{-1}(x) = \log_2 (3 - x) - 1, \quad x < 3$$

$\square$

**Primjer 122.** Odredi domenu i sliku funkcije $f(x) = x - \sqrt{x}$. Uvjeri se da funkcija $f$ nije injektivna.

Rješenje. Domena je skup nenegativnih brojeva

$$\mathcal{D}_f = [0, +\infty\rangle.$$

Oblik umnoška

$$f(x) = \sqrt{x}\,(\sqrt{x} - 1)$$

otkriva nul-točke $x=0$ i $x=1$ te odmah pokazuje da $f$ nije injektivna ($f(0)=f(1)=0$).

Oblik razlike kvadrata

$$f(x)=(\sqrt{x})^2-\sqrt{x}=\left(\sqrt{x}-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}$$

otkriva najmanju vrijednost $-\frac{1}{4}$ funkcije $f$ i još pokazuje da ona nije omeđena s gornje strane. Zato je slika

$$R_f=\left[-\frac{1}{4},+\infty\right\rangle.$$

□

**Primjer 123.** Odredi domenu i sliku funkcije $f(x)=\arcsin 2x+\frac{\pi}{2}$. Provjeri injektivnost funkcije $f$ i izračunaj $f^{-1}$.

*Rješenje.* Domena:

$$-1\le 2x\le 1\ /:2$$
$$-\frac{1}{2}\le x\le \frac{1}{2}$$
$$D_f=\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$$

Slika:

$$-\frac{\pi}{2}\le \arcsin 2x\le \frac{\pi}{2}\ /+\frac{\pi}{2}$$
$$0\le f(x)=\arcsin 2x+\frac{\pi}{2}\le \pi$$
$$R_f=[0,\pi]$$

Injektivnost:

$$x_1\ne x_2$$
$$2x_1\ne 2x_2$$
$$\arcsin 2x_1\ne \arcsin 2x_2$$
$$\arcsin 2x_1+\frac{\pi}{2}\ne \arcsin 2x_2+\frac{\pi}{2}$$
$$f(x_1)\ne f(x_2)$$

Računanje inverzne funkcije:

$$\arcsin 2y+\frac{\pi}{2}=x$$
$$\arcsin 2y=x-\frac{\pi}{2}\ /\sin$$
$$2y=\sin\left(x-\frac{\pi}{2}\right)=-\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=-\cos x$$
$$y=-\frac{1}{2}\cos x$$
$$f^{-1}(x)=-\frac{1}{2}\cos x,\quad 0\le x\le \pi$$

□

**Primjer 124.** Odredi domenu i sliku funkcije $f(x)=\arccos\sqrt{\ln x}$. Provjeri injektivnost funkcije $f$ i izračunaj $f^{-1}$.

*Rješenje.* Za uspješno rješavanje primjera treba dobro poznavati funkcije $f_1(x)=\arccos x$, $f_2(x)=\sqrt{x}$ i $f_3(x)=\ln x$. Kod određivanja domene treba imati na umu da je $f_2(x)=\sqrt{x}$ nenegativna funkcija, a kod određivanja slike da je $f_1(x)=\arccos x$ padajuća funkcija.

**Domena:**

$$-1 \leq \sqrt{\ln x} \leq 1$$
$$0 \leq \sqrt{\ln x} \leq 1 \ /\exp^2$$
$$0 \leq \ln x \leq 1 \ / e^{n}$$
$$1 \leq x \leq e$$
$$D_f = [1, e]$$

**Slika:**

$$0 \leq \sqrt{\ln x} \leq 1 \ /\arccos$$
$$\frac{\pi}{2} \geq \arccos\sqrt{\ln x} \geq 0$$
$$0 \leq \arccos\sqrt{\ln x} \leq \frac{\pi}{2}$$
$$0 \leq f(x) \leq \frac{\pi}{2}$$
$$R_f = \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$$

**Injektivnost:**

$$f_1(x) = \arccos x$$
$$f_2(x) = \sqrt{x}$$
$$f_3(x) = \ln x$$
$$f(x) = f_1(f_2(f_3(x)))$$
$$f(x) = (f_1 \circ f_2 \circ f_3)(x)$$

**Računanje inverzne funkcije:**

$$\arccos\sqrt{\ln y} = x \ /\cos$$
$$\sqrt{\ln y} = \cos x \ /\exp^2$$
$$\ln y = \cos^2 x \ / e^{n} = \ln^{-1}$$
$$y = e^{\cos^2 x}$$
$$f^{-1}(x) = e^{\cos^2 x}, \quad 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$$

□

## 13.6. Rješavanje jednadžbi uz pomoć džepnog računala

**Primjer 125.** Prvo izrazi rješenje jednadžbe $\ln(1-2x) = 3$, a potom ga približno izračunaj uz pomoć računala.

*Rješenje.*

$$\ln(1-2x) = 3 \ / e^{n} = \ln^{-1}$$
$$1 - 2x = e^3$$
$$x = \frac{1}{2}(1 - e^3)$$
$$x = -9,54$$

□

**Primjer 126.** Izrazi i približno izračunaj rješenje jednadžbe $2^{x-3} = 7$.

*Rješenje.*

$$2^{x-3} = 7 \ /\ln$$
$$(x-3)\ln 2 = \ln 7$$

$$x = \frac{\ln 7}{\ln 2} + 3$$

$$x = 5{,}81$$

□

**Primjer 127.** Izrazi i približno izračunaj rješenje jednadžbe $\log(\sqrt[3]{x}+5) = -1$.

Rješenje.

$$\log(\sqrt[3]{x}+5) = -1 \;/\; \exp = \log^{-1}$$

$$\sqrt[3]{x} + 5 = 10^{-1}$$

$$\sqrt[3]{x} = 10^{-1} - 5 \;/\; \exp^3 = (\exp\tfrac{1}{3})^{-1}$$

$$x = (10^{-1} - 5)^3$$

$$x = -117{,}65$$

□

**Primjer 128.** Izrazi i približno izračunaj rješenja jednadžbe $\log_5(x^4 - 3) = 10$.

Rješenje.

$$\log_5(x^4 - 3) = 10 \;/\; \exp_5 = \log_5^{-1}$$

$$x^4 - 3 = 5^{10}$$

$$x^4 = 5^{10} + 3$$

$$x = \pm\sqrt[4]{5^{10}+3}$$

$$x = \pm 55{,}90$$

□

**Primjer 129.** Izrazi i približno izračunaj rješenje jednadžbe $\arccos(10 - e^x) = 1$.

Rješenje.

$$\arccos(10 - e^x) = 1 \;/\; \cos$$

$$10 - e^x = \cos 1$$

$$e^x = 10 - \cos 1 \;/\; \ln = e^{-1}$$

$$x = \ln(10 - \cos 1)$$

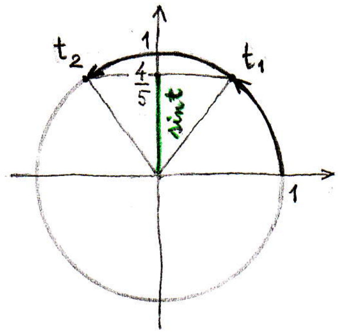
$$x = 2{,}25$$

□

**Primjer 130.** Približno izračunaj sva rješenja jednadžbe $5\sin(3x-1)=4$.

Rješenje.

$$t=3x-1$$
$$\sin t=\frac{4}{5}$$
$$t_1=\arcsin\frac{4}{5}=0{,}93$$
$$t_2=\pi-t_1=2{,}21$$




$$t=t_1+2\pi k=0{,}93+2\pi k \Rightarrow x=0{,}64+\frac{2\pi}{3}k\ ,\ k\in\mathbb{Z}$$
$$t=t_2+2\pi k=2{,}21+2\pi k \Rightarrow x=1{,}07+\frac{2\pi}{3}k\ ,\ k\in\mathbb{Z}$$

□

**Primjer 131.** Približno izračunaj sva rješenja jednadžbe $\tan\left(\frac{3}{2}-\frac{1}{5}x\right)=100$.

Rješenje.

$$t=\frac{3}{2}-\frac{1}{5}x$$
$$\tan t=100$$
$$t_1=\arctan 100=1{,}56$$

$$t=t_1+\pi k=1{,}56+\pi k \Rightarrow x=-0{,}30+5\pi k\ ,\ k\in\mathbb{Z}$$

□

**Primjedba.** Na jednadžbu iz Primjera 129 smo djelovali kosinusom i "poništili" arkus kosinus zato što je $\cos(\arccos t)=t$ kad god $\arccos t$ postoji, tj za $|t|\le 1$. U jednadžbi iz Primjera 130 nismo mogli arkus sinusom jednostavno "poništiti" sinus zato što je $\arcsin(\sin t)=t$ samo za $|t|\le\frac{\pi}{2}$, dok $\sin t$ postoji za svaki $t$. Zbog sličnog razloga nismo mogli u jednadžbi iz Primjera 131 arkus tangensom jednostavno "poništiti" tangens.