Zlatko Pavić

MATEMATIKA ZA INŽENJERE

UDŽBENIK S IZRAĐENIM PRIMJERIMA
FORMULE ZBIRKA ZADATAKA S RJEŠENJIMA

Vektori

Pravci i ravnine

Funkcije

Granična vrijednost i neprekinutost

Derivacije

Zlatko Pavić

MATEMATIKA ZA INŽENJERE

Slavonski Brod, 2008.

Izdavač

Recenzenti

Prof. dr. sc. Ivica Gusić

Prof. dr. sc. Vidosava Šimić

Prof. dr. sc. Dražan Kozak

Lektor

Mr. sc. Jasna Ažman

Korektor

Mr. sc. Zlatko Pavić

Tisak

Predgovor

Ovaj je udžbenik namijenjen studentima tehničkih fakulteta, sa željom autora da im olakša učenje matematike u prvoj godini studija. Isti može biti od pomoći i studentima prirodnih znanosti.

Udžbenik sadržava gradivo razvrstano u pet glava. U međusobnoj su vezi prve dvije glave i posljednje tri. Usvajanje gradiva olakšava priličan broj odabranih i u cijelosti izrađenih primjera. Za utvrđivanje i brušenje znanja studentima se preporučuje vježbanje zadataka iz zbirke, posebice onih koji su označeni crvenim kvadratićem.

Knjigu su popravili i uljepšali recenzenti prof. dr. sc. Ivica Gusić, prof. dr. sc. Vidosava Šimić, prof. dr. sc. Dražan Kozak i lektorica mr. sc. Jasna Ažman, te dugogodišnji radni kolega prof. dr. sc. Kajetan Šeper. Tom stručnom i estetskom doprinosu autor duguje posebnu zahvalnost.

Slavonski Brod,
lipanj 2008.

Autor:
Zlatko Pavić

Sadržaj

FORMULE

ZBIRKA ZADATAKA

UDŽBENIK

I. Vektori

II. Pravci i ravnine

III. Funkcije

IV. Granična vrijednost i neprekinutost

V. Derivacije

I. Vektori

Uvod s povijesnim osvrtom

Kroz nekoliko stoljeća je nastajao pojam vektora s težnjom da se obuhvati pojam sile i da se razviju jasne računske operacije sa silama.

Ideja o vektoru se pojavila još u 16. stoljeću u jednom radu o silama. Matematičku teoriju vektora su razvili, njemački matematičar Hermann Grassmann (1809 - 1877) te irski astronom i matematičar William Hamilton (1805 - 1865), polovinom 19. stoljeća.

Ideja i teorija su se razvijali dalje pa je već krajem 19. stoljeća uveden izrazito važan pojam vektorskog prostora. Od tada vektor postaje značajan matematički i općeznanstveni pojam.

Hermann Grassmann

William Hamilton

Lekcije

1. Veličine

Za sređivanje i daljnji razvoj sveukupnog znanja, a posebno tehničkih znanosti, bilo je bitno izdvojiti i poredati veličine. To promatranje i proučavanje veličina je započelo prije nekoliko tisuća godina, a završeno je krajem 19. stoljeća. Izdvojene su tri vrste veličina: **skalari** kao jednostavne veličine, **vektori** kao središnje veličine i **tenzori** kao složene veličine. Ubrzani razvoj tehnike u 20. stoljeću primorava znanstvenike na proučavanje veličina još složenijih od tenzora.

Skalari su veličine određene iznosom. Taj se iznos opisuje jednim brojem uz koji stoji mjerna jedinica. Primjeri skalarnih veličina su duljina (mjerna jedinica je m), masa (mjerna jedinica je kg), temperatura (mjerna jedinica je °C). Npr. duljina nekog štapa iznosi 7 m, masa nekog trupca iznosi 250 kg, temperatura zraka u nekoj prostoriji iznosi 26 °C. Naziv skalar potječe od latinske imenice scala (hrv. ljestvica). U znanosti je naziv skalar ustaljen od polovine 19. stoljeća.

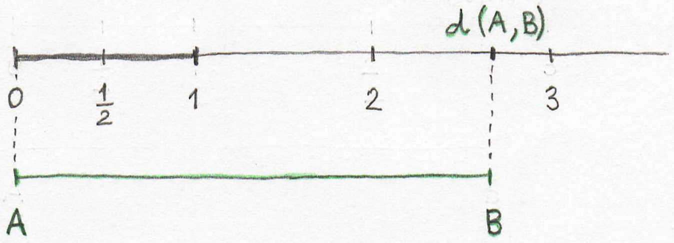
Vektori su veličine određene iznosom i smjerom. Iznos se opisuje kao kod skalara, a smjer kao usmjerena dužina ili kao polupravac tj. zraka. Primjeri vektorskih veličina su sila (mjerna jedinica iznosa je N), brzina (mjerna jedinica iznosa je m/s), ubrzanje (mjerna jedinica iznosa je m/s²). Naziv vektor potječe od latinske imenice vector (hrv. prenositelj). U matematiku i znanost taj je naziv uveo Hamilton polovinom 19. stoljeća.

Tenzori su veličine određene sustavom vektora između kojih postoji neka veza. Primjeri tenzorskih veličina su inercija, naprezanje, deformacija. Naziv tenzor potječe od latinske imenice tensio (hrv. napetost). Teorija tenzora je osnovana i razvijena krajem 19. stoljeća.

2. Geometrijska definicija vektora

2.1. Mjerni broj dužine – duljina dužine

Želimo li mjeriti dužine moramo predpostaviti da se svakoj dužini može pridružiti točno jedan pozitivni realni broj. Prvo se odredi jedinična dužina kojoj se pridruži broj 1 i ona postaje osnova daljnjeg mjerenja. Sada se svakoj dužini $\overline{AB}$, prema omjeru s jediničnom dužinom, može pridružiti jedan pozitivni realni broj (mjerni broj). Taj broj predstavlja duljinu dužine $\overline{AB}$ i bilježi se sa $d(A,B)$.

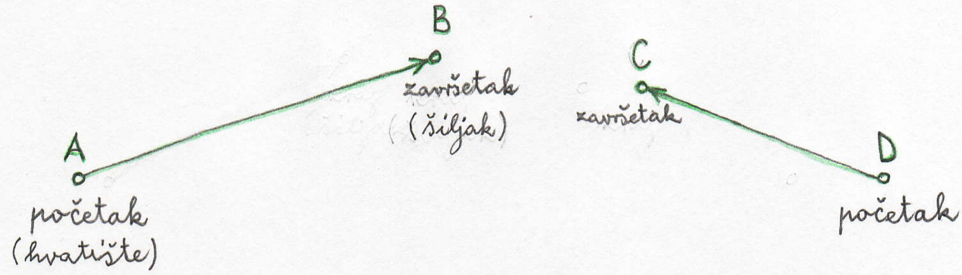


duljina dužine

2.2. Orijentirana dužina

Ideja o vektoru je nastala kao težnja da se približi pojam sile. Slikovito i razumljivo vektor se može odrediti geometrijski uz pomoć dvaju pojmova, orijentirane dužine i translacije.

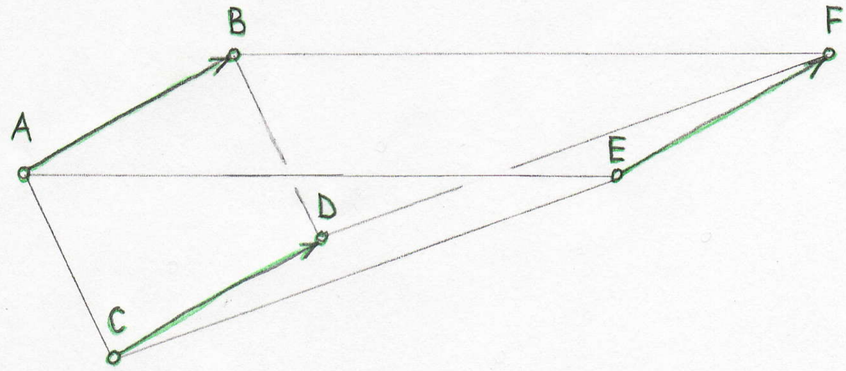
Dužina kojoj razlikujemo krajeve, jedan kao početak a drugi kao završetak, je **orijentirana** ili **usmjerena dužina**. Obično se crta s naglašenim početkom i završetkom te strjelicom u završetku. Orijentirana dužina $\overrightarrow{AB}$ je orijentirana od A prema B. Orijentirana dužina $\overrightarrow{DC}$ je orijentirana od D prema C. Orijentirane dužine $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{BA}$ su **suprotno** orijentirane.



orijentirane dužine

2.3. Translacija

Translacija u prostoru je usporedni ili paralelni pomak. Na slici su prikazane tri orijentirane dužine koje se translacijama mogu poklopiti.

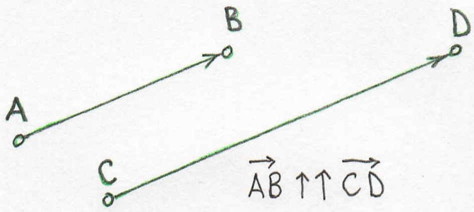


translatirane orijentirane dužine

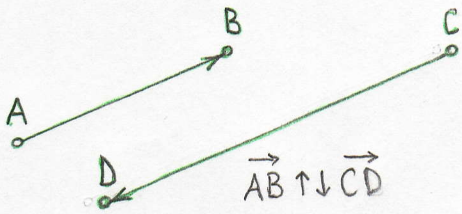
Zamislimo da svaka od ovih orijentiranih dužina predstavlja neku "silu". Tada je učinak sile $\overrightarrow{AB}$ u mjestu A isti kao učinak sila $\overrightarrow{CD}$ i $\overrightarrow{EF}$ u mjestima C i E (uz pretpostavku da u mjestima A, C i E ne djeluju nikakve (pa ni gravitacijska) druge sile). Uz taj se uvjet translacijom sile ne mijenja ništa drugo osim njenog hvatišta.

2.4. Istosmjerne i protusmjerne orijentirane dužine

Neka su usporedne orijentirane dužine $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{CD}$ translatirane na jedan pravac. Ako one na tom pravcu "pokazuju" istu orijentaciju (smjer), tada kažemo da su **istosmjerne**. Ako pokazuju suprotne orijentacije (smjerove), tada kažemo da su **protusmjerne**.



istosmjerne orijentirane dužine

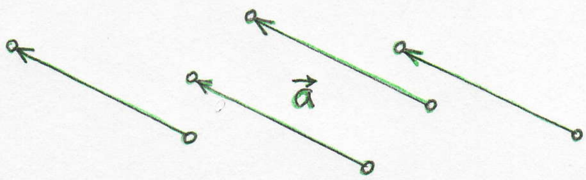


protusmjerne orijentirane dužine

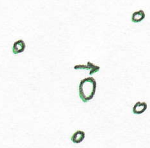
Sada se može uvesti pojam vektora.

2.5. Vektor

Definicija. Vektor je orijentirana dužina koja se može slobodno translatirati.



vektor



nul - vektor

Na lijevoj slici prikazane orijentirane dužine, poklopive translacijom, predstavljaju jedan vektor. Također se može reći da te orijentirane dužine pripadaju jednom vektoru.

Vektori se označavaju malim slovima sa strjelicom iznad ili svojim orijentiranim dužinama. Ako vektoru $\vec{a}$ pripadaju orijentirane dužine $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{CD}$, tada možemo pisati $\vec{a}=\overrightarrow{AB}$ ili $\vec{a}=\overrightarrow{CD}$. U praktičnim razmišljanjima vektor se gotovo uvijek poistovjećuje s jednom svojom orijentiranom dužinom.

Duljina ili **iznos** (norma ili modul) **vektora** $\vec{a}$ je duljina bilo koje njegove orijentirane dužine. Duljinu vektora $\vec{a}$ ćemo označavati s a ili $\|\vec{a}\|$.

Orijentacija ili **smjer vektora** $\vec{a}$ je orijentacija bilo koje njegove orijentirane dužine.

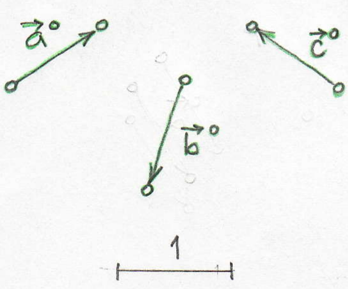
Dodatak definiciji. **Nul-vektor** $\vec{0}$ je vektor čije "orijentirane dužine" imaju početak i završetak u istoj točki. Duljina mu je 0, a orijentacija nije određena.

Nul-vektor se geometrijski predočava bilo kojom točkom u prostoru. Pored uobičajene oznake, $\vec{0}$, još se zapisuje i kao "orijentirana dužina" s istim početkom i završetkom: $\vec{0}=\overrightarrow{AA}=\overrightarrow{BB}$ itd.
Za vektore $\vec{a}\neq\vec{0}$ i $\vec{b}\neq\vec{0}$ kažemo da su **istosmjerni (protusmjerni)** ako su njihove orijentirane dužine istosmjerne (protusmjerne).

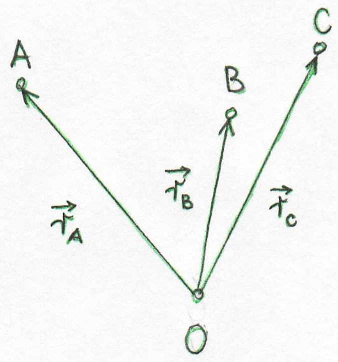
2.6. Jedinični vektori i radius-vektori

Jedinični vektor je svaki vektor duljine 1.

Radius-vektor točke A u odnosu na čvrsto odabranu točku O je vektor $\overrightarrow{OA}$.



jedinični vektori



radius-vektori

2.7. Kolinearni i komplanarni vektori

Vektori su **kolinearni** ako se mogu translatirati na jedan pravac, tj. ako leže na istom pravcu ili na usporednim pravcima.

Vektori su **komplanarni** ako se mogu translatirati na jednu ravninu, tj. ako leže na istoj ravnini ili na usporednim ravninama.

kolinearni vektori na kvadru

komplanarni vektori na kvadru

3. Osnovne operacije s vektorima

3.1. Množenje vektora brojem

Neka je α realni broj i neka je $\vec{a}$ vektor. Želimo odrediti vektor $\alpha\vec{a}$.

Definicija. $\alpha\vec{a}$ je vektor čija je
duljina : $\|\alpha\vec{a}\| = |\alpha|\,\|\vec{a}\|$,
orijentacija : $\alpha\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{a}$ za $\alpha > 0$ i $\vec{a} \neq \vec{0}$
$\alpha\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{a}$ za $\alpha < 0$ i $\vec{a} \neq \vec{0}$.

Napomena. Za $\alpha = 0$ ili $\vec{a} = \vec{0}$ vektor $\alpha\vec{a}$ je nul-vektor zato što je njegova duljina nula:

$$\|\alpha\vec{a}\| = |\alpha|\,\|\vec{a}\| = 0$$

jer je $|\alpha| = 0$ ili $\|\vec{a}\| = 0$. Dakle, $\alpha\vec{a} = \vec{0}$.

Podrazumijeva se da je $1\vec{a} = \vec{a}$. Vektor $-1\vec{a} = -\vec{a}$ je suprotni vektor vektora $\vec{a}$. Posebno za nul-vektor vrijedi: $-\vec{0} = \vec{0}$.

Za jedinični vektor $\vec{a}^{\,0}$ u smjeru vektora $\vec{a} \neq \vec{0}$ vrijedi:

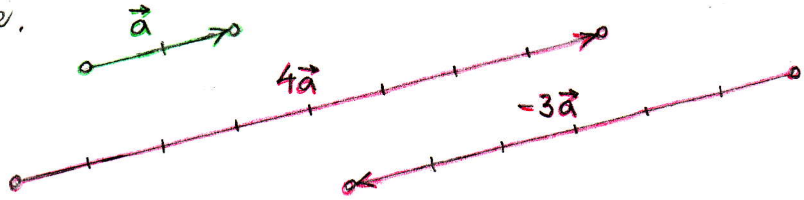
$$\vec{a}^{\,0} = \frac{1}{a}\vec{a}$$

jer je

$$\left\|\frac{1}{a}\vec{a}\right\| = \left|\frac{1}{a}\right|\|\vec{a}\| = \frac{1}{a}\,a = 1.$$

Primjer 1. Zadan je neki vektor $\vec{a}$ duljine 2 cm. Nacrtaj vektore $4\vec{a}$ i $-3\vec{a}$.

Rješenje.



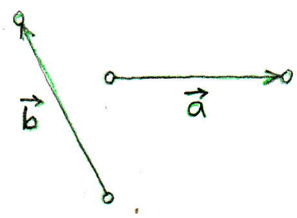
□

3.2. Zbrajanje vektora

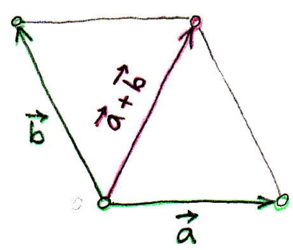
Želimo definirati zbroj dvaju zadanih vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$. Za početak, predpostavimo da ti vektori nisu kolinearni.

Prvo vektore $\vec{a}$ i $\vec{b}$ dovedemo u položaj sa zajedničkim početkom, a zatim nad njima razapnemo paralelogram. Zbroj $\vec{a}+\vec{b}$ vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$ je dijagonalni vektor čiji je početak u zajedničkom početku, a završetak u konstruiranom vrhu. Opisano pravilo zbrajanja se zove **pravilo paralelograma**.

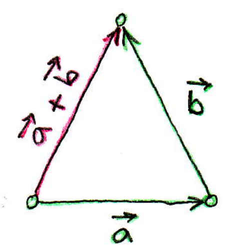
Zbrajanje vektora se može definirati na još jedan zgodan način, **pravilom trokuta**. Ono predpostavlja da su vektori koje zbrajamo poredani u dvočlani "orijentirani niz" (izaberemo prvi vektor, a drugi translatiramo tako da njegov početak padne u završetak prvoga). Vektor zbroja ima početak u početku prvog, a završetak u završetku drugog vektora.



zadani vektori



pravilo paralelograma



pravilo trokuta

Preostaje nam još odrediti zbroj dvaju kolinearnih vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$.

Pravilo trokuta se u kolinearnom slučaju primjenjuje na isti, već opisani, način:

Pravilo paralelograma se također može primijeniti u kolinearnom slučaju, ali na suptilan i složen način:

$\vec{b}$ teži $\vec{0}$ $\Rightarrow$ $\vec{a}+\vec{b}$ teži $\vec{a}$ $\qquad$ φ teži 0 $\Rightarrow$ $\vec{a}+\vec{b}_\varphi$ teži $\vec{a}+\vec{b}$

Pravila paralelograma i trokuta su ekvivalentna, iz jednog slijedi drugo. Pravilo paralelograma je uvjerljivije kao definicijsko pravilo zbroja vektora (zbroja sila), dok je pravilo trokuta pogodnije u računskim primjenama.

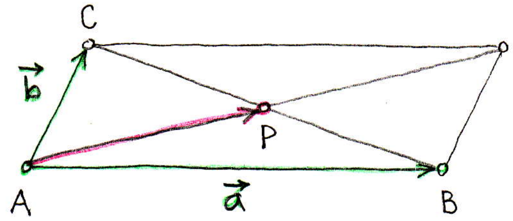
Razliku $\vec{a}-\vec{b}$ vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$ određujemo zbrojem $\vec{a}+(-\vec{b})$ vektora $\vec{a}$ i $-\vec{b}$.

Primjer 2. U trokutu ABC točka P je polovište stranice $\overline{BC}$. Pomoću vektora $\vec{a}=\overrightarrow{AB}$ i $\vec{b}=\overrightarrow{AC}$ izrazi vektor $\overrightarrow{AP}$.

Rješenje. Sliku trokuta dopunimo paralelogramom razapetim vektorima $\vec{a}$ i $\vec{b}$, a zatim primijenimo pravilo paralelograma:

$$2\overrightarrow{AP} = \vec{a} + \vec{b}$$

$$\overrightarrow{AP} = \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}$$

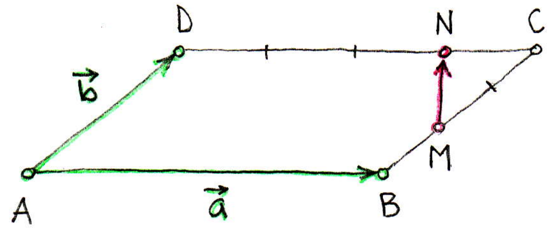


□

Primjer 3. U paralelogramu ABCD točka M leži na stranici $\overline{BC}$ i dvostruko je bliža vrhu B nego C, a točka N leži na stranici $\overline{CD}$ i trostruko je bliža vrhu C nego D. Pomoću vektora $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ i $\vec{b} = \overrightarrow{AD}$ izrazi vektor $\overrightarrow{MN}$.

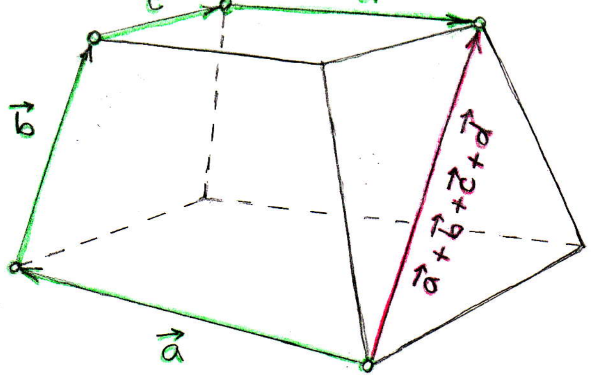
Rješenje. Primjenom pravila trokuta rastavimo vektor $\overrightarrow{MN}$ (početak M i završetak N se mogu povezati "orijentiranim nizom" preko bilo koje točke):

$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{CN} =$$
$$= \frac{2}{3}\vec{b} - \frac{1}{4}\vec{a}$$



□

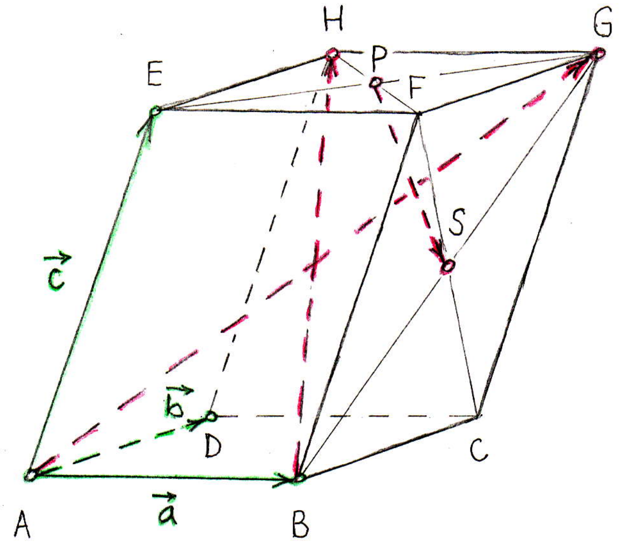
Pravilo trokuta ima skladno poopćenje do **pravila prostornog mnogokuta**. Zbroj višečlanog "orijentiranog niza" vektora je vektor čiji je početak u početku prvog, a završetak u završetku zadnjeg vektora niza.



pravilo mnogokuta

Primjer 4. Zadan je paralelopiped ABCDEFGH (geometrijsko tijelo omeđeno s 3 para usporednih strana, prostorna analogija ravninskog paralelograma). Pomoću vektora $\vec{a}=\overrightarrow{AB}$, $\vec{b}=\overrightarrow{AD}$ i $\vec{c}=\overrightarrow{AE}$ izrazi vektore $\overrightarrow{AG}$, $\overrightarrow{BH}$ i $\overrightarrow{PS}$ (P je središte strane EFGH, S je središte strane BCGF).

Rješenje. Najkraći put do traženih izraza vodi preko "orijentiranih nizova" vektora:



$$\overrightarrow{AG}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CG}=$$
$$=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$$

(ovaj rezultat upućuje na pomisao da se pravilo paralelograma može poopćiti do **pravila paralelopipeda**)

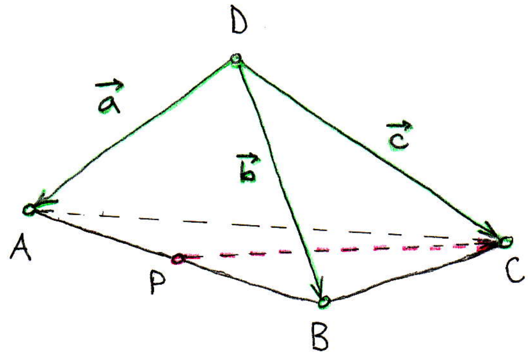
$$\overrightarrow{BH}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DH}=$$
$$=-\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$$

$$\overrightarrow{PS}=\frac{1}{2}\vec{a}-\frac{1}{2}\vec{c}$$

□

Primjer 5. U tetraedru ABCD točka P je polovište brida brida $\overline{AB}$. Pomoću vektora $\vec{a}=\overrightarrow{DA}$, $\vec{b}=\overrightarrow{DB}$ i $\vec{c}=\overrightarrow{DC}$ prikaži vektor $\overrightarrow{PC}$.

Rješenje.



$$\overrightarrow{PC}=\overrightarrow{PD}+\overrightarrow{DC}=$$
$$=-\overrightarrow{DP}+\overrightarrow{DC}=$$
$$=-\frac{1}{2}(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=$$
$$=-\frac{1}{2}\vec{a}-\frac{1}{2}\vec{b}+\vec{c}$$

□

3.3. Računska pravila zbrajanja vektora i množenja vektora brojevima

U svakom se računu služimo nekim zakonima - pravilima. Pravila početnog vektorskog računa (zbrajanje vektora i množenje vektora brojevima) se podudaraju s pravilima običnog računa (zbrajanje i množenje brojeva). Nekim smo se pravilima već koristili u primjerima. Sada ćemo zapisati sva korisna pravila.

Za bilo koje brojeve α, β i vektore $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ vrijedi:

(1) $\vec{b}+\vec{a}=\vec{a}+\vec{b}$ — komutativnost

(2) $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c}) \overset{\text{kraće}}{=\!=} \vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$ — asocijativnost

(3) $\vec{a}+\vec{0}=\vec{a}$ — postojanje neutralnog

(4) $\vec{a}+(-\vec{a})=\vec{0}$ — postojanje suprotnog

(5) $\alpha(\beta\vec{a})=(\alpha\beta)\vec{a} \overset{\text{kraće}}{=\!=} \alpha\beta\vec{a}$ — homogenost

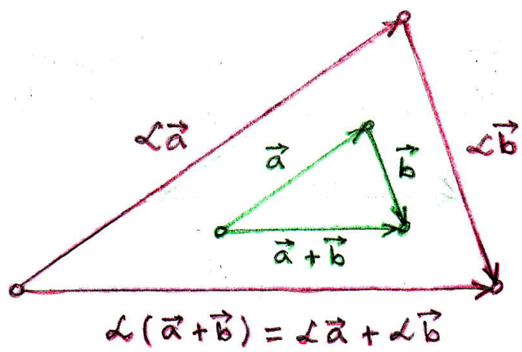
(6) $(\alpha+\beta)\vec{a}=\alpha\vec{a}+\beta\vec{a}$ — distributivnost

(7) $\alpha(\vec{a}+\vec{b})=\alpha\vec{a}+\alpha\vec{b}$ — distributivnost

(8) $1\vec{a}=\vec{a}$ — aksiom množenja jedinicom

Pravilo (1) je sastavni dio definicije zbroja vektora kod kojeg nije bitan poredak. Pravilo (2) se lako dokazuje pravilom mnogokuta, a pravila (3) i (4) pravilom trokuta. U dokazu pravila (5) treba promatrati slučajeve $\alpha\beta=0$, $\alpha\beta>0$ i $\alpha\beta<0$. U dokazivanju pravila (6) prvo se dokaže jednakost duljina vektora na lijevoj i desnoj strani, a zatim za slučajeve $\alpha+\beta=0$, $\alpha+\beta>0$ i $\alpha+\beta<0$ podudarnost orijentacija tih vektora.

Pravilo (7) se može dokazati uz pomoć poučka o sličnosti trokuta i pravila trokuta za zbrajanje vektora.



Pravilo (8) se ne može dokazati i prihvaća se kao aksiom.

4. Prikazivanje vektora - linearne kombinacije

4.1. Vektori na pravcu, u ravnini i u prostoru

Uz pomoć početnog vektorskog računa se može približiti pojam dimenzije.

Na pravcu p odaberemo jedan vektor $\vec{a} \neq \vec{0}$. Neka je $\vec{x}$ bilo koji vektor tog pravca. Tada postoji broj α tako da je

$$\vec{x} = \alpha \vec{a}$$

(na slici $\vec{x} \approx -2\vec{a}$). Ovaj izraz predstavlja analitičku formulu kolinearnosti. Desna strana izraza se zove linearna kombinacija vektora $\vec{a}$ s koeficijentom α. Dakle, bilo koji vektor pravca se može predočiti linearnom kombinacijom jednog odabranog nenul-vektora. Zato se može kazati da je dimenzija pravca jednaka 1.

U ravnini π izdvojimo dva vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$ koji nisu kolinearni. Neka je $\vec{x}$ bilo koji vektor te ravnine. Nad vektorima koji su kolinearni s vektorima $\vec{a}$ i $\vec{b}$ razapnemo paralelogram u kojem je $\vec{x}$ dijagonalni vektor, kada sva tri vektora imaju zajednički početak. Taj nam paralelogram govori da postoje brojevi α i β tako da je

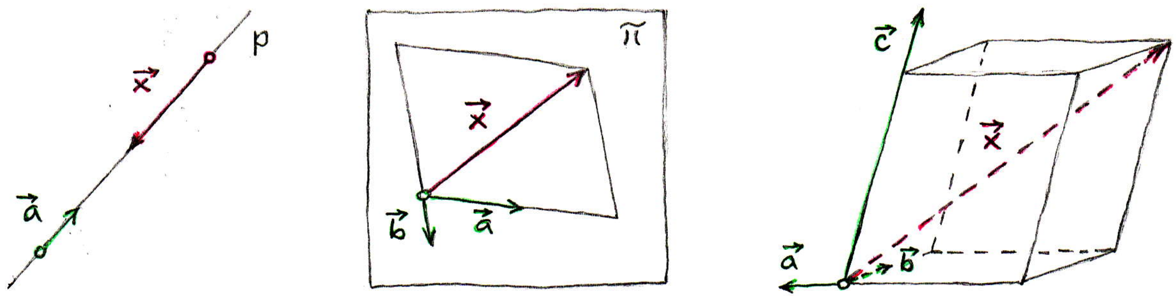
$$\vec{x} = \alpha \vec{a} + \beta \vec{b}$$

(na slici $\vec{x} \approx 2\vec{a} - 3\vec{b}$). Izraz predstavlja analitičku formulu komplanarnosti. Desna strana izraza je linearna kombinacija vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$ s koeficijentima α i β. Kratko, svaki se vektor ravnine može zapisati kao linearna kombinacija dvaju odabranih nekolinearnih vektora. Opravdano je reći da je dimenzija ravnine jednaka 2.

U prostoru odaberemo tri vektora $\vec{a}$, $\vec{b}$ i $\vec{c}$ koji nisu komplanarni. Neka je $\vec{x}$ bilo koji vektor u prostoru. Nad vektorima koji su kolinearni s vektorima $\vec{a}$, $\vec{b}$ i $\vec{c}$ razapnemo paralelopiped u kojem je $\vec{x}$ dijagonalni vektor, kada sva četiri vektora imaju zajednički početak. Ovaj paralelopiped kazuje da postoje brojevi α, β i γ tako da je

$$\vec{x} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c}$$

(na slici $\vec{x} \approx -3\vec{a} + 2\vec{b} + \frac{3}{4}\vec{c}$). Izraz predstavlja analitičku formulu prostornosti. Njegova desna strana je linearna kombinacija vektora $\vec{a}$, $\vec{b}$ i $\vec{c}$ s koeficijentima α, β i γ. Kratko, svaki se vektor prostora može izraziti kao linearna kombinacija triju odabranih nekomplanarnih vektora. Zato je dimenzija našeg prostora jednaka 3, odnosno mi živimo u trodimenzijskom prostoru.



$\vec{x} = \alpha\vec{a}$ $\qquad$ $\vec{x} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b}$ $\qquad$ $\vec{x} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c}$

4.2. Linearno zavisni i nezavisni vektori

Vektori su **linearno zavisni** ako se bar jedan od njih može izraziti kao linearna kombinacija preostalih. U protivnom, vektori su **linearno nezavisni**.

Nul-vektor $\vec{0}$ je linearno zavisan sa svakim vektorom $\vec{a}$ jer je $\vec{0} = 0\vec{a}$.

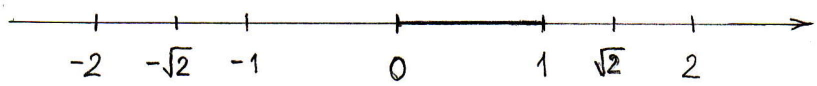
Dva kolinearna vektora su linearno zavisna, tri komplanarna vektora su linearno zavisna, kao i bilo koja četiri vektora.

Dva nekolinearna vektora su linearno nezavisna, kao i tri nekomplanarna.

5. Vektori u koordinatnom sustavu

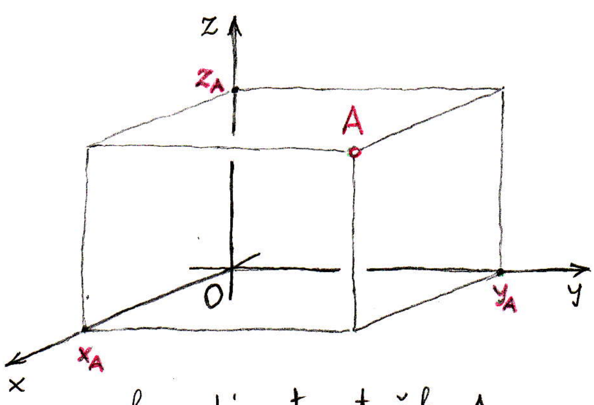
5.1. Koordinatni sustav u prostoru

Prihvatimo li hipotezu da točaka pravca ima isto koliko i realnih brojeva, lako dolazimo do geometrijske slike skupa realnih brojeva. Prvo na pravcu izdvojimo ishodište O kojem pridružimo broj 0, a zatim s jedne strane od ishodišta odredimo jediničnu dužinu. Nakon toga točkama pravca, prema strani od ishodišta i prema omjeru sa jediničnom dužinom, pridružujemo pozitivne ili negativne realne brojeve. Smjer u kojem brojevi rastu označimo strjelicom (pozitivni smjer). Tako nastaje **brojevni pravac**.



brojevni pravac

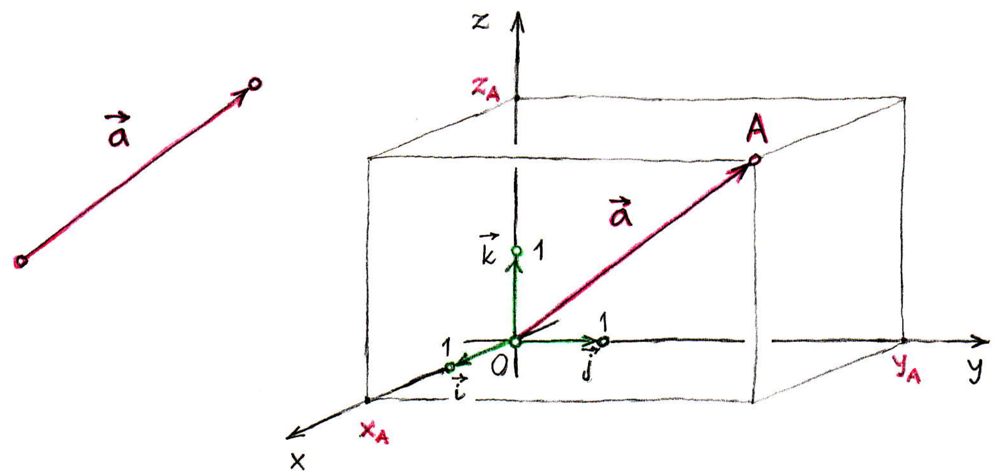
Koordinatni sustav u prostoru određuju tri međusobno okomita brojevna pravca ili osi x, y i z koje prolaze ishodištem O. Taj nam sustav omogućava da položaj bilo koje točke u prostoru zapišemo njenim jedinstvenim koordinatama. Dakle, uz prostornu točku A se vežu njezine koordinate: apscisa x_A, ordinata y_A i aplikata z_A. Zapisuje se $A(x_A, y_A, z_A)$.



koordinate točke A

5.2. Vektor u koordinatnom sustavu

Na svakoj osi koordinatnog sustava istaknimo jedan jedinični vektor, pozitivno orijentiran: $\vec{i}$ na osi x, $\vec{j}$ na osi y i $\vec{k}$ na osi z. Želimo bilo koji vektor $\vec{a}$ u prostoru prikazati kao linearnu kombinaciju jediničnih vektora $\vec{i}$, $\vec{j}$ i $\vec{k}$. Prvo, ako je potrebno, vektor $\vec{a}$ translatiramo tako da mu početak padne u ishodište O, a zatim njegov završetak označimo s A. Sada je vektor $\vec{a} = \vec{OA}$ radius-vektor $\vec{r}_A$ točke A.



koordinatni prikaz vektora $\vec{a}$

Slika i pravilo paralelopipeda pokazuju da je

$$\vec{a} = \vec{OA} = \vec{r}_A = x_A\vec{i} + y_A\vec{j} + z_A\vec{k}.$$

Ovaj je koordinatni prikaz vektora $\vec{a}$ jedinstven. Brojevi x_A, y_A i z_A (koordinate završetka A) su **skalarne koordinate** vektora $\vec{a}$. Vektori $x_A\vec{i}$, $y_A\vec{j}$ i $z_A\vec{k}$ su **vektorske koordinate** vektora $\vec{a}$.

Koordinatni sustav i računska pravila omogućavaju pogodan rad s vektorima.

Primjer 6. Prikaži vektor $\vec{d} = 2\vec{i} - 7\vec{j} - 6\vec{k}$ kao linearnu kombinaciju vektora $\vec{a} = 2\vec{i} - \vec{k}$, $\vec{b} = -3\vec{j} + 5\vec{k}$ i $\vec{c} = \vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k}$.

Rješenje. Treba izračunati koeficijente α, β i γ linearne kombinacije

$$\vec{d} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c}.$$

Uvrstimo koordinate svih vektora,

$$2\vec{i} - 7\vec{j} - 6\vec{k} = \alpha(2\vec{i} - \vec{k}) + \beta(-3\vec{j} + 5\vec{k}) + \gamma(\vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k}),$$

a zatim sredimo desnu stranu,

$$2\vec{i} - 7\vec{j} - 6\vec{k} = (2\alpha + \gamma)\vec{i} + (-3\beta + \gamma)\vec{j} + (-\alpha + 5\beta + 2\gamma)\vec{k}.$$

Zbog jedinstvenosti koordinatnog prikaza možemo izjednačiti koordinate vektora na lijevoj strani s koordinatama vektora na desnoj strani:

$$\begin{aligned} 2\alpha \qquad\quad + \gamma &= 2 \\ -3\beta + \gamma &= -7 \\ -\alpha + 5\beta + 2\gamma &= -6 \end{aligned}$$

Rješenje ovog sustava linearnih jednadžbi je trojka brojeva $\alpha = 3$, $\beta = 1$, $\gamma = -4$. Tražena linearna kombinacija je

$$\vec{d} = 3\vec{a} + \vec{b} - 4\vec{c}.$$

□

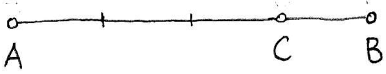
5.3. Koordinate vektora $\overrightarrow{AB}$

Neka je $A(x_A, y_A, z_A)$ i $B(x_B, y_B, z_B)$. Tada je

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AB} &= \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \vec{r}_B - \vec{r}_A = \\ &= x_B\vec{i} + y_B\vec{j} + z_B\vec{k} - x_A\vec{i} - y_A\vec{j} - z_A\vec{k} = \\ &= (x_B - x_A)\vec{i} + (y_B - y_A)\vec{j} + (z_B - z_A)\vec{k}. \end{aligned}$$

Primjer 7. Neka je $A(2, 0, -3)$ i $B(1, 4, 0)$. Odredi koordinate točke C koja leži na dužini $\overline{AB}$ i koja je trostruko bliže točki B nego točki A.

Rješenje. Označimo s x, y i z koordinate točke C, tj. $C(x,y,z)$.
Uz pomoć slike slijedi račun:



$$\overrightarrow{AC} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AB}$$

$$(x-2)\vec{i} + y\vec{j} + (z+3)\vec{k} = \frac{3}{4}\left[(1-2)\vec{i} + (4-0)\vec{j} + (0+3)\vec{k}\right]$$

$$(x-2)\vec{i} + y\vec{j} + (z+3)\vec{k} = -\frac{3}{4}\vec{i} + 3\vec{j} + \frac{9}{4}\vec{k}$$

$$x-2 = -\frac{3}{4}, \quad y = 3, \quad z+3 = \frac{9}{4}$$

$$x = \frac{5}{4}, \quad y = 3, \quad z = -\frac{3}{4}$$

$$C\left(\frac{5}{4}, 3, -\frac{3}{4}\right)$$

Slično, do rješenja se može doći računanjem radius-vektora
$$\vec{r}_C = \frac{1}{4}\vec{r}_A + \frac{3}{4}\vec{r}_B = \frac{5}{4}\vec{i} + 3\vec{j} - \frac{3}{4}\vec{k}.$$

□

5.4. Duljina vektora $\vec{a}$

Koordinate vektora $\vec{a}$ je skladno označiti s a_x, a_y i a_z.
Neka je dakle

$$\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}.$$

Tada je duljina vektora $\vec{a}$ (duljina prostorne dijagonale kvadra s bridovima $|a_x|$, $|a_y|$ i $|a_z|$) jednaka

$$a = \|\vec{a}\| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}.$$

Primjer 8. Odredi jedinični vektor u smjeru vektora $\vec{a} = 3\vec{j} - 4\vec{k}$.

Rješenje.
$$a = \sqrt{0^2 + 3^2 + (-4)^2} = 5$$

$$\vec{a}^{\,0} = \frac{1}{a}\vec{a} = \frac{1}{5}(3\vec{j} - 4\vec{k}) = \frac{3}{5}\vec{j} - \frac{4}{5}\vec{k}$$

□

Primjer 9. U smjeru vektora $\vec{a} = 3\vec{i} - 6\vec{j} + 2\vec{k}$ odredi vektor duljine 14.

Rješenje. Traženi vektor označimo s $\vec{b}$. Tada je

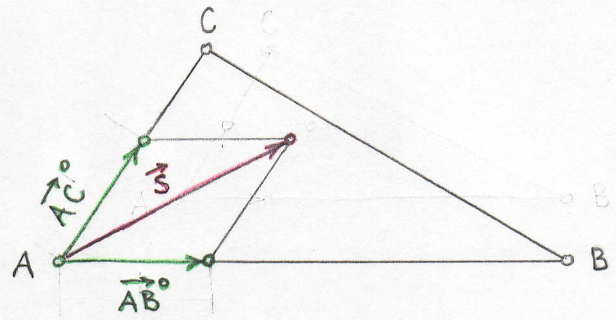
$$\vec{b} = 14\vec{a}^{\,0} = 14\frac{1}{a}\vec{a} = \frac{14}{a}\vec{a} =$$

$$= \frac{14}{7}(3\vec{i} - 6\vec{j} + 2\vec{k}) = 6\vec{i} - 12\vec{j} + 4\vec{k}.$$

□

Primjer 10. U trokutu s vrhovima $A(-1,1,0)$, $B(1,0,-2)$ i $C(0,1,0)$ odredi jedinični vektor simetrale kuta pri vrhu A.

Rješenje.



$$\vec{AB} = 2\vec{i} - \vec{j} - 2\vec{k}$$

$$\vec{AB}^{\circ} = \frac{1}{\|\vec{AB}\|}\vec{AB} = $$

$$= \frac{2}{3}\vec{i} - \frac{1}{3}\vec{j} - \frac{2}{3}\vec{k}$$

$$\vec{AC} = \vec{i} = \vec{AC}^{\circ}$$

$$\vec{s} = \vec{AB}^{\circ} + \vec{AC}^{\circ} = \frac{5}{3}\vec{i} - \frac{1}{3}\vec{j} - \frac{2}{3}\vec{k} = \frac{1}{3}(5\vec{i} - \vec{j} - 2\vec{k})$$

$$\vec{s}^{\circ} = \frac{1}{\|5\vec{i} - \vec{j} - 2\vec{k}\|}(5\vec{i} - \vec{j} - 2\vec{k}) = \frac{\sqrt{30}}{30}(5\vec{i} - \vec{j} - 2\vec{k})$$

□

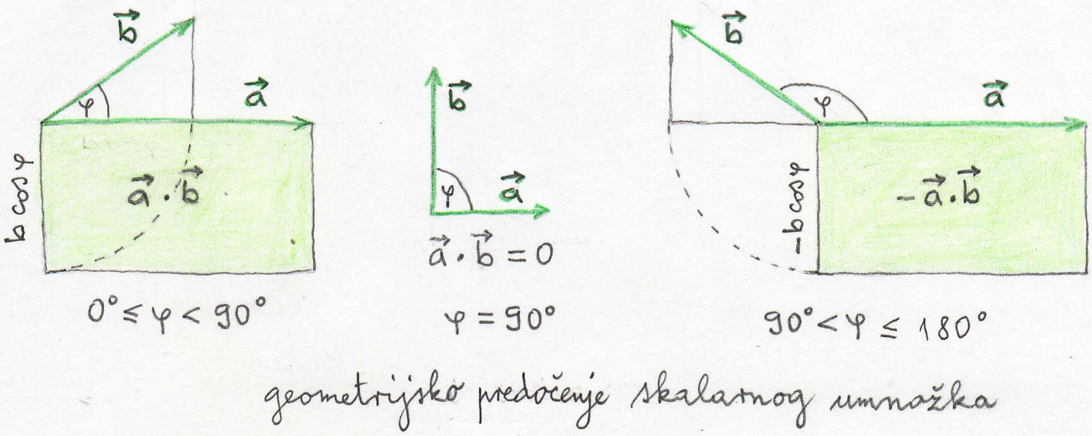
Početni vektorski račun ćemo obogatiti s još dvije nove operacije, skalarnim i vektorskim množenjem. Krećemo s jednostavnijom operacijom, skalarnim umnoškom.

6. Skalarni umnožak vektora

6.1. Definicija skalarnog umnožka

Definicija. **Skalarni umnožak** (ili **produkt**) $\vec{a} \cdot \vec{b}$ (čita se a in b) vektora $\vec{a} \neq \vec{0}$ i $\vec{b} \neq \vec{0}$ koji zatvaraju kut φ je broj

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = ab\cos\varphi .$$



geometrijsko predočenje skalarnog umnožka

Dodatak definiciji. Ako je $\vec{a} = \vec{0}$ ili $\vec{b} = \vec{0}$, tada je $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$.

Primjer 11. Vektori $\vec{a}$ i $\vec{b}$ zatvaraju kut od 60°. Prvi je dug 80 [cm], a drugi 5 [m]. Izračunaj skalarni umnožak vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$.

Rješenje. $a = 80\ [\mathrm{cm}] = \frac{4}{5}\ [\mathrm{m}]$, $b = 5\ [\mathrm{m}]$, $\varphi = 60°$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = ab\cos\varphi = \frac{4}{5} \cdot 5 \cdot \frac{1}{2} = 2\ [\mathrm{m}^2]$$

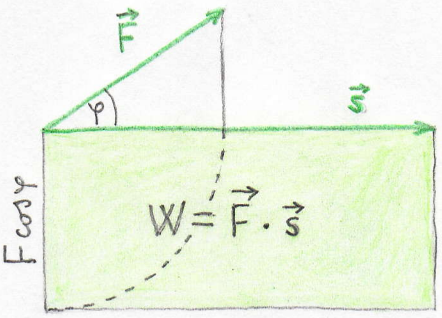
□

6.2. Značenje skalarnog umnoška

Rad W konstantne sile $\vec{F}$ duž orijentiranog pravocrtnog puta $\vec{s}$ je razmjeran veličinama F, s i $\cos\varphi$ pa je

$$W = Fs\cos\varphi = \vec{F} \cdot \vec{s}.$$

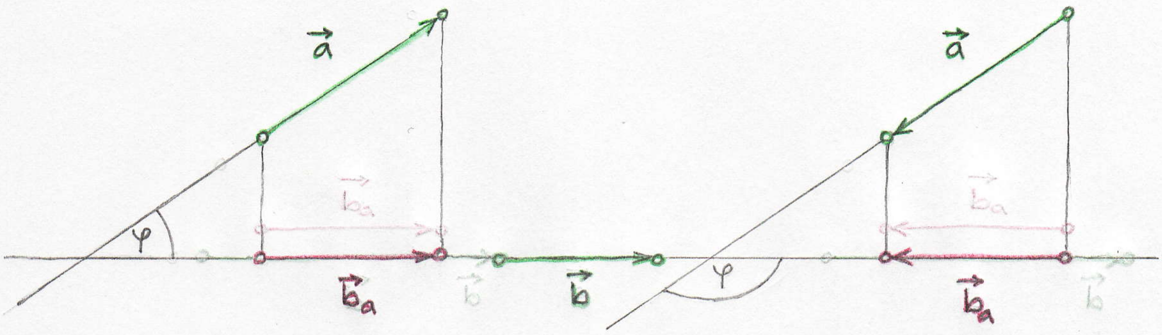
Dakle, skalarni umnožak predstavlja rad.



rad sile $\vec{F}$ duž puta $\vec{s}$

6.3. Projekcija vektora na vektor

Neka su $\vec{a}$ i $\vec{b}$ dva vektora u prostoru, $\vec{b} \neq \vec{0}$. Vektor $\vec{a}$ translatiramo tako da se nađe s vektorom $\vec{b}$ u istoj ravnini. Vektor koji nastaje okomitom projekcijom vektora $\vec{a}$ na vektor $\vec{b}$ (geometrijski jasnije okomitom projekcijom vektora $\vec{a}$ na neki pravac vektora $\vec{b}$) se zove **vektorska projekcija** $\vec{a}$ na $\vec{b}$ i označava s $\vec{b}_a$.



projekcija vektora $\vec{a}$ na vektor $\vec{b}$

Uz pojam vektorske projekcije se veže i skalarna projekcija. Vektori $\vec{b}_a$ i $\vec{b}$ su kolinearni pa postoji linearna kombinacija $\vec{b}_a = \alpha \vec{b}^{\,0}$. Broj α predstavlja **skalarnu projekciju** $\vec{a}$ na $\vec{b}$ koju ćemo na kraju označiti s $\bar{b}_a$.

Za lijevu sliku $\alpha = \|\vec{b}_a\|$, a za desnu $\alpha = -\|\vec{b}_a\|$. Neka je φ kut između vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$. Iz definicijske formule skalarnog umnožka $\vec{a} \cdot \vec{b} = ab\cos\varphi$ izlazi

$$\cos\varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{ab}.$$

Slijedi

$$\alpha = \pm \|\vec{b}_a\| = a\cos\varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{b}.$$

Na kraju zapišimo izraze za skalarnu $\bar{b}_a$ i vektorsku projekciju $\vec{b}_a$ vektora $\vec{a}$ na vektor $\vec{b}$:

$$\bar{b}_a = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{b}, \quad \vec{b}_a = \bar{b}_a \vec{b}^{\,0}.$$

6.4. Računska pravila skalarnog umnožka

Zapisat ćemo pravila koja se uz skalarno množenje vektora odnose i na množenje vektora brojem te zbrajanje vektora.

Za bilo koje brojeve α, β i vektore $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ vrijedi:

(1) $\vec{b}\cdot\vec{a} = \vec{a}\cdot\vec{b}$ komutativnost

(2) $\vec{a}\cdot\vec{a} = a^2$, $a = \sqrt{\vec{a}\cdot\vec{a}}$

(3) $(\alpha\vec{a})\cdot(\beta\vec{b}) = (\alpha\beta)(\vec{a}\cdot\vec{b}) \overset{\text{kraće}}{=\!=} \alpha\beta\,\vec{a}\cdot\vec{b}$ homogenost

(4) $\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c}) = \vec{a}\cdot\vec{b} + \vec{a}\cdot\vec{c}$ distributivnost

(5) $\vec{a}\cdot\vec{b} = 0 \iff \vec{a}\perp\vec{b}$ $(\vec{a}\neq\vec{0}, \vec{b}\neq\vec{0})$ uvjet okomitosti

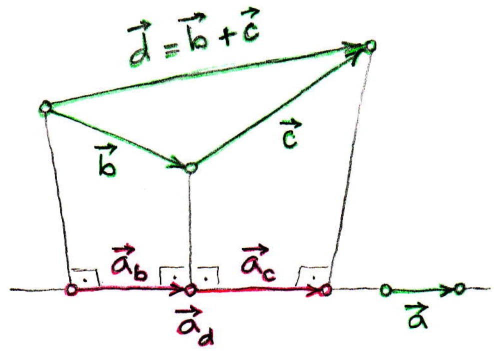
Pravila (1), (2) i (3) su neposredna posljedica definicije skalarnog umnožka.

Dokaz pravila (5). Predpostavlja se da nijedan od vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$ nije $\vec{0}$. Neka je φ kut između $\vec{a}$ i $\vec{b}$. Tada vrijedi:

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = 0 \iff ab\cos\varphi = 0 \iff \cos\varphi = 0 \iff \vec{a}\perp\vec{b}.$$

Dokaz pravila (4). Ako je $\vec{a} = \vec{0}$, formula vrijedi trivijalno $(0 = 0 + 0)$. Predpostavimo dalje da je $\vec{a}\neq\vec{0}$. Trokut vektora $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d} = \vec{b}+\vec{c}$ okomito projiciramo na vektor $\vec{a}$. Za vektorske projekcije vrijedi $\vec{a}_b + \vec{a}_c = \vec{a}_d$. Vektori $\vec{a}_b, \vec{a}_c$ i $\vec{a}_d$ su kolinearni pa i za skalarne projekcije vrijedi

$$\bar{a}_b + \bar{a}_c = \bar{a}_d .$$



projekcija na vektor $\vec{a}$

Zapiše li se ta veza pomoću skalarnog umnožka dobiva se

$$\frac{\vec{b}\cdot\vec{a}}{a} + \frac{\vec{c}\cdot\vec{a}}{a} = \frac{(\vec{b}+\vec{c})\cdot\vec{a}}{a}$$

što nakon množenja s a postaje formula distributivnosti.

Primjer 12. Izračunaj duljinu vektora $\vec{a} = 2\vec{u} - 3\vec{v}$, ako je $u = 4$ m , $v = 1$ m i $\varphi = \measuredangle(\vec{u},\vec{v}) = 120^\circ$.

Rješenje. Iz računskih pravila (1)–(4) i definicije skalarnog umnožka slijedi:

$$a = \sqrt{\vec{a}\cdot\vec{a}} = \sqrt{(2\vec{u}-3\vec{v})\cdot(2\vec{u}-3\vec{v})} =$$
$$= \sqrt{4\vec{u}\cdot\vec{u} - 6\vec{u}\cdot\vec{v} - 6\vec{v}\cdot\vec{u} + 9\vec{v}\cdot\vec{v}} =$$
$$= \sqrt{4u^2 - 12\vec{u}\cdot\vec{v} + 9v^2} = \sqrt{4u^2 - 12uv\cos\varphi + 9v^2} =$$
$$= \sqrt{4\cdot 4^2 - 12\cdot 4\cdot 1\cdot(-\tfrac{1}{2}) + 9\cdot 1^2} = \sqrt{97} \quad m$$

□

Primjer 13. Vektori $\vec{a} = \vec{u} - 4\vec{v}$ i $\vec{b} = 2\vec{u} + \vec{v}$ su okomiti. Vektor $\vec{u}$ je dvostruko dulji od vektora $\vec{v}$. Koliki je kut između vektora $\vec{u}$ i $\vec{v}$?

Rješenje. Označimo sa $\varphi = \measuredangle(\vec{u}, \vec{v})$. Iz uvjeta okomitosti (5), ostalih pravila te činjenice da je $u = 2v$, dobiva se:

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = (\vec{u} - 4\vec{v})\cdot(2\vec{u} + \vec{v}) = 0$$
$$2u^2 - 7uv\cos\varphi - 4v^2 = 0$$
$$8v^2 - 14v^2\cos\varphi - 4v^2 = 0$$
$$\cos\varphi = \frac{2}{7}$$
$$\varphi = 73^\circ 23' 54''$$

□

6.5. Formula u koordinatnom sustavu

Iz koordinatnih prikaza $\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$, $\vec{b} = b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k}$ i računskih pravila slijedi:

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = (a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k})\cdot(b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k}) =$$
$$= a_xb_x\vec{i}\cdot\vec{i} + a_xb_y\vec{i}\cdot\vec{j} + a_xb_z\vec{i}\cdot\vec{k} +$$
$$+ a_yb_x\vec{j}\cdot\vec{i} + a_yb_y\vec{j}\cdot\vec{j} + a_yb_z\vec{j}\cdot\vec{k} +$$
$$+ a_zb_x\vec{k}\cdot\vec{i} + a_zb_y\vec{k}\cdot\vec{j} + a_zb_z\vec{k}\cdot\vec{k} =$$
$$= a_xb_x + a_yb_y + a_zb_z$$

jer je po pravilu (2) $\vec{i}\cdot\vec{i} = \vec{j}\cdot\vec{j} = \vec{k}\cdot\vec{k} = 1$, a po pravilu (5) preostali skalarni umnošci su jednaki 0.

Još jednom zapišimo zgodnu formulu za računanje skalarnog umnožka u koordinatnom sustavu:

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z \,.$$

Primjer 14. Izračunaj rad sile $\vec{F} = \underbrace{6\vec{i}+3\vec{j}-4\vec{k}}_{\text{(koordinate izmjerene u Newtonima)}}$ duž puta $\vec{s} = 5\vec{i}-\vec{j}+2\vec{k}$ (koordinate izmjerene u metrima).

Rješenje. $W = \vec{F}\cdot\vec{s} = 6\cdot 5 + 3\cdot(-1) + (-4)\cdot 2 = 19$ Nm

□

Primjer 15. Izračunaj kut između vektora $\vec{a} = \vec{i} - 3\vec{k}$ i $\vec{b} = 4\vec{j} + \vec{k}$.

Rješenje.

$$\cos\varphi = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{ab} = \frac{-3}{\sqrt{10}\cdot\sqrt{17}} = -\frac{3\sqrt{170}}{170}$$

$$\varphi = 103^\circ\, 18'\, 08''$$

□

Primjer 16. Izračunaj kut koji vektor $\vec{a} = \vec{i} - \vec{k}$ zatvara s pozitivnim smjerom osi z.

Rješenje.

$$\varphi = \measuredangle(\vec{a}, \vec{k})$$

$$\cos\varphi = \frac{\vec{a}\cdot\vec{k}}{ak} = \frac{-1}{\sqrt{2}\cdot 1} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\varphi = 135^\circ$$

□

Primjer 17. Odredi skalarnu i vektorsku projekciju vektora $\vec{a} = 2\vec{i}+\vec{j}-4\vec{k}$ na vektor $\vec{b} = \vec{i} - 2\vec{k}$.

Rješenje.

$$\bar{b}_a = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{b} = \frac{10}{\sqrt{5}} = 2\sqrt{5}$$

$$\vec{b}_a = \bar{b}_a \vec{b}^\circ = 2\sqrt{5}\,\frac{\vec{j}-2\vec{k}}{\sqrt{5}} = 2\vec{j} - 4\vec{k}$$

□

Primjer 18. Zadani su vektori $\vec{a} = 3\vec{i} - 5\vec{k}$, $\vec{b} = \vec{i} + 2\vec{j}$ i $\vec{c} = 2\vec{i} - \vec{k}$. Pronaći vektor koji je komplanaran s vektorima $\vec{a}$ i $\vec{b}$, okomit na vektor $\vec{c}$ i čija apscisa iznosi 5.

Rješenje. Nepoznati vektor označimo sa $\vec{x}$. Zbog komplanarnosti sa vektorima $\vec{a}$ i $\vec{b}$, vektor

$$\vec{x} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b} = (3\alpha+\beta)\vec{i} + 2\beta\vec{j} - 5\alpha\vec{k}.$$

Njegova je apscisa $3\alpha + \beta = 5$. Nakon uvrštavanja $\beta = 5 - 3\alpha$ vektor $\vec{x}$ dobiva prikaz

$$\vec{x} = 5\vec{i} + (10 - 6\alpha)\vec{j} - 5\alpha\vec{k}.$$

Zbog okomitosti s vektorom $\vec{c}$ vrijedi

$$\vec{x}\cdot\vec{c} = 10 + 5\alpha = 0,$$

odakle slijedi $\alpha = -2$. Prema tome je

$$\vec{x} = 5\vec{i} + 22\vec{j} + 10\vec{k}.$$

□

7. Vektorski umnožak vektora

7.1. Desni i lijevi sustav vektora

Pozitivni i negativni smjer vrtnje u ravnini se određuje prema smjeru vrtnje kazaljki na satu. **Pozitivni smjer vrtnje** je suprotan smjeru vrtnje kazaljki, a **negativni smjer vrtnje** je istovjetan smjeru vrtnje kazaljki.

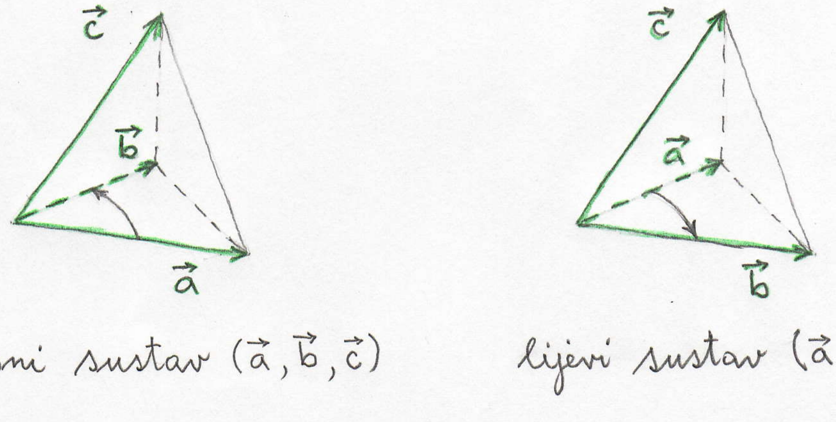
pozitivni smjer vrtnje   negativni smjer vrtnje

Neka su $\vec{a}$ i $\vec{b}$ dva nekolinearna vektora sa zajedničkim početkom. Uređena dvojka $(\vec{a}, \vec{b})$ određuje **desni sustav vektora u**

ravnini ako je kraća vrtnja prvog vektora $\vec{a}$ na drugi vektor $\vec{b}$, tj. vrtnja unutar kuta između $\vec{a}$ i $\vec{b}$, pozitivna. U protivnom, uređena dvojka $(\vec{a}, \vec{b})$ određuje **lijevi sustav vektora u ravnini**.

desni sustav $(\vec{a}, \vec{b})$ lijevi sustav $(\vec{a}, \vec{b})$

Neka su $\vec{a}$, $\vec{b}$ i $\vec{c}$ tri nekomplanarna vektora sa zajedničkim početkom. Uređena trojka $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ određuje **desni sustav vektora u prostoru** ako je kraća vrtnja prvog vektora $\vec{a}$ na drugi vektor $\vec{b}$, promatrana sa završetka trećeg vektora $\vec{c}$, pozitivna. U protivnom, uređena trojka $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ određuje **lijevi sustav vektora u prostoru**.



desni sustav $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ lijevi sustav $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$

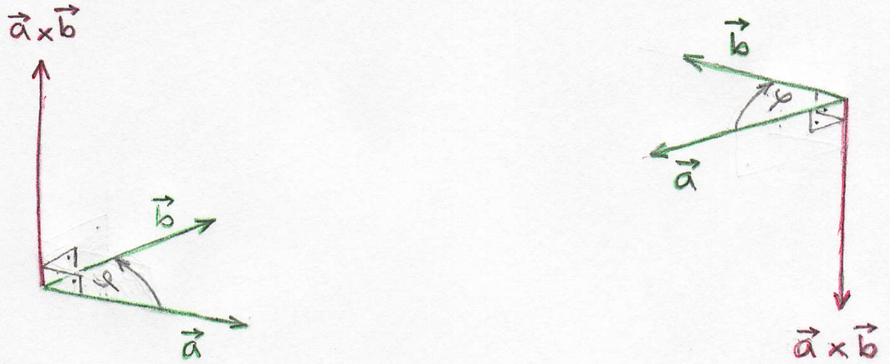
7.2. Definicija vektorskog umnožka

Za razliku od skalarnog umnožka koji se definira kao skalar, tj. broj, vektorski umnožak se definira kao vektor. Podsjetimo se da su vektori veličine koje imaju duljinu i orijentaciju.

Definicija. Vektorski umnožak (ili **produkt**) $\vec{a} \times \vec{b}$ (čita se a eks b) nekolinearnih vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$ koji zatvaraju kut φ je vektor duljine

$$\|\vec{a}\times\vec{b}\| = ab\sin\varphi,$$

okomit na vektore $\vec{a}$ i $\vec{b}$, a orijentiran desnim sustavom vektora $(\vec{a},\vec{b},\vec{a}\times\vec{b})$.



vektorski umnožak

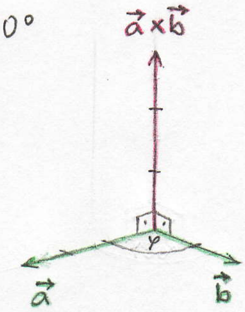
Dodatak definiciji. Ako su vektori $\vec{a}$ i $\vec{b}$ kolinearni, tada je $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{0}$.

Primjer 19. Vektori $\vec{a}$ i $\vec{b}$ zatvaraju kut $\varphi = 150°$. Prvi je dug 3 [cm], a drugi 2 [cm]. Odredi vektorski umnožak vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$.

Rješenje. $a = 3$ [cm], $b = 2$ [cm], $\varphi = 150°$

$$\|\vec{a}\times\vec{b}\| = ab\sin\varphi =$$

$$= 3\cdot 2\cdot \frac{1}{2} = 3 \text{ cm}$$

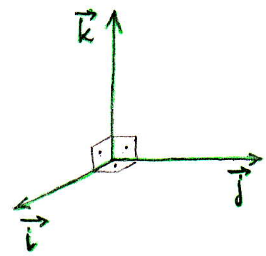


□

Primjer 20. U desnom sustavu $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ međusobno okomitih jediničnih vektora $\vec{i}$, $\vec{j}$ i $\vec{k}$ odredi umnožke $\vec{i}\times\vec{j}$, $\vec{i}\times\vec{k}$, $\vec{j}\times\vec{i}$, $\vec{j}\times\vec{k}$, $\vec{k}\times\vec{i}$, $\vec{k}\times\vec{j}$.

Rješenje. Svi umnožci su jedinični vektori jer je njihova duljina 1. Vektor $\vec{i} \times \vec{j}$ je jedinični vektor okomit na vektore $\vec{i}$ i $\vec{j}$. Samo dva vektora u prostoru imaju ta svojstva, vektori $\pm\vec{k}$. Uz pomoć slike, slijedi

$$\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}.$$



Zaključujući na isti način i oslanjajući se na sliku, slijedi:

$$\vec{i} \times \vec{k} = -\vec{j},\ \vec{j} \times \vec{i} = -\vec{k},\ \vec{j} \times \vec{k} = \vec{i},\ \vec{k} \times \vec{i} = \vec{j},\ \vec{k} \times \vec{j} = -\vec{i}.$$

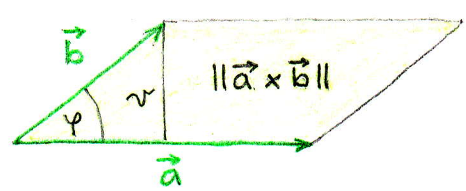
□

7.3. Značenja vektorskog umnožka

Prvo, vektorski umnožak određuje vektor koji je okomit na dva zadana vektora.

Drugo, posebno geometrijsko značenje ima duljina vektorskog umnožka: ako $\vec{a}$ i $\vec{b}$ nisu kolinearni, duljina vektora $\vec{a} \times \vec{b}$ je jednaka površini paralelograma razapetog s $\vec{a}$ i $\vec{b}$.

$$P = av = ab \sin\varphi = \\ = \|\vec{a} \times \vec{b}\|$$



geometrijsko značenje vektorskog umnožka

7.4. Računska pravila vektorskog umnožka

Povezivanjem vektorskog množenja vektora sa množenjem vektora brojem i zbrajanjem vektora dobivaju se skladna i korisna računska pravila.

Za bilo koje brojeve α, β i vektore $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ vrijedi:

(1) $\vec{b} \times \vec{a} = -\vec{a} \times \vec{b}$ *antikomutativnost*

(2) $\vec{a} \times \vec{a} = \vec{0}$

(3) $(\alpha \vec{a}) \times (\beta \vec{b}) = (\alpha\beta)(\vec{a} \times \vec{b}) \overset{\text{kraće}}{=\!=} \alpha\beta\, \vec{a} \times \vec{b}$ *homogenost*

(4) $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$ *distributivnost*

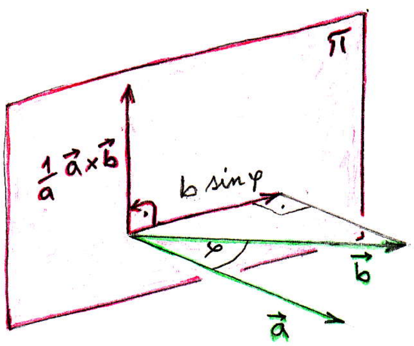
(5) $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0} \iff \vec{a} \parallel \vec{b}$ $(\vec{a} \neq \vec{0}, \vec{b} \neq \vec{0})$ *uvjet usporednosti*

Pravila (1), (2) i (3) su neposredna posljedica definicije vektorskog umnoška.

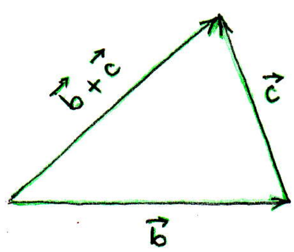
Dokaz pravila (5). Predpostavlja se da nijedan od vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$ nije $\vec{0}$. Tada vrijedi:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0} \iff ab \sin\varphi = 0 \iff \sin\varphi = 0 \iff \vec{a} \parallel \vec{b}.$$

Dokaz pravila (4). Ako je $\vec{a} = \vec{0}$, formula vrijedi trivijalno $(\vec{0} = \vec{0} + \vec{0})$. Predpostavimo dalje da je $\vec{a} \neq \vec{0}$. Neka je Π ravnina okomita na vektor $\vec{a}$, npr. ona koja prolazi početkom vektora $\vec{a}$. Usmjerimo pažnju na vektore $\vec{a}$ i $\vec{b}$ u cilju geometrijskog predočenja vektora $\frac{1}{a}\vec{a} \times \vec{b}$. Prvo vektor $\vec{b}$ okomito projiciramo na ravninu Π (usporedno sa $\vec{a}$). Projekciju zatim zakrenemo u ravnini Π za pravi kut u pozitivnom smjeru gledano sa završetka vektora $\vec{a}$. Dobiva se vektor $\frac{1}{a}\vec{a} \times \vec{b}$.



ravnina okomita na $\vec{a}$



trokut vektora $\vec{b}, \vec{c}, \vec{b}+\vec{c}$

Sada se isti geometrijski postupak provede s trokutom vektora $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{b}+\vec{c}$. Dobije se trokut vektora $\frac{1}{a}\vec{a} \times \vec{b}$, $\frac{1}{a}\vec{a} \times \vec{c}$, $\frac{1}{a}\vec{a} \times (\vec{b}+\vec{c})$.

Njegov analitički zapis

$$\frac{1}{a}\vec{a}\times\vec{b}+\frac{1}{a}\vec{a}\times\vec{c}=\frac{1}{a}\vec{a}\times(\vec{b}+\vec{c})$$

nakon množenja s a postaje formula distributivnosti.

Primjer 21. Izrazi vektor $\vec{a}\times\vec{b}$ pomoću vektora $\vec{u}\times\vec{v}$, ako je $\vec{a}=4\vec{u}-\vec{v}$ i $\vec{b}=-2\vec{u}+3\vec{v}$.

Rješenje. Iz računskih pravila (1) – (4) slijedi:

$$\begin{aligned}\vec{a}\times\vec{b} &= (4\vec{u}-\vec{v})\times(-2\vec{u}+3\vec{v})=\\ &= -8\vec{u}\times\vec{u}+12\vec{u}\times\vec{v}+2\vec{v}\times\vec{u}-3\vec{v}\times\vec{v}=\\ &= 10\,\vec{u}\times\vec{v}\end{aligned}$$

□

Primjer 22. Izračunaj površinu paralelograma razapetog vektorima $\vec{a}=3\vec{u}+\vec{v}$ i $\vec{b}=\vec{u}-4\vec{v}$, ako je $u=1$ m, $v=6$ m i $\varphi=\sphericalangle(\vec{u},\vec{v})=30°$.

Rješenje. Iz računskih pravila, definicije duljine te geometrijskog značenja vektorskog umnožka, dobiva se:

$$\begin{aligned}\vec{a}\times\vec{b} &= (3\vec{u}+\vec{v})\times(\vec{u}-4\vec{v})=\\ &= 3\vec{u}\times\vec{u}-12\,\vec{u}\times\vec{v}+\vec{v}\times\vec{u}-4\vec{v}\times\vec{v}=\\ &= -13\,\vec{u}\times\vec{v}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\|\vec{a}\times\vec{b}\| &= \|-13\,\vec{u}\times\vec{v}\| = 13\,\|\vec{u}\times\vec{v}\| =\\ &= 13\,uv\sin\varphi = 13\cdot 1\cdot 6\cdot\frac{1}{2} = 39 \text{ m}\end{aligned}$$

$$P = 39 \text{ m}^2$$

□

7.5. Determinanta

Za prikladan prikaz formula vektorskog i mješovitog umnožka u koordinatnom sustavu potreban nam je pojam determinante.

Općenito, determinanta je kvadratna shema elemenata, tj. shema koja ima isti broj redaka i stupaca. Element determinante koji se nalazi u i-tom redku i j-tom stupcu obično se obilježava s a_{ij}. Determinanta se razvija po jednom odabranom redku ili po jednom odabranom stupcu.

Pravilo razvoja za determinantu drugog reda:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

Pojašnjenje. Umnožak elemenata glavne dijagonale minus umnožak elemenata sporedne dijagonale.

Pravilo razvoja za determinantu trećeg reda, po prvom redku:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

Pojašnjenje. Poddeterminanta drugog reda iza a_{11} nastaje ako se iz polazne determinante izbace redak i stupac u kojem je a_{11}. Isto nastaju preostale dvije poddeterminante. Ispred elementa a_{11} je pozitivan predznak jer je zbroj njegovih indeksa paran, $1+1=2$. Ispred elementa a_{12} je negativan predznak jer je zbroj njegovih indeksa neparan, $1+2=3$.

Pravilo razvoja se može poopćiti te primijeniti na determinantu bilo kojeg reda. Npr. determinanta četvrtog reda se razvija u tri koraka: u prvom koraku razvoja se pojave četiri poddeterminante trećeg reda, u drugom koraku razvoja svaku determinantu trećeg reda "rastavimo" na tri poddeterminante drugog reda, u trećem koraku razvijemo sve determinante drugog reda.

Primjer 23. Razvojima po prvom redku i drugom stupcu, izračunaj vrijednost determinante

$$\begin{vmatrix} 3 & -2 & -1 \\ 1 & 4 & 5 \\ -3 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Rješenje. Razvoj po prvom redku:

$$\begin{vmatrix} 3 & -2 & -1 \\ 1 & 4 & 5 \\ -3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ -3 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= 3[4\cdot 1 - 5\cdot 0] + 2[1\cdot 1 - 5\cdot(-3)] - [1\cdot 0 - 4\cdot(-3)] =$$

$$= 12 + 32 - 12 = 32$$

Razvoj po drugom stupcu:

$$\begin{vmatrix} 3 & -2 & -1 \\ 1 & 4 & 5 \\ -3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} + 4\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= 2\left[1\cdot 1 - 5\cdot(-3)\right] + 4\left[3\cdot 1 - (-1)\cdot(-3)\right] =$$

$$= 32 + 0 = 32$$

7.6. Formula u koordinatnom sustavu

Za $\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$ i $\vec{b} = b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k}$ uz primjenu računskih pravila te upotrebu determinante, izlazi:

$$\vec{a}\times\vec{b} = (a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}) \times (b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k}) =$$

$$= a_x b_x \vec{i}\times\vec{i} + a_x b_y \vec{i}\times\vec{j} + a_x b_z \vec{i}\times\vec{k} +$$

$$+ a_y b_x \vec{j}\times\vec{i} + a_y b_y \vec{j}\times\vec{j} + a_y b_z \vec{j}\times\vec{k} +$$

$$+ a_z b_x \vec{k}\times\vec{i} + a_z b_y \vec{k}\times\vec{j} + a_z b_z \vec{k}\times\vec{k} =$$

$$= (a_y b_z - a_z b_y)\vec{i} - (a_x b_z - a_z b_x)\vec{j} + (a_x b_y - a_y b_x)\vec{k} =$$

$$= \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix}\vec{k} =$$

$$= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

Pojašnjenje. Po pravilu (2) $\vec{i}\times\vec{i} = \vec{j}\times\vec{j} = \vec{k}\times\vec{k} = \vec{0}$. Po Primjeru 20: $\vec{i}\times\vec{j} = \vec{k}$, $\vec{i}\times\vec{k} = -\vec{j}$, $\vec{j}\times\vec{i} = -\vec{k}$, $\vec{j}\times\vec{k} = \vec{i}$, $\vec{k}\times\vec{i} = \vec{j}$, $\vec{k}\times\vec{j} = -\vec{i}$.

Zapišimo još jednom formulu koja omogućava brzo određivanje vektorskog umnožka u koordinatnom sustavu:

$$\boxed{\vec{a}\times\vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}}.$$

Primjer 24. Izračunaj površinu paralelograma razapetog vektorima $\vec{a} = 2\vec{j} - \vec{k}$ (cm) i $\vec{b} = \vec{i} - 3\vec{j}$ (dm).

Rješenje. $\vec{a} = 2\vec{j} - \vec{k}$ (cm), $\vec{b} = \vec{i} - 3\vec{j}$ (dm) $= 10\vec{i} - 30\vec{j}$ (cm)

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 2 & -1 \\ 10 & -30 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -30 & 0 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 10 & 0 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 10 & -30 \end{vmatrix} \vec{k} =$$

$$= -30\vec{i} - 10\vec{j} - 20\vec{k} = -10(3\vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k})$$

$$\|\vec{a} \times \vec{b}\| = 10\sqrt{9+1+4} = 10\sqrt{14} \ \text{cm}$$

$$P = 10\sqrt{14} \ \text{cm}^2$$

□

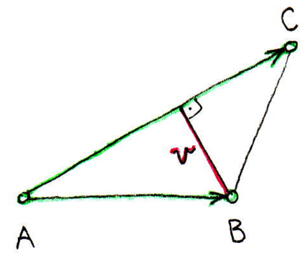
Primjer 25. U trokutu s vrhovima $A(2,0,1)$, $B(2,4,-1)$ i $C(-1,3,1)$ izračunaj duljinu visine koja pripada stranici $\overline{AC}$.

Rješenje. Iz opće formule za površinu trokuta

$$P = \frac{\overline{AC} \cdot v}{2}$$

izrazimo visinu

$$v = \frac{2P}{\overline{AC}}.$$



Dalje, uz pomoć vektorskog računa slijedi:

$$P = \frac{1}{2} \|\vec{AB} \times \vec{AC}\|$$

$$\vec{AB} = 4\vec{j} - 2\vec{k}, \quad \vec{AC} = -3\vec{i} + 3\vec{j} = 3(-\vec{i} + \vec{j}), \quad \overline{AC} = 3\|-\vec{i} + \vec{j}\| = 3\sqrt{2}$$

$$\vec{AB} \times \vec{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 4 & -2 \\ -3 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 6\vec{i} + 6\vec{j} + 12\vec{k} = 6(\vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k})$$

$$\|\vec{AB} \times \vec{AC}\| = 6\sqrt{6}, \quad P = 3\sqrt{6}$$

$$v = \frac{2 \cdot 3\sqrt{6}}{3\sqrt{2}} = 2\sqrt{3}$$

□

7.7. Vektorsko - vektorski umnožak vektora

Vektorsko - vektorski (eks - eks) **umnožci** ili **produkti** vektora $\vec{a}$, $\vec{b}$ i $\vec{c}$ su vektori $(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c}$ i $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})$.

Primjer 26. Izračunaj vektorsko - vektorske umnožke vektora $\vec{a} = 2\vec{j} - 3\vec{k}$, $\vec{b} = \vec{i} + 2\vec{k}$ i $\vec{c} = -\vec{i} + 4\vec{j}$.

Rješenje.

$$\vec{a}\times\vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 2 & -3 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 4\vec{i} - 3\vec{j} - 2\vec{k}$$

$$(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 4 & -3 & -2 \\ -1 & 4 & 0 \end{vmatrix} = 8\vec{i} + 2\vec{j} + 13\vec{k}$$

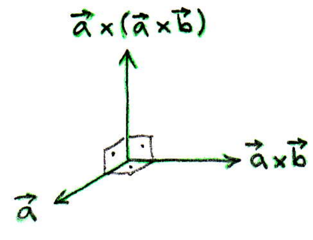
$$\vec{b}\times\vec{c} = -8\vec{i} - 2\vec{j} + 4\vec{k}$$

$$\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c}) = 2\vec{i} + 24\vec{j} + 16\vec{k}$$

Ovaj primjer ujedno pokazuje da vektorsko množenje nije asocijativno.

□

Ako vektori $\vec{a}$ i $\vec{b}$ nisu kolinearni, tada su $\vec{a}$, $\vec{a}\times\vec{b}$ i $\vec{a}\times(\vec{a}\times\vec{b})$ tri međusobno okomita vektora. Uređena trojka tih vektora $(\vec{a}, \vec{a}\times\vec{b}, \vec{a}\times(\vec{a}\times\vec{b}))$ određuje desni sustav vektora.



desni pravokutni sustav

Postoji veza između vektorsko - vektorskog i skalarnog množenja, a izražena je formulama:

$$(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c} = (\vec{a}\cdot\vec{c})\vec{b} - (\vec{b}\cdot\vec{c})\vec{a}$$

$$\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c}) = (\vec{a}\cdot\vec{c})\vec{b} - (\vec{a}\cdot\vec{b})\vec{c}$$

Ove ekvivalentne formule se mogu pamtiti po "pravilu srednjeg vektora" na lijevoj strani. U obje formule desna strana nastaje iz lijeve ovako: srednji vektor pomnožen skalarnim umnožkom preostalih dvaju vektora, minus, vektor koji je sa srednjim u zagradi pomnožen skalarnim umnožkom preostalih dvaju vektora.

Izvedimo prvu formulu. Predpostavimo da vektori $\vec{a}$ i $\vec{b}$ nisu kolinearni. Tada je vektor $(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c}$ (ili je $\vec{0}$ ili je okomit na $\vec{a}\times\vec{b}$) komplanaran s vektorima $\vec{a}$ i $\vec{b}$. Zato postoje brojevi α i β za koje je

$$(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c}=\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}.$$

Ovu jednakost skalarno pomnožimo vektorom $(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{a}$ (okomit na $\vec{a}$):

$$\left((\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{a}\right)\cdot\left((\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c}\right)=\left((\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{a}\right)\cdot\beta\vec{b}$$

(za tri uređena vektora umnožci in-eks i eks-in su jednaki - vidi Lekciju 8)

$$\left[\left((\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{a}\right)\times(\vec{a}\times\vec{b})\right]\cdot\vec{c}=\beta\,(\vec{a}\times\vec{b})\cdot(\vec{a}\times\vec{b})$$

(vektor u uglatoj zagradi je istosmjeran s vektorom $\vec{a}$)

$$\|\vec{a}\times\vec{b}\|^2 a\,\vec{a}^\circ\cdot\vec{c}=\beta\,\|\vec{a}\times\vec{b}\|^2$$

$$\vec{a}\cdot\vec{c}=\beta$$

Ovaj rezultat primijenjen na preuređenu jednakost ($\vec{a}$ u sredini)

$$(\vec{b}\times\vec{a})\times\vec{c}=-\alpha\vec{a}-\beta\vec{b}$$

daje

$$\vec{b}\cdot\vec{c}=-\alpha.$$

Time je izvedena prva formula za nekolinearne vektore $\vec{a}$ i $\vec{b}$.

Ako su vektori $\vec{a}$ i $\vec{b}$ kolinearni, tada uz pomoć $\vec{b}=\alpha\vec{a}$, slijedi

$$(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c}=\vec{0}=\alpha(\vec{a}\cdot\vec{c})\vec{a}-\alpha(\vec{a}\cdot\vec{c})\vec{a}=(\vec{a}\cdot\vec{c})\alpha\vec{a}-(\alpha\vec{a}\cdot\vec{c})\vec{a}=$$
$$=(\vec{a}\cdot\vec{c})\vec{b}-(\vec{b}\cdot\vec{c})\vec{a}.$$

8. Mješoviti umnožak vektora

8.1. Definicija mješovitog umnožka

Mješoviti umnožak triju vektora nije nova operacija s vektorima. Taj umnožak nastaje iz vektorskog i skalarnog umnožka.

Definicija. Mješoviti umnožak (ili **produkt**) vektora $\vec{a}$, $\vec{b}$ i $\vec{c}$ je broj

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} \quad \text{ili} \quad \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}).$$

Dodatak definiciji. Računska pravila će pokazati da je

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}),$$

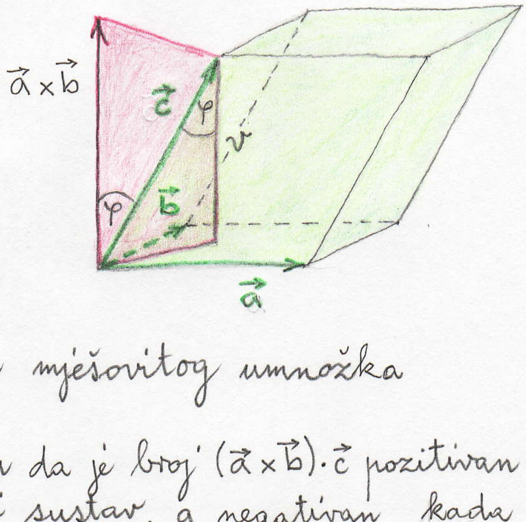
odnosno da su vektorsko-skalarni (eks-in) i skalarno-vektorski (in-eks) umnožak jednaki.

8.2. Značenje mješovitog umnožka

Tri nekomplanarna vektora razapinju paralelopiped u prostoru. Apsolutna vrijednost njihovog mješovitog umnožka je jednaka obujmu (volumenu) razapetog paralelopipeda.

$\varphi = \measuredangle(\vec{a} \times \vec{b}, \vec{c})$, $v = c\,|\cos\varphi|$

$$V = B\,v = \|\vec{a} \times \vec{b}\|\, c\, |\cos\varphi| =$$
$$= \big|\, \|\vec{a} \times \vec{b}\|\, \|c\| \cos\varphi \,\big| =$$
$$= |(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}\,|$$



geometrijsko značenje mješovitog umnožka

Slika još upućuje na činjenicu da je broj $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$ pozitivan kada je trojka vektora $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ desni sustav, a negativan kada je $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ lijevi sustav.

Primjer 27. Izračunaj obujam paralelopipeda razapetog vektorima $\vec{a} = \vec{u} + \vec{v}$, $\vec{b} = 2\vec{u} - 3\vec{v}$ i $\vec{c} = \vec{u} \times \vec{v}$, ako je $u = 1$ cm, $v = 2$ cm i $\varphi = \sphericalangle(\vec{u}, \vec{v}) = 45°$.

Rješenje.
$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = [(\vec{u} + \vec{v}) \times (2\vec{u} - 3\vec{v})] \cdot (\vec{u} \times \vec{v}) =$$
$$= [-3\vec{u} \times \vec{v} + 2\vec{v} \times \vec{u}] \cdot (\vec{u} \times \vec{v}) =$$
$$= -5(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot (\vec{u} \times \vec{v}) = -5\|\vec{u} \times \vec{v}\|^2 =$$
$$= -5(uv\sin\varphi)^2 = -5\left(1 \cdot 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = -10$$
$$V = 10 \text{ cm}^3$$

□

8.3. Računska pravila mješovitog umnožka

Za mješoviti umnožak bi se mogla zapisati mnogobrojna pravila koja proizlaze iz pravila za vektorski i skalarni umnožak. Mi ćemo zapisati samo dva najvažnija.

Za bilo koje vektore $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ vrijedi:

(1) $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$ eks-in komutativnost

(2) $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = 0 \iff \vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ komplanarni uvjet komplanarnosti

Dokaz pravila (2). U slučaju da su neki od vektora $\vec{a}, \vec{b}$ i $\vec{c}$ kolinearni ekvivalencija vrijedi trivijalno ($(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = 0$ i $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ su komplanarni). Predpostavimo da među vektorima $\vec{a}, \vec{b}$ i $\vec{c}$ nema kolinearnih. Tada vrijedi:

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = 0 \iff \vec{a} \times \vec{b} \perp \vec{c} \iff \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \text{ komplanarni.}$$

Dokaz pravila (1). U slučaju komplanarnosti vektora $\vec{a}, \vec{b}$ i $\vec{c}$ (1) izlazi iz (2). Predpostavimo da vektori $\vec{a}, \vec{b}$ i $\vec{c}$ nisu komplanarni. Tada su sustavi vektora $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ i $(\vec{b}, \vec{c}, \vec{a})$ istovremeno ili desni ili lijevi. Zbog geometrijskog smisla vektorsko- skalarnog umnoška i komutativnosti skalarnog umnožka vrijedi

$$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c} = (\vec{b}\times\vec{c})\cdot\vec{a} = \vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c}).$$

8.4. Formula u koordinatnom sustavu

Neka je $\vec{a}=a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k}$, $\vec{b}=b_x\vec{i}+b_y\vec{j}+b_z\vec{k}$ i $\vec{c}=c_x\vec{i}+c_y\vec{j}+c_z\vec{k}$. Služeći se pravilom (1), determinantama i pravilima skalarnog množenja, dobivamo:

$$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c} = \vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c}) = (a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k})\cdot\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ b_x & b_y & b_z\\ c_x & c_y & c_z\end{vmatrix} =$$

$$= (a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k})\cdot\left[(b_yc_z-b_zc_y)\vec{i}-(b_xc_z-b_zc_x)\vec{j}+(b_xc_y-b_yc_x)\vec{k}\right]$$

$$= a_x(b_yc_z-b_zc_y)-a_y(b_xc_z-b_zc_x)+a_z(b_xc_y-b_yc_x) =$$

$$= \begin{vmatrix}a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\\ c_x & c_y & c_z\end{vmatrix}$$

Još ćemo jednom zapisati ovu lako pamtljivu formulu:

$$\boxed{(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c} = \begin{vmatrix}a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\\ c_x & c_y & c_z\end{vmatrix}}.$$

Primjer 28. Izračunaj obujmove paralelopipeda i tetraedra razapetih vektorima $\vec{a}=4\vec{i}+\vec{k}$, $\vec{b}=3\vec{i}-\vec{j}$ i $\vec{c}=3\vec{i}+5\vec{k}$ čije su koordinate izmjerene u metrima.

Rješenje.

$$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c} = \begin{vmatrix}4 & 0 & 1\\ 3 & -1 & 0\\ 3 & 0 & 5\end{vmatrix} = -17$$

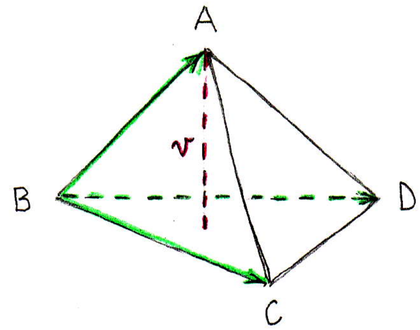
$$V_{par} = 17\ [m^3], \quad V_{tet} = \frac{17}{6}\ [m^3]$$

Pojašnjenje. Obujam tetraedra je šest puta manji od obujma paralelopipeda, tri puta zbog opće formule i dva puta zbog baze:

$$V_{tet} = \frac{1}{3} B_{tet}\, v = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} B_{par}\, v = \frac{1}{6} V_{par}\,.$$

□

Primjer 29. U tetraedru s vrhovima $A(4,2,1)$, $B(0,2,1)$, $C(3,2,3)$ i $D(1,3,2)$ izračunaj duljinu visine koja pripada strani BCD.



Rješenje. Iz opće formule za obujam tetraedra

$$V = \frac{1}{3} B v$$

izrazimo visinu

$$v = \frac{3V}{B}\,.$$

Služeći se vektorskim računom dobivamo:

$$\vec{BA} = 4\vec{i}\,, \quad \vec{BC} = 3\vec{i} + 2\vec{k}\,, \quad \vec{BD} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$$

$$\vec{BC} \times \vec{BD} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -2\vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k}\,; \quad \vec{BA} \cdot (\vec{BC} \times \vec{BD}) = 4 \cdot (-2) = -8$$

$$B = \frac{1}{2} \| \vec{BC} \times \vec{BD} \| = \frac{1}{2}\sqrt{14}\,, \quad V = \frac{1}{6} \left| \vec{BA} \cdot (\vec{BC} \times \vec{BD}) \right| = \frac{1}{6} 8 = \frac{4}{3}$$

$$v = \frac{3 \cdot \frac{4}{3}}{\frac{1}{2}\sqrt{14}} = \frac{4}{7}\sqrt{14}$$

□

Primjer 30. Pronađi vrijednosti broja x za koje su točke $A(1,0,x)$, $B(1,2,3)$, $C(1,x,3)$ i $D(0,0,4)$ komplanarne.

Rješenje. Odredimo vektore $\vec{a} = \vec{DA}$, $\vec{b} = \vec{DB}$, $\vec{c} = \vec{DC}$ i na njih primijenimo uvjet komplanarnosti (2):

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = 0\,.$$

Slijedi:

$$\vec{a} = \vec{i} + (x-4)\vec{k}, \; \vec{b} = \vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}, \; \vec{c} = \vec{i} + x\vec{j} - \vec{k}$$

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & x-4 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & x & -1 \end{vmatrix} = x^2 - 5x + 6$$

$$x^2 - 5x + 6 = 0 \Rightarrow x = 2, x = 3$$

$\square$

9. Pojam vektorskog prostora

9.1. Vektorski prostor nad brojevnim poljem

Iz geometrijske predodžbe vektora i osnovnih operacija s vektorima (zbrajanje vektora i množenje vektora brojem) je razvijena ideja o uvođenju pojma **vektorskog prostora nad brojevnim poljem**. Taj pojam obuhvaća vektore iz skupa V (komutativna grupa vektora) i brojeve iz skupa $\mathbb{F}$ (polje brojeva). Vektori i brojevi su međusobno povezani računskim pravilima ili aksiomima množenja vektora brojevima. Govori se o vektorskom prostoru V nad brojevnim poljem $\mathbb{F}$.

Vektorski prostor nad brojevnim poljem je jedna od najvažnijih algebarskih struktura i jedan od najvažnijih pojmova suvremene matematike.

9.2. Baza i dimenzija vektorskog prostora

Skup svih vektora u prostoru

$$V = \{ \alpha\vec{i} + \beta\vec{j} + \gamma\vec{k} \mid \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R} \}$$

je vektorski prostor nad poljem realnih brojeva $\mathbb{R}$. Svaki je vektor iz V predočen kao linearna kombinacija triju linearno nezavisnih vektora $\vec{i}$, $\vec{j}$ i $\vec{k}$. Zato je tročlani skup vektora

$$V_{baz} = \{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$$

baza tog vektorskog prostora V. Broj vektora baze određuje **dimenziju** vektorskog prostora. U ovom je primjeru

$$\dim V = 3 .$$

Zanimljivo je kakvi sve raznovrsni skupovi mogu činiti vektorski prostor nad nekim poljem brojeva.

Skup svih racionalnih brojeva

$$V = \mathbb{Q}$$

je vektorski prostor nad poljem racionalnih brojeva $\mathbb{Q}$. Za bazu prostora V možemo uzeti bilo koji racionalni broj $r \neq 0$. Dakle, $V_{baz} = \{r\}$, $\dim V = 1$.

Skup realnih polinoma

$$V = \{\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 \mid \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}\}$$

je vektorski prostor nad poljem $\mathbb{R}$, $V_{baz} = \{1, x, x^2, x^3\}$, $\dim V = 4$.

Postoje vektorski prostori koji nemaju konačnu dimenziju. Jedan takav prostor je skup svih realnih polinoma.